В. В. ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ, АРИФМЕТИКЕ И АНАЛИЗУ

2005

П70

Прасолов В. В.

П70 Задачи по алгебре, арифметике и анализу.

В книгу включены задачи по алгебре, арифметике и анализу, относящиеся к школьной программе, но, в основном, несколько повышенного уровня по сравнению с обычными школьными задачами. Есть также некоторое количество весьма трудных задач, предназначенных для учащихся математических классов. Сборник содержит более 1000 задач с полными решениями.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов techинститутов.

Оглавление

Предисловие

Книга состоит из 39 глав и "Дополнения", которое содержит очерки, посвящённые избранным темам алгебры, арифметики и анализа. В конце книги приведён предметный указатель. Структура книги во многом схожа со структурой моей книги "Задачи по планиметрии", в последнем издании которой тоже появилось "Дополнение" и предметный указатель.

Книга предназначена для школьников, обучающихся в классах с углублённым изучением математики, и для преподавателей математики. В ней представлены практически все темы алгебры, арифметики и анализа, которые сейчас изучаются в математических классах. Некоторая часть изложенного материала выходит за рамки школьной программы, но не за рамки программ математических классов. В основном это те темы, которые традиционно вызывают большой интерес у школьников: свойства простых чисел, решение уравнений в целых числах, задачи о взвешивании монет, решение кубических уравнений, невозможность трисекции угла.

Для удобства читателя в книге принята подробная рубрикация. Задачи распределены по 39 главам, каждая из которых разбита на несколько параграфов. За основу классификации приняты методы решения задач, хотя по необходимости существенную роль играют и внешние признаки (уравнения, неравенства, многочлены, тригонометрические функции и т.п.).

Основное внимание в книге уделено тем идеям, которые находят применение в современной математике или в других областях науки: физике, экономике и т.д.

"Дополнение" состоит из отдельных очерков, посвящённых избранным темам алгебры, арифметики и анализа: рациональная параметризация окружности; суммы квадратов многочленов; представление чисел

в виде суммы двух квадратов; построение правильного 17-угольника; построения циркулем и линейкой; хроматический многочлен графа; диофантовы уравнения для многочленов; трансцендентность чисел e и π; теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии. В конце приведён словарик, в котором объяснено происхождение некоторых математических терминов.

Глава 1.

Квадратный трёхчлен

1.1. Наименьшее значение квадратного трёхчлена

1.1. Докажите, что если $x > 0$, то $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

1.2. а) Докажите, что $x(1 - x) \leqslant 1/4$. б) Докажите, что $x(a - x) \leqslant a^2/4$.

1.3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства $a(1 - b) > 1/4$, $b(1 - c) > 1/4$, $c(1 - a) > 1/4$.

1.4. При каком x функция $f(x) = (x-a_1)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ принимает наименьшее значение?

1.5. Пусть x, y, z — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geqslant 9$.

1.6. Докажите, что расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax+by+c=0$ равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1.7. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа, причём $a_1 + \ldots + a_n = a$. Докажите, что

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n \leqslant a^2/4.$$

1.2. Дискриминант

1.8. а) Пусть a, b, c — вещественные числа. Докажите, что квадратное уравнение

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

имеет вещественный корень.

б) Докажите, что $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$.

1.9. Пусть $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ — вещественные числа. Докажите *неравенство Коши*

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

1.10. Докажите, что если $(a+b+c)c<0$, то $b^2>4ac$.

1.3. Разные задачи

1.11. а) *Золотым сечением* называют деление отрезка на две части, при котором весь отрезок относится к большей части, как бóльшая часть к меньшей. Чему равно при этом отношение меньшей части к большей?

б) Пусть a — основание равнобедренного треугольника с углом при основании 72°, b — его боковая сторона. Докажите, что отрезки a и b делят отрезок $a+b$ в золотом сечении.

1.12. Докажите, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c принимает целые значения при всех целых x тогда и только тогда, когда числа $2a$, $a+b$ и c целые.

1.13. У уравнений $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ нет корней, меньших x_0. Докажите, что у уравнения $x^2+\dfrac{a+c}{2}x+\dfrac{b+d}{2}=0$ тоже нет корней, меньших x_0.

1.14. Докажите, что если уравнения с целыми коэффициентами

$$\begin{aligned} x^2+p_1x+q_1 &= 0,\\ x^2+p_2x+q_2 &= 0 \end{aligned}$$

имеют общий нецелый корень, то $p_1=p_2$ и $q_1=q_2$.

1.15. Докажите, что если при любом положительном p все корни уравнения $ax^2+bx+c+p=0$ действительны и положительны, то коэффициент a равен нулю.

1.16. а) Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точной четвёртой степенью. Докажите, что тогда $a = b = 0$.

б) Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точным квадратом. Докажите, что тогда $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

1.17. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$, $s_n = x_1^n + x_2^n$. Докажите, что

$$\frac{s_n}{n} = \sum_m (-1)^{n+m} \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} a^{n-2m} b^m,$$

где суммирование ведётся по всем целым числам m, для которых $0 \leqslant m \leqslant n/2$ (*формула Варинга*).

1.4. Теорема о промежуточном значении

При решении задач о квадратном трёхчлене часто бывает полезно следующее утверждение, которое называют *теоремой о промежуточном значении* для квадратного трёхчлена. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Если $f(\alpha)f(\beta) \leqslant 0$, то на отрезке $[\alpha, \beta]$ лежит по крайней мере один корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Для $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ это означает, что если, например, $\varphi(\alpha) > \psi(\alpha)$ и $\varphi(\beta) < \psi(\beta)$, то на отрезке $[\alpha, \beta]$ есть точка x_0, для которой $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$.

1.18. Докажите теорему о промежуточном значении для квадратного трёхчлена.

1.19. Пусть α — корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, β — корень уравнения $x^2 - ax - b = 0$. Докажите, что между числами α и β есть корень уравнения $x^2 - 2ax - 2b = 0$.

1.20. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два вещественных корня, разность которых не меньше натурального числа $n \geqslant 2$. Докажите, что квадратный трёхчлен $f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+n)$ имеет два вещественных корня.

1.21. Даны уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $-ax^2 + bx + c$. Докажите, что если x_1 — корень первого уравнения, а x_2 — второго, то найдётся корень x_3 уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, для которого либо $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2$, либо $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2$.

1.22. Докажите, что на отрезке $[-1, 1]$ квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ принимает значение, абсолютная величина которого не меньше $1/2$.

1.23. Докажите, что если $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1/2$ при всех $|x| \leqslant 1$, то $|ax^2 + bx + c| \geqslant x^2 - \frac{1}{2}$ при всех $|x| \geqslant 1$.

1.24. Докажите, что если $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 1$, то $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$ при $|x| \leqslant 1$.

1.5. Уравнение касательной к конике

1.25. Найдите уравнение касательной к конике $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ в точке (x_0, y_0).

1.26. а) Докажите, что касательная в точке (x_0, y_0) к эллипсу (или гиперболе) $ax^2 + by^2 = 1$ задаётся уравнением $ax_0x + by_0y = 1$.

б)Докажите, что касательная в точке (x_0, y_0) к гиперболе $xy = a$ задаётся уравнением $x_0x + y_0y = 2a$.

1.6. Результант

1.27. Докажите, что квадратные уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеют общий корень (возможно комплексный) тогда и только тогда, когда

$$(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - q_1p_2) = 0.$$

Выражение $(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - q_1p_2)$ называют *результантом* квадратных трёхчленов $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$.

1.28. Докажите, что если числа p_1, p_2, q_1, q_2 удовлетворяют неравенству $(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - q_1p_2) < 0$, то квадратные трёхчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют вещественные корни и между корнями каждого из них лежит корень другого.

Решения

1.1. Данное неравенство эквивалентно неравенству $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, т.е. $(x - 1)^2 \geqslant 0$.

1.2. а) Квадратный трёхчлен $x^2 - x$ принимает наименьшее значение при $x = 1/2$; оно равно $-1/4$.

б) Квадратный трёхчлен $x^2 - ax$ принимает наименьшее значение при $x = a/2$; оно равно $-a^2/4$.

1.3. Согласно задаче 1.2 $a(1-a) \leqslant 1/4$, $b(1-b) \leqslant 1/4$, $c(1-c) \leqslant 1/4$. Поэтому

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant (1/4)^3.$$

1.4. Ясно, что $f(x) = nx^2 - 2(a_1+\ldots+a_n) + a_1^2+\ldots+a_n^2$. Этот квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение при $x = \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

1.5. По условию $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+y+z}{x} = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x}$. Такие же выражения можно написать для $\dfrac{1}{y}$ и $\dfrac{1}{z}$. Согласно задаче 1.1 $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \geqslant 2$. Написав ещё два аналогичных неравенства, получим требуемое.

1.6. Пусть точка (x, y) лежит на прямой $ax+by+c=0$. Тогда $y = -\dfrac{ax+c}{b}$, поэтому

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (x-x_0)^2 + \left(\frac{ax+c}{b} + y_0\right)^2 =$$
$$= \frac{a^2+b^2}{b^2}x^2 + 2\left(-x_0 + \frac{ac}{b^2} + \frac{ay_0}{b}\right)x + x_0^2 + \frac{c^2}{b^2} + \frac{2cy_0}{b} + y_0^2.$$

Минимальное значение полученного квадратного трёхчлена равно

$$-\frac{b^2}{a^2+b^2}\left(-x_0 + \frac{ac}{b^2} + \frac{ay_0}{b}\right)^2 + x_0^2 + \frac{c^2}{b^2} + \frac{2cy_0}{b} + y_0^2 = \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}.$$

1.7. Пусть $x = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ Тогда $a - x = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ Поэтому согласно задаче 1.2

$$a^2/4 \geqslant x(a-x) = (a_1+a_3+a_5+\ldots)(a_2+a_4+a_6+\ldots) \geqslant$$
$$\geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n.$$

1.8. а) Пусть для определённости $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда при $x = b$ левая часть уравнения принимает значение $(b-c)(b-a) \leqslant 0$. А при очень больших x левая часть положительна, поэтому уравнение имеет вещественный корень.

б) Достаточно заметить, что дискриминант рассматриваемого в а) уравнения неотрицателен.

1.9. Квадратный трёхчлен $(a_1x+b_1)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2$ неотрицателен при всех x, поэтому его дискриминант неположителен. Вычислив дискриминант, получаем требуемое.

1.10. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + bx + ac$. По условию $f(c) < 0$. Коэффициент при x^2 положителен, поэтому рассматриваемый квадратный трёхчлен имеет два вещественных корня. Следовательно, его дискриминант $D = b^2 - 4ac$ положителен.

1.11. а) Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Пусть отрезок разделён на два отрезка длиной y и z, причём $y < z$. Мы имеем золотое сечение тогда и только тогда, когда $\frac{y}{z} = \frac{z}{y+z} = x$, где x — искомое число. Для x получаем уравнение $x(x + 1) = \frac{y}{z}\frac{y+z}{z} = 1$. Решая его и отбрасывая отрицательный корень, получаем $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

б) Пусть ABC — треугольник с углами $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = \angle C = 72^\circ$. Пусть, далее, $a = BC$ и $b = AC$. Проведём в этом треугольнике биссектрису BK. Тогда $\angle KBC = 36^\circ$, поэтому треугольник BCK тоже равнобедренный с углом при основании 72°. Кроме того, $AK = AB$, поскольку $\angle ABK = 36^\circ = \angle BAK$. Значит, $KC = b - a$, поэтому равенство $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{KC}$ записывается в виде $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-c}$, т.е. $b^2 - ba = a^2$. Следовательно, $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$, что и требовалось.

1.12. Предположим сначала, что квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x. Тогда, в частности, число $f(0) = c$ целое. Числа $f(\pm 1) - c = a \pm b$ тоже целые. Значит, число $2a = (a + b) + (a - b)$ целое.

Предположим теперь, что числа $2a$, $a + b$ и c целые. Тогда число $x(ax + b)$ целое при чётном x. А если $x = 2k + 1$, то число $ax + b = 2ka + a + b$ целое.

1.13. Из условия следует, что если $x \geqslant x_0$, то $x^2 + ax + b > 0$ и $x^2 + cx + d > 0$. Поэтому если $x > x_0$, то $2x^2 + (a + c)x + (b + d) > 0$.

1.14. Если уравнение с целыми коэффициентами $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ имеет нецелый корень x_1, то этот корень иррациональный. Действительно, пусть $x_1 = m/n$ — несократимая дробь. Тогда $m^2 + p_1 mn + q_1 n^2 = 0$, поэтому m^2 делится на n. Но по предположению числа m и n взаимно простые. Значит, число x_1 целое.

Таким образом, данные уравнения имеют общий корень $x_1 = a + \sqrt{b}$, где числа a и b рациональные, а число $\sqrt{b}$ иррациональное. Согласно теореме Виета второй корень первого уравнения равен $-p_1 - a - \sqrt{b}$ и при этом $q_1 = (a + \sqrt{b})(-p_1 - a - \sqrt{b})$. Следовательно, $q_1 = (-p_1 - 2a)\sqrt{b} + r$, где число $r = -ap_1 - a^2 - b$ рациональное. Поэтому $p_1 = -2a$ и $q_1 = (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$. Аналогично для чисел p_2 и q_2 мы получаем те же самые выражения.

1.15. Предположим, что $a > 0$. Тогда при больших положительных p дискриминант $D = b^2 - 4ac - 4ap$ отрицателен, поэтому данное уравнение вообще не имеет действительных корней. Предположим, что $a < 0$. Тогда при больших положительных p произведение корней, равное $\frac{c+p}{a}$, отрицательно.

1.16. а) Ясно, что $a \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Рассмотрим значения x, равные 1, 2, $\ldots$, n. Если одно из чисел a и b отлично от нуля, то трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при таких x принимает по крайней мере $n/2$ различных значений. Эти

значения заключены между 0 и $an^2+|b|n+c$. Количество различных точных четвёртых степеней, заключённых между 0 и $an^2+|b|n+c$, не превосходит $\sqrt[4]{an^2+|b|n+c}+1$. Поэтому $\sqrt[4]{an^2+|b|n+c}+1 \geqslant n/2$, т.е. $an^2+|b|n+ + c \geqslant \left(\frac{n}{2}-1\right)^4$. При очень больших n такое неравенство выполняться не может, поскольку $(n/2)^4$ будет гораздо больше, чем an^2.

б) Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда

$$f(x+1)-f(x)=\frac{\big(f(x+1)\big)^2-\big(f(x)\big)^2}{f(x+1)+f(x)}=\frac{a(2x+1)+b}{f(x+1)+f(x)},$$

поэтому $\lim_{x\to\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=\sqrt{a}$. При целом x число $f(x+1)-f(x)$ является целым, поэтому $\sqrt{a}=d$, где d — целое число. Кроме того, при целых $x\geqslant x_0$ разность $f(x+1)-f(x)$ должна быть равна своему предельному значению d. Положим $y=x_0+n$. Тогда $f(y)=f(x_0)+nd$ при всех натуральных n. Таким образом,

$$ay^2+by+c=\big(f(x_0)+nd\big)^2=\big(dy-dx_0+f(x_0)\big)^2$$

для всех $y=x_0+n$, n — натуральное. Но тогда такое равенство имеет место для всех y. Итак, $d=\sqrt{a}$ и $e=f(x_0)-dx_0$, где x_0 — любое целое число.

1.17. Согласно теореме Виета $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b$. При $n=1$ и $n=2$ требуемое равенство имеет вид $x_1+x_2=-a$ и $\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=\frac{1}{2}a^2-b$. Второе равенство легко проверяется. Предположим, что требуемое равенство доказано для всех натуральных чисел, не превосходящих $n-1$, где $n\geqslant 3$. Тогда

$$\frac{s_n}{n}=\frac{1}{n}(-as_{n-1}-bs_{n-2})=\frac{n-1}{n}\sum_m(-1)^{n+m}\frac{(n-m-2)!}{m!(n-2m-1)!}a^{n-2m}b^m+$$
$$+\frac{n-2}{n}\sum_m(-1)^{n+m-1}\frac{(n-m-3)!}{m!(n-2m-2)!}a^{n-2m-2}b^{m+1}.$$

Заменив $m+1$ на m, вторую сумму можно переписать в виде

$$\frac{n-2}{n}\sum_m(-1)^{n+m}\frac{(n-m-2)!}{(m-1)!(n-2m)!}a^{n-2m}b^m.$$

Далее,

$$\frac{(n-m-2)!(n-1)}{m!(n-2m-1)!n}+\frac{(n-m-2)!(n-2)}{(m-1)!(n-2m)!n}=$$
$$=\frac{(n-m-2)!}{(m-1)!(n-2m-1)!n}\left(\frac{n-1}{m}+\frac{n-2}{n-2m}\right)=\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}.$$

В результате получаем требуемое.

1.18. Если у квадратного трёхчлена нет корней, то все его значения одного знака. Если у квадратного трёхчлена ровно один корень, то все его значения одновременно неотрицательны или неположительны. Если квадратный

трёхчлен имеет корни x_1 и x_2, где $x_1 < x_2$, то его значения при $x < x_1$ и при $x > x_2$ имеют один знак, а при $x_1 < x < x_2$ — другой знак. Поэтому если квадратный трёхчлен в двух точках принимает значения разных знаков, то между этими точками лежит x_1 или x_2.

1.19. Пусть $f(x) = x^2 - 2ax - 2b$. По условию $\alpha^2 = -a\alpha - b$ и $\beta^2 = a\beta + \beta$, поэтому $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha^2 = 3\alpha^2$ и $f(\beta) = \beta^2 - 2\beta^2 = -\beta^2$. Значит, $f(\alpha)f(\beta) \leqslant 0$. Поэтому на отрезке $[\alpha, \beta]$ лежит по крайней мере один корень квадратного уравнения $x^2 - 2ax - 2b = 0$.

1.20. Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет вещественные корни x_1 и $x_1 + n + a$, где $a \geqslant 0$. Для определённости будем считать, что коэффициент при x^2 положителен. Положим $x_0 = x_1 + \frac{a}{2}$. Тогда $x_0 \geqslant x_1$ и $x_0 + n \leqslant x_2$. Поэтому $f(x_0) + f(x_0+1) + \ldots + f(x_0+n) < 0$. У квадратного трёхчлена $f(x) + \ldots + f(x+ + n)$ коэффициент при x^2 положителен, поэтому при достаточно больших x он принимает положительные значения.

1.21. При $x = x_1$ и при $x = x_2$ трёхчлен $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ принимает значения $-ax_1^2/2$ и $3ax_2^2/2$. Эти значения имеют разные знаки, поэтому один из корней трёхчлена расположен между x_1 и x_2.

1.22. Предположим, что $|f(x)| < 1/2$ при $|x| \leqslant 1$. Квадратный трёхчлен $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ в точках ± 1 и 0 принимает значения $1/2$ и $-1/2$. Поэтому $f(\pm 1) < g(\pm 1)$ и $f(0) > g(0)$. Значит, графики функций f и g пересекаются по крайней мере в двух точках: одна точка пересечения лежит на отрезке $[-1, 0]$, а вторая — на отрезке $[0, 1]$.

Покажем, что графики функций f и g пересекаются лишь в одной точке. Из равенства $x^2 + ax + b = x^2 - \frac{1}{2}$ следует, что $ax + b = -\frac{1}{2}$. Условие $f(0) > g(0)$ означает, в частности, что $b \neq 1/2$. Поэтому уравнение $ax + b = -\frac{1}{2}$ имеет единственное решение.

1.23. Достаточно доказать, что $ax^2 + bx + c \geqslant x^2 - \frac{1}{2}$ (для многочлена $-ax^2 - bx - c$ можно применить аналогичное неравенство).

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}$. Тогда $f(0) \geqslant g(0) = -1/2$ и $f(\pm 1) \leqslant g(\pm 1) = 1/2$. Поэтому графики функций f и g имеют две общие точки над отрезком $[-1, 1]$, а больше двух общих точек они иметь не могут (если только f и g не совпадают тождественно).

Если $f(\pm 1) < g(\pm 1)$, то неравенство $f(x) < g(x)$ будет выполняться и при $|x| \geqslant 1$. Нужно лишь более аккуратно рассмотреть случай, когда $f(1) = g(1)$ или $f(-1) = g(-1)$. Неприятности могли бы возникнуть, например, если $f(1) = g(1)$ и $f(x) \geqslant g(x)$ при всех x, достаточно близких к 1. Но тогда квадратный трёхчлен $f(x) - g(x)$ строго положителен при $x \neq 1$. В частности, $f(-1) > g(-1)$, чего не может быть.

1.24. Согласно задаче 1.23 $|ay^2 + by + c| \leqslant 2y^2 - 1$ при $|y| \geqslant 1$. Положим $y = 1/x$. Тогда

$$|cx^2 + bx + a| = \frac{1}{y^2}|ay^2 + by + c| \leqslant \frac{1}{y^2}(2y^2 - 1) \leqslant 2$$

при $|y| \geqslant 1$, т.е. при $0 < |x| \leqslant 1$. Для $x = 0$ неравенство тоже выполняется, поскольку оно выполняется для всех x, близких к нулю.

1.25. Предположим, что точка (x_0, y_0) принадлежит конике

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Любая прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), задаётся уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$ (или уравнением $x = x_0$, что соответствует $k = \infty$). Найдём вторую точку пересечения прямой и коники. Для этого подставим уравнение прямой в уравнение коники (т.е. заменим в уравнении коники y на $k(x - x_0) + y_0$) и вычислим коэффициенты A и B при x^2 и x (свободный член C нас интересовать не будет):

$$\begin{aligned} A &= a + bk + k^2; \\ B &= -bkx_0 + by_0 - 2ck^2x_0 + 2cky_0 + d + ke. \end{aligned}$$

Рассматриваемая прямая является касательной к конике тогда и только тогда, когда она пересекает конику только в точке (x_0, y_0).[1] Эквивалентное условие таково: $2x_0 = -B/A$, т.е.

$$k(bx_0 + 2cy_0 + e) = -(2ax_0 + by_0 + d).$$

Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$(x - x_0)(2ax_0 + by_0 + d) + (y - y_0)(bx_0 + 2cy_0 + e) = 0.$$

По условию точка (x_0, y_0) принадлежит конике, т.е. $ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0$. Воспользовавшись этим равенством, уравнение касательной можно записать в другом виде:

$$(2ax_0 + by_0 + d)x + (bx_0 + 2cy_0 + e)y + dx_0 + ey_0 + 2f = 0.$$

1.26. Непосредственно следует из задачи 1.25.

1.27. Пусть x_1 — общий корень данных уравнений. Вычитая одно уравнение из другого, получаем $(p_1 - p_2)x_1 = q_2 - q_1$. Если $p_1 = p_2$, то $q_1 = q_2$. Если же $p_1 \neq p_2$, то $x_1 = \dfrac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$. Подставив это выражение для x_1 в любое из двух квадратных уравнений, получим требуемое соотношение. При $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$ это соотношение тоже выполняется.

[1] Это утверждение не совсем точно. Например, прямые $x = x_0$ и $y = y_0$ пересекают гиперболу $xy = 1$ в одной точке, но не являются касательными. Но на самом деле эти прямые пересекают гиперболу ещё и в бесконечно удалённых точках. С учётом бесконечно удалённых точек утверждение верно.

Наоборот, пусть $(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - q_1 p_2) = 0$. Если $p_1 = p_2$, то $q_1 = q_2$; в этом случае уравнения совпадают, поэтому они имеют общий корень. Если $p_1 \neq p_2$, то положим $x_1 = \dfrac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$. Легко проверить, что $x_1^2 + p_1 x_1 + q_1 = 0$ и $x_1^2 + p_2 x_1 + q_2 = 0$.

1.28. Из условия, в частности, следует, что $p_1 \neq p_2$. Положим $x_1 = \dfrac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$. Тогда

$$x_1^2 + p_1 x_1 + q_1 = x_1^2 + p_2 x_1 + q_2 = \frac{(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - q_1 p_2)}{(p_1 - p_2)^2} < 0.$$

Это означает, что графики функций $f_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1$ и $f_2(x) = x^2 + p_2 x + q_2$ пересекаются в точке (x_1, y_1), где $y_1 < 0$. В таком случае квадратные трёхчлены $x^2 + p_1 x + q_1$ и $x^2 + p_2 x + q_2$ имеют вещественные корни и между корнями каждого из них лежит корень другого.

Глава 2.

Уравнения

2.1. Замена переменных

2.1. Решите уравнение

$$(x^2 - x - 1)^3 + (x^2 - 3x + 2)^3 = (2x^2 - 4x + 1)^3.$$

2.2. Решите уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$.

2.3. Решите уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$.

2.4. Решите уравнение $x^4 + ax^3 + (a + b)x^2 + 2bx + b = 0$.

2.5. Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = 1$.

2.2. Угадывание корней

2.6. Решите уравнение $\frac{(x^2 - x + 1)}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)}{a^2(a-1)^2}$, где $a > 1$.

2.7. Решите уравнение

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

2.8. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Найдите все положительные решения уравнения $x^n - nx + n - 1 = 0$.

2.3. Уравнения с радикалами

В задачах 2.9–2.15 предполагается, что значения квадратных корней неотрицательны. При этом нас интересуют только вещественные корни уравнений.

2.9. Решите уравнение $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$.

2.10. Решите уравнение

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$$

2.11. Решите уравнение

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}.$$

2.12. Решите уравнение $x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$.

2.13. Решите уравнение $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

2.14. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

2.15. Решите уравнение $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p$, где p — произвольное вещественное число.

2.4. Разные уравнения

2.16. Решите уравнение

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2.$$

2.17. Решите уравнение $x^3-[x]=3$, где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x.

Решения

2.1. Положим $u = x^2 - x - 1$ и $v = x^2 - 3x + 2$. Тогда рассматриваемое уравнение запишется в виде $u^3 + v^3 = (u + v)^3$, т.е. $3uv(u + v) = 0$. Остаётся решить три квадратных уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

2.2. Сделайте замену $y = x + \dfrac{1}{x}$.

2.3. Сделайте замену $y = x - \dfrac{1}{x}$.

2.4. Сделайте замену $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

2.5. Это уравнение эквивалентно уравнению $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Уравнение из задачи 2.4 при $a = 2$ и $b = -1$ принимает именно такой вид.

2.6. Рациональная функция $R(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)}{x^2(x-1)^2}$ переходит сама в себя при замене x на $1/x$ или на $1 - x$. Поэтому рассматриваемое уравнение имеет корни a, $1/a$, $1 - a$, $1/(1 - a)$, $1 - \dfrac{1}{a}$ и $a/(1 - a)$. При $a > 1$ все эти шесть чисел различны. Рассматриваемое уравнение имеет степень 6, поэтому у него не может быть более шести корней.

2.7. Ответ: $x = 1, 2, \ldots, n$. Равенство

$$1 - \frac{k}{1} + \frac{k(k-1)}{2!} - \ldots + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 2 \cdot 1}{k!} = (1-1)^k = 0$$

показывает, что числа $k = 1, 2, \ldots, n$ являются корнями данного уравнения. Больше n корней это уравнение иметь не может, поскольку его степень равна n.

2.8. Ответ: $x = 1$. Ясно, что

$$x^n - nx + n - 1 = (1 + x + \ldots + x^{n-1} - n)(x - 1).$$

Если $x > 1$, то $1 + x + \ldots + x^{n-1} - n > 0$, а если $0 < x < 1$, то $1 + x + \ldots + x^{n-1} - n < 0$.

2.9. Положим $y = \sqrt{x+4}$. Тогда $x = y^2 - 4$, поэтому $2x - 6 = 2y^2 - 14$. Таким образом, получаем уравнение $\sqrt{2y^2 - 14} + y = 5$. Перенесём y в правую часть и возведём обе части в квадрат. В результате получим уравнение $y^2 + 10y - 39 = 0$. Его корни 3 и -13. Но $y \geqslant 0$, поэтому остаётся только корень $y = 3$, которому соответствует $x = 5$. Легко проверить, что $x = 5$ действительно является корнем рассматриваемого уравнения.

2.10. Ясно, что $x \neq \pm 1$. Поэтому можно поделить обе части уравнения на $\sqrt[m]{1 - x^2} = \sqrt[m]{(1-x)(1+x)}$. В результате получим уравнение

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[m]{\frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Положим $z = \sqrt[m]{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Для z получаем квадратное уравнение $z^2 - z - 1 = 0$. Значит, $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. При этом $x = \dfrac{1 - z^m}{1 + z^m}$.

2.11. Выражение в левой части при увеличении x возрастает, а выражение в правой части убывает. Поэтому уравнение имеет не более одного решения. Легко проверить, что $x = 5$ — решение.

2.12. Если $x > 1$, то $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} > 3$, а если $x < 1$, то $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} < 3$. Остаётся только корень $x = 1$.

2.13. Избавляясь от радикалов, приходим к уравнению

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Относительно a это уравнение квадратное. Решая его, получаем два решения:

$$\begin{aligned} a &= x^2 + x + 1; \\ a &= x^2 - x. \end{aligned}$$

Решая эти квадратные уравнения относительно x, получаем четыре решения:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}; \\ x_{3,4} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

2.14. Ответ: $5 \leqslant x \leqslant 10$. Заметим, что

$$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 2)^2,$$
$$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 3)^2.$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1$$

(все корни мы считаем положительными). Рассмотрим по очереди все возможные случаи.

1. $\sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant 10$. В этом случае уравнение имеет единственное решение $x = 10$.

2. $\sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \leqslant 0$, т.е. $5 \leqslant x \leqslant 10$. Этом случае получаем тождество, т.е. если $5 \leqslant x \leqslant 10$, то x является корнем данного уравнения.

3. $\sqrt{x-1} - 2 \leqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \leqslant 0$, т.е. $x \leqslant 5$. Уравнение имеет единственное решение $x = 5$.

Случай, когда $\sqrt{x-1} - 2 \leqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \geqslant 0$, очевидно, невозможен.

2.15. Возведём обе части уравнения в куб:

$$2 + 3\sqrt[3]{1 - x^2}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}\right) = p^3.$$

Затем подставим p вместо $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}$. В результате получим уравнение $2+3p\sqrt[3]{1-x}=p^3$, откуда

$$x=\pm\sqrt{1-\left(\frac{p^3-2}{3p}\right)^2};$$

Эта формула имеет смысл при $p=-1$ и $0<p\leqslant 2$. Но при этом мы применяли неэквивалентные преобразования: потерять корни мы не могли, но могли приобрести лишние корни.

Проанализируем более детально наши преобразования. Положим $u=\sqrt[3]{1-x}$, $v=\sqrt[3]{1+x}$. Возведём обе части уравнения $u+v=p$ в куб (это эквивалентное преобразование). В результате получим $u^3+v^3+3uv(u+v)=p^3$. Подставим p вместо $u+v$. В результате получим $u^3+v^3+3uvp=p^3$, т.е. $(u+v)^3-p^3-3uv(u+v-p)=0$. Запишем $(u+v)^3-p^3$ по формуле для разности кубов: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Вынеся $(u+v-p)$ за скобку, получим уравнение

$$(u+v-p)(u^2+v^2+p^2+up+vp-uv)=0.$$

Лишние корни могут быть связаны только с уравнением $(u^2+v^2+p^2+up+vp-uv)=0$, т.е. $(u+p)^2+(v+p)^2+(u-v)^2=0$. Итак, лишние корни могут получиться только если $u=v=-p$, т.е $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=-p$. Эта система уравнений имеет единственное решение $x=0, p=-1$. Корень $x=0$ при $p=-1$ действительно лишний.

2.16. Ответ: $x=-2$ или $x\geqslant 2$.

Если $x\geqslant 2$, получаем тождество.

Если $1\leqslant x<2$, получаем уравнение $4x=8$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $0\leqslant x<1$, получаем уравнение $-2x=2$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $-1\leqslant x<0$, получаем $0=2$, чего не может быть.

Если $x<-1$, получаем корень $x=-2$.

2.17. Ответ: $x=\sqrt[3]{4}$.

Пусть $[x]=n$ и $x=n+\alpha$, где $0\leqslant\alpha<1$. Данное уравнение записывается в виде $x^3-x+\alpha=3$. Неравенство $0\leqslant\alpha<1$ показывает, что $2<x^3-x\leqslant 3$. Если $x\geqslant 2$, то $x(x^2-1)\geqslant 2\cdot 3=6$, поэтому в этом случае неравенство $x^3-x\leqslant 3$ не выполняется. Если $x<-1$, то $x(x^2-1)<0$, поэтому неравенство $2<x^3-x$ не выполняется. Таким образом, нас интересует случай, когда $-1\leqslant x<2$, т.е. $[x]=-1$, 0 или 1. Соответственно получаем уравнения $x^3+1=3$, $x^3=3$, $x^3-1=3$. Находим их решения: $x=\sqrt[3]{2}$, $x=\sqrt[3]{3}$, $x=\sqrt[3]{4}$. При этом $[\sqrt[3]{2}]\neq -1$, $[\sqrt[3]{3}]\neq 0$ и $[\sqrt[3]{4}]=1$, поэтому решением исходного уравнения является только $\sqrt[3]{4}$.

Глава 3.

Системы уравнений

3.1. Нахождение всех решений

В задачах 3.1–3.8 требуется найти все решения указанных систем уравнений.

3.1.

$$\begin{cases} x(y+z) & = & 35, \\ y(x+z) & = & 32, \\ z(x+y) & = & 27. \end{cases}$$

3.2.

$$\begin{cases} x+y+xy & = & 19, \\ y+z+yz & = & 11, \\ z+x+zx & = & 14. \end{cases}$$

3.3.

$$\begin{cases} 2y & = & 4-x^2, \\ 2x & = & 4-y^2. \end{cases}$$

3.4.

$$\begin{cases} x+y+z & = & a, \\ x^2+y^2+z^2 & = & a^2, \\ x^3+y^3+z^3 & = & a^3. \end{cases}$$

3.5.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-x_1x_2 & = & 0, \\ 1-x_2x_3 & = & 0, \\ 1-x_3x_4 & = & 0, \\ \dots & & \dots \\ 1-x_{n-1}x_n & = & 0, \\ 1-x_nx_1 & = & 0. \end{array}\right.$$

3.6.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3-y^3 & = & 26, \\ x^2y-xy^2 & = & 6. \end{array}\right.$$

3.7.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3xyz-x^3-y^3-z^3 & = & b^3, \\ x+y+z & = & 2b, \\ x^2+y^2-z^2 & = & b^2. \end{array}\right.$$

3.8.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-2z^2 & = & 2a^2, \\ x+y+2z & = & 4(a^2+1), \\ z^2-xy & = & a^2. \end{array}\right.$$

3.2. Нахождение вещественных решений

В задачах 3.9–3.14 требуется найти все вещественные решения указанных систем уравнений.

3.9.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+xy & = & 2+3\sqrt{2}, \\ x^2+y^2 & = & 6. \end{array}\right.$$

3.10.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3+y^3 & = & 1, \\ x^4+y^4 & = & 1. \end{array}\right.$$

3.11.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2, \\ xy-z^2 & = & 1? \end{array}\right.$$

3.12.

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} & = & 3, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} & = & 0. \end{cases}$$

3.13.

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 & = & 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 & = & 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 & = & 3x_3, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 & = & 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 & = & 3x_5. \end{cases}$$

3.14.

$$\begin{cases} \dfrac{2x_1^2}{1 + x_1^2} & = & x_2, \\ \dfrac{2x_2^2}{1 + x_2^2} & = & x_3, \\ \dfrac{2x_3^2}{1 + x_3^2} & = & x_1. \end{cases}$$

3.3. Положительные решения

В задаче 3.15 требуется найти все положительные решения указанной системы уравнений.

3.15.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & x_3^2, \\ x_2 + x_3 & = & x_4^2, \\ x_3 + x_4 & = & x_5^2, \\ x_4 + x_5 & = & x_1^2, \\ x_5 + x_6 & = & x_2^2. \end{cases}$$

3.4. Количество решений системы уравнений

3.16. Система уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0, \\ (x - a)^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений системы уменьшается до трёх или до двух?

3.5. Линейные системы уравнений

3.17. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5 &= 1,\\ x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5 &= 2,\\ x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5 &= 3,\\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+8x_5 &= 4,\\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5 &= 5. \end{cases}$$

3.18. Решите систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5 &= 1,\\ x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5 &= 2,\\ x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5 &= 3,\\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+8x_5 &= 4,\\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5 &= 5. \end{cases}$$

3.19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 6,\\ x_2+x_3+x_4 &= 9,\\ x_3+x_4+x_5 &= 3,\\ x_4+x_5+x_6 &= -3,\\ x_5+x_6+x_7 &= -9,\\ x_6+x_7+x_8 &= -6,\\ x_7+x_8+x_1 &= -2,\\ x_8+x_1+x_2 &= 2. \end{cases}$$

3.20. Пусть a, b, c — попарно различные числа. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3 &= 0,\\ x+by+b^2z+b^3 &= 0,\\ x+cy+c^2z+c^3 &= 0. \end{cases}$$

3.21. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные числа. Докажите, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n &= 0, \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n &= 0, \\ a_1^2x_1 + \ldots + a_n^2x_n &= 0, \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + \ldots + a_n^{n-1}x_n &= 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение.

3.22. Найдите все решения системы уравнений

$$x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + y\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + z\left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) = 0,$$

где $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

3.23. Дано 100 чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} a_1 - 3a_2 + 2a_3 &\geqslant 0, \\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 &\geqslant 0, \\ a_3 - 3a_4 + 2a_5 &\geqslant 0, \\ \ldots & \quad \ldots \\ \ldots & \quad \ldots \\ a_{99} - 3a_{100} + 2a_1 &\geqslant 0, \\ a_{100} - 3a_1 + 2a_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Докажите, что все числа a_i равны между собой.

3.24. Решите систему

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} 10x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & = & 0, \\ & & 11x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & + & x_6 & & & = & 0, \\ & & & + & 15x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & + & 4x_6 & + & x_7 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & - & 3x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 0, \\ 6x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 17x_5 & + & x_6 & & & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & - & 16x_6 & + & 2x_7 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & & & + & 19x_7 & = & 0. \end{array}$$

3.25. Докажите, что система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= a, \\ x_3 - x_4 &= b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

имеет хотя бы одно положительное решение

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0,\ x_4 > 0$$

тогда и только тогда, когда $|a| + |b| < 1$.

3.26. Имеется система уравнений

$$\begin{aligned} *x + *y + *z &= 0, \\ *x + *y + *z &= 0, \\ *x + *y + *z &= 0. \end{aligned}$$

Два человека поочерёдно вписывают вместо звёздочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

Решения

3.1. Данная система линейна относительно неизвестных $x_1 = yz$, $y_1 = xz$, $z_1 = xy$. Чтобы найти x_1, нужно сложить два последних уравнения и вычесть из них первое уравнение. В результате получим $x_1 = (32 + 27 - 35)/2 = 12$. После этого находим $y_1 = 15$ и $z_1 = 20$.

Итак, $yz = 12$, $xz = 15$, $xy = 20$. Поэтому $x^2 = \dfrac{(xy)(xz)}{yz} = \dfrac{20 \cdot 15}{12} = 25$, т.е. $x = \pm 5$. Кроме того, $y = 20/x = \pm 4$ и $z = 15/x = \pm 3$. В итоге получаем два решения (5, 4, 3) и (−5, −4, −3).

3.2. Данную систему можно переписать в виде $x_1 y_1 = 20$, $y_1 z_1 = 12$, $x_1 z_1 = 15$, где $x_1 = x + 1$, $y_1 = y + 1$, $z_1 = z + 1$. Поэтому $(x_1, y_1, z_1) = (5,\ 4,\ 3)$ или $(-5,\ -4,\ -3)$, т.е. $(x,\ y,\ z) = (4,\ 3,\ 2)$ или $(-6,\ -5,\ -4)$.

3.3. Вычтя из первого уравнения второе, получим $2(y - x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. Значит, либо $y = x$, либо $y + x = 2$. Если $y = x$, то $2x = 4 - x^2$, т.е. $x = -1 \pm \sqrt{5}$. Если $y + x = 2$, то $2(2 - x) = 4 - x^2$, т.е. $x^2 = 2x$. В результате получаем четыре решения: $(-1 + \sqrt{5},\ -1 + \sqrt{5})$, $(-1 - \sqrt{5},\ -1 - \sqrt{5})$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 0)$.

3.4. Ответ: $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$ и $(a, 0, 0)$.

Тождество $(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + xz)$ показывает, что

$$xy + yz + xz = 0. \tag{1}$$

Тождество $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$ показывает, что $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$. Учитывая равенство (1), получаем $3xyz = 0$. Если $x = 0$, то равенство (1) показывает, что $yz = 0$. Поэтому либо $y = 0$ и $z = a$, либо $z = 0$ и $y = a$. Аналогично разбираются остальные варианты. В итоге получаем следующие решения: $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$ и $(a, 0, 0)$.

3.5. Ответ:$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \pm 1$ при нечётном n, $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = a$ и $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ при чётном n.

Пусть n нечётно. Ясно, что $x_2 \neq 0$, поэтому из первого и второго уравнений получаем $x_1 = x_3$. Из второго и третьего уравнений получаем $x_2 = x_4$ и т.д. Кроме того, из первого и последнего уравнений получаем $x_n = x_2$. В итоге получаем $x_1 = x_3 = \ldots = x_n = x_2 = x_4 = \ldots = x_{14}$. Поэтому из первого уравнения получаем $x_1^2 = 1$, т.е. $x_1 = \pm 1$. Очевидно, что оба указанных в ответе набора неизвестных действительно являются решениями системы.

При чётном n точно так же получаем $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_{n-2}$ и $x_2 = x_n$. Очевидно, что указанные в ответе наборы неизвестных являются решениями данной системы уравнений.

3.6. Пусть $y = kx$. Сразу отметим, что $k \neq 1$. Из уравнений

$$\begin{aligned} x^3 - k^3x^3 &= 26, \\ kx^3y - k^2x^3 &= 6 \end{aligned}$$

получаем $x^3 = \dfrac{26}{1-k^3}$ и $x^3 = \dfrac{6}{k-k^2}$. Следовательно,

$$\frac{26}{1-k^3} = \frac{6}{k-k^2}.$$

Это уравнение можно умножить на $1-k$. В результате получим

$$\frac{26}{1+k+k^2} = \frac{6}{k},$$

откуда $k = 3$ или $\dfrac{1}{3}$. Поэтому $x^3 = -1$ или $x^3 = 27$. В итоге получаем следующие решения: $(-1, -3)$, $\left(\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3})\right)$, $(3, 1)$, $\left(\dfrac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})\right)$.

3.7. Рассмотрим сначала случай, когда $b = 0$. В этом случае последние два уравнения запишутся в виде $z = -x - y$ и $z^2 = x^2 + y^2$. Возведя первое из них в квадрат, получим $xy = 0$. Значит, $x = 0$, $z = -y$ или $y = 0$, $z = -x$. Первое уравнение исходной системы при этом выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда $b \neq 0$. Воспользуемся тождеством

$$3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = (x+y+z)(xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2).$$

Из первого и второго уравнений следует, что $xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2 = \dfrac{b^2}{2}$. Возведя в квадрат уравнение $x + y + z = 2b$, получим $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 4b^2$. Следовательно, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ и $xy + yz + xz = \dfrac{3}{2}b^2$. Сравнивая первое из этих уравнений с последним уравнением исходной системы, получаем $z = 0$. Таким образом, $x^2 + y^2 = b^2$ и $xy = \dfrac{3}{2}b^2$. Решая эту систему уравнений, находим $x = \left(1 \pm \sqrt{\dfrac{-1}{2}}\right)b$, $y = \left(1 \mp \sqrt{\dfrac{-1}{2}}\right)b$.

3.8. Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 2z^2+2a^2, \\ x+y &= 4(a^2+1)-2z, \\ -xy &= a^2-z^2. \end{cases}$$

Второе уравнение возведём в квадрат, прибавим к нему третье уравнение, умноженное на 2, и вычтем первое уравнение. В результате получим:

$$0 = 16(a^2+1)^2 - 16(a^2+1)z,$$

т.е. $z = a^2+1$. Теперь второе и третье уравнения записываются так:

$$\begin{cases} x+y &= 2(a^2+1), \\ xy &= a^4+a^2+1. \end{cases}$$

Решение этой системы сводится к решению квадратного уравнения; решая его, находим

$$x = a^2 \pm a + 1, \quad y = a^2 \mp a + 1.$$

3.9. Пусть $u = x+y$ и $v = xy$. Тогда $u+v = 2+3\sqrt{2}$ и $u^2-2v = 6$, поэтому $u^2+2u = 6+2(2+3\sqrt{2}) = 10+6\sqrt{2}$. Значит, $u = -1 \pm \sqrt{11+6\sqrt{2}} = -1 \pm (3 + \sqrt{2})$, т.е. $u = 2+\sqrt{2}$ или $-4-\sqrt{2}$. При этом $v = 2+3\sqrt{2}-u = 2\sqrt{2}$ или $6+4\sqrt{2}$. Если $u = -4-\sqrt{2}$ и $v = 6+4\sqrt{2}$, то $(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy = (4 + \sqrt{2})^2 - 4(6+4\sqrt{2}) < 0$. Поэтому $x+y = 2+\sqrt{2}$ и $xy = \sqrt{2}$. Эта система уравнений имеет два решения: $(x,y) = (2, \sqrt{2})$ или $(\sqrt{2}, 2)$. Оба они являются решениями исходной системы уравнений.

3.10. Если $x = 0$ или ± 1, то $y = \pm 1$ или 0. Ясно также, что $x \neq -1$ и $y \neq -1$. Поэтому решений такого вида ровно два: $x = 0$, $y = 1$ и $x = 1$, $y = 0$. Покажем, что других решений нет.

Нас интересует случай, когда $0 < |x|, |y| < 1$. В таком случае $|x|^3 + |y|^3 < x^4+y^4 = 1$. Поэтому если числа x и y оба положительны, то решений нет. Если оба эти числа отрицательны, то решений тоже нет. Пусть теперь, например, $x > 0$ и $y < 0$. Тогда $x^3+y^3 < x^3 < 1$. В этом случае решений тоже нет.

3.11. Из второго уравнения следует, что $xy \geqslant 1$. Числа x и y не могут быть оба отрицательны, поскольку их сумма равна 2. Значит, числа x и y положительны и $x+y \geqslant 2\sqrt{xy} \geqslant 2$, причём равенство $x+y = 2$ возможно лишь в том случае, когда $x = y = 1$. В таком случае $z = 0$.

3.12. Умножим первое уравнение на x, второе на y и сложим полученные уравнения. В результате получим $2xy-1 = 3y$. В частности, $y \neq 0$, поэтому $x = \frac{3}{2}+\frac{1}{2y}$. Подставив это выражение во второе уравнение, после несложных преобразований получим $4y^4-3y^2-1 = 0$. Учитывая, что $y^2 \geqslant 0$, получаем $y^2 = 1$, т.е. $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Этим значениям y соответствуют $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

3.13. После циклической перенумерации неизвестных можно считать, что $x_1 \geqslant x_i$ $(i = 2, 3, 4, 5)$. Функция $f(x) = x^5$ монотонно возрастающая, поэтому $3x_2 = (x_4+x_5+x_1) \geqslant (x_3+x_4+x_5)^5 = 3x_1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_1$. Кроме того, $3x_4 = (x_1+x_2+x_3)^5 \geqslant (x_5+x_1+x_2)^5 = 3x_3$. Значит, $x_4 = x_3$ и $x_5 = x_3$.

Мы получили, что $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x$. Это число x должно удовлетворять уравнению $(3x)^5 = 3x$. Получаем три решения: $x = 0$ или $\pm 1/3$.

3.14. У рассматриваемой системы есть решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ясно также, что если одно из чисел x_1, x_2, x_3 равно нулю, то равны нулю и остальные два числа. Поэтому будем предполагать, что $x_1x_2x_3 \neq 0$. Тогда уравнения можно записать в виде $1 + \frac{1}{x_1^2} = \frac{2}{x_2}$, $1 + \frac{1}{x_2^2} = \frac{2}{x_3}$, $1 + \frac{1}{x_3^2} = \frac{2}{x_1}$. Сложив эти уравнения, получаем

$$\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_3}\right)^2 = 0.$$

Значит, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

3.15. Пусть $x_{\min} = x_i$ — наименьшее из чисел $x_1, \ldots, x_5$, $x_{\max} = x_j$ — наибольшее. Тогда $x_{\min}^2 = x_{i-2} + x_{i-1} \geqslant 2x_{\min}$ и $x_{\max}^2 = x_{j-2} + x_{j-1} \leqslant 2x_{\max}$. Числа $x_{\min}$ и $x_{\max}$ положительны, поэтому $x_{\min} \geqslant 2 \geqslant x_{\max}$. Следовательно, $x_{\min} = x_{\max} = 2$.

3.16. О т в е т: число решений уменьшается до трёх при $a = \pm 1$, число решений уменьшается до двух при $a = \pm\sqrt{2}$.

Из первого уравнения получаем $y = \pm x$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$(x-a)^2 + x^2 = 1. \qquad (1)$$

Число решений системы уменьшается до трёх, если одно из решений уравнения (1) обращается в нуль. Подставив в (1) $x = 0$, получим $a^2 = 1$, т.е. $a = \pm 1$. Число решений системы уменьшается до двух, если уравнение (1) имеет единственный корень (т.е. два совпадающих корня). Приравнивая нулю дискриминант уравнения (1), получаем $a = \pm\sqrt{2}$.

3.17. Вычтем из последнего уравнения предпоследнее. Получим $x_5 = 1$. Затем из предпоследнего уравнения вычтем предшествующее ему и т.д. В результате получим $x_4 + 2x_5 = 1$, $x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$, $x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$. Поэтому $x_4 + x_5 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$, т.е. $x_1 = x_3 = x_5 = 1$ и $x_2 = x_4 = -1$.

3.18. О т в е т: $x_1 = x_3 = x_5 = 1$, $x_2 = x_4 = -1$.

Запишем сначала первое уравнение, потом второе, из которого вычтено

первое, потом третье, из которого вычтено второе, и т.д.:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_5 & = & 1. \end{cases}$$

Теперь можно последовательно найти x_5, x_4, x_3, x_2, x_1.

3.19. Ответ: $x_1 = -x_8 = 1$, $x_2 = -x_2 = 2$, $x_3 = -x_6 = 3$, $x_4 = -x_5 = 4$.

Сложив все уравнения, получим $3(x_1 + x_2 + \ldots + x_8) = 0$. Затем сложим первое уравнение, четвёртое и седьмое. В результате получим $2x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = 1$, а значит, $x_1 = 1$. Остальные неизвестные находятся аналогично.

3.20. Рассмотрим многочлен $P(t) = t^3 + t^2z + ty + x$. Попарно различные числа a, b, c являются корнями многочлена $P(t)$. Поэтому $P(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$, а значит, $x = -abc$, $y = ab + bc + ca$, $z = -(a+b+c)$.

3.21. Пользуясь тем, что числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно различны, построим многочлен $P(t)$, который равен 0 при $t = a_2, \ldots, a_n$ и равен 1 при $t = a_1$. Для этого положим $P(t) = \lambda(t - a_2)\ldots(t - a_n)$, где $\lambda(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n) = 1$, т.е. $\lambda = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n)}$.

Запишем многочлен $P(t)$ в виде $P(t) = p_0 + p_1t + \ldots + p_{n-1}t^{n-1}$. Умножим первое уравнение из рассматриваемой системы на p_0, второе на $p_1, \ldots$, последнее на p_{n-1}. Сложив все эти уравнения, получим $P(a_1)x_1 + P(a_2)x_2 + \ldots + P(a_n)x_n = 0$, т.е. $x_1 = 0$. Аналогично доказывается, что $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Замечание. *Более общее утверждение доказано в решении задачи 10.34.*

3.22. Ответ: $y = -3x$, $z = 2x$ (x — произвольное число).

Докажем, что указанная бесконечная система уравнений эквивалентна системе двух уравнений:

$$x + y + z = 0,$$
$$4x + 2y + z = 0.$$

Во-первых, если мы вычтем из первого уравнения второе уравнение, умноженное на $\dfrac{1}{2^{n+2}}$, то получим n-е уравнение исходной системы. Во-вторых, уже из первых двух уравнений исходной системы

$$x\left(1 - \frac{1}{2}\right) + y\left(1 - \frac{1}{4}\right) + z\left(1 - \frac{1}{8}\right) = 0,$$
$$x\left(1 - \frac{1}{4}\right) + y\left(1 - \frac{1}{8}\right) + z\left(1 - \frac{1}{16}\right) = 0$$

следуют указанные два уравнения. Действительно, вычтя из первого уравнения второе, получим $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{16} = 0$. Прибавив это уравнение ко второму уравнению, получим $x + y + z = 0$.

3.23. Сложим все эти неравенства. Коэффициент при a_k окажется равным $1-3+2 = 0$. Таким образом, у нас есть набор неотрицательных чисел $a_1-3a_2+ +2a_3, \ldots,$ сумма которых равна 0. Значит, каждое из чисел равно 0, т.е. у нас есть система не неравенств, а уравнений. Эти уравнения удобно переписать в виде

$$\begin{array}{rcl} (a_1 - a_2) + 2(a_3 - a_2) & = & 0, \\ (a_2 - a_3) + 2(a_4 - a_3) & = & 0, \\ \ldots & & \ldots \\ (a_{100} - a_1) + 2(a_2 - a_1) & = & 0. \end{array}$$

Из этих уравнений последовательно получаем $a_2 - a_3 = (a_1 - a_2)/2$, $a_3 - a_4 = = (a_2 - a_3)/2 = (a_1 - a_2)/2^2$, $\ldots$, $a_1 - a_2 = (a_{100} - a_1)/2 = (a_1 - a_2)/2^{100}$. Последнее равенство возможно лишь при $a_1 = a_2$. Но тогда $a_2 = a_3$, $a_3 = a_4$, $\ldots$, $a_{100} = a_1$.

3.24. Ответ: $x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 0$.

Запишем уравнения рассматриваемой системы в виде $\sum_{i=1}^{7} a_{ij} x_i = 0$. Коэффициенты a_{ij} обладают следующим свойством: $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ для каждого j. Пусть $x_1, \ldots, x_7$ — решение рассматриваемой системы. Предположим, что хотя бы одно из чисел $x_1, \ldots, x_7$ отлично от нуля. Пусть x_k — наибольшее по абсолютной величине из этих чисел. Тогда $|a_{kk} x_k| > |\sum_{i \neq k} a_{ik} x_i|$, поэтому равенство $\sum_{i=1}^{7} a_{ik} x_i = 0$ не может выполняться. Приходим к противоречию.

3.25. Если $a \geqslant 0$, то запишем первое уравнение в виде $x_1 = x_2 + a$, а если $a < 0$, то запишем его в виде $x_2 = x_1 - a$. Во втором случае сделаем замену $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$. Таким образом, можно считать, что $x_1 = x_2 + a$ и $a \geqslant 0$. Аналогично можно считать, что $x_3 = x_4 + b$ и $b \geqslant 0$. Поэтому если данная система имеет положительное решение, то $1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_2 + 2x_4 + +a+b > a+b$ (если хотя бы одно их чисел a, b отрицательное, то мы получаем неравенство $1 > |a| + |b|$).

Предположим теперь, что $a+b < 1$, причём числа a и b неотрицательные. Тогда можно положить $x_2 = x_4 = (1 - a - b)/4$, $x_1 = x_2 + a$, $x_3 = x_4 + b$. В результате получим положительное решение данной системы.

3.26. Начинающий первым ходом записывает произвольный коэффициент при z в первом уравнении. Затем на ход второго он отвечает следующим образом. Если второй записывает какой-то коэффициент при x или при y, то первый записывает в том же самом уравнении при y или при x такой же коэффициент. Если же второй записывает какой-то коэффициент при z, то первый записывает произвольный коэффициент при z в оставшемся уравнении. Полученная система имеет решение $(1, -1, 0)$.

Глава 4.

Делимость

4.1. Чёт и нечёт

4.1. Можно ли в равенстве $1*2*3*\ldots*10=0$ вместо звёздочек поставить знаки плюс и минус так, чтобы получилось верное равенство?

4.2. Докажите, что количество различных делителей натурального числа n (включая 1 и само число) нечётно тогда и только тогда, когда это число является полным квадратом.

4.3. Пусть $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ — целые числа, $b_1, \ldots, b_{2n+1}$ — те же самые числа, но записанные в другом порядке. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a_k - b_k$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, чётно.

4.4. Пусть a, b, c — целые числа, причём $a \neq 0$. Докажите, что если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет рациональный корень, то по крайней мере одно из чисел a, b, c чётно.

4.5. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

принимающий при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, не имеет целых корней.

4.6. Даны два многочлена от переменной x с целыми коэффициентами. Произведение их есть многочлен от переменной x с чётными коэффициентами, не все из которых делятся на 4. Докажите, что в одном из многочленов все коэффициенты чётные, а в другом — хоть один нечётный.

4.7. В числовом треугольнике каждое число равно сумме трёх чисел предыдущей строки:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \end{array}$$

Докажите, что в каждой строке, начиная с 3-й, найдутся чётные числа.

4.2. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики

Натурально число $p > 1$ называют *простым*, если его нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел, каждое из которых отлично от 1. Натуральное число $n > 1$ называют *составным*, если оно не простое. Если натуральное число n составное, то $n = n_1n_2$, где $n_1 < n$ и $n_2 < n$. Поэтому любое натуральное число $n > 1$ можно разложить на простые множители. Это утверждение составляет лёгкую часть так называемой *основной теоремы арифметики*. Трудная часть основной теоремы арифметики — однозначность такого разложения (с точности до перестановки множителей). Чтобы её доказать, можно воспользоваться алгоритмом Евклида, который часто бывает полезен и в других ситуациях.

Пусть a и b — натуральные числа, причём $a \leqslant b$. Тогда существуют целые неотрицательные числа q и r, для которых $b = qa + r$ и $r < a$ (деление с остатком). *Алгоритм Евклида* заключается в следующем. Пусть a_0 и a_1 — натуральные числа, причём $a_0 \geqslant a_1$. Поделим a_0 на a_1 с остатком: $a_0 = q_1a_1 + a_2$; затем поделим a_1 на a_2 с остатком $a_1 = q_2a_2 + a_3$, и т.д. В конце концов получим $a_{k-1} = q_ka_k$. Все числа a_0, a_1, …, a_k имеют вид $ma_0 + na_1$, где m и n — целые числа. Поэтому, в частности, a_k делится на любой общий делитель чисел a_0 и a_1. С другой стороны, $a_{k-2} = q_{k-1}a_{k-1} + a_k = (q_{k-1}q_k + 1)a_k$, и т.д, поэтому числа a_0 и a_1 делятся на a_k. Это означает, что a_k — наибольший общий делитель чисел a_0 и a_1. В частности, наибольший общий делитель чисел a_0 и a_1 можно представить в виде $ma_0 + na_1$, где m и n — целые числа. Алгоритм Евклида — это алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Наибольший общий делитель чисел a и b мы будем обозначать НОД(a, b).

4.8. Пусть $a = bc$ и НОД$(a, b) = 1$. Докажите, что c делится на a.

4.9. Докажите основную теорему арифметики.

4.10. Докажите, что дробь $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ несократима ни при каких натуральных n.

4.11. Последовательность чисел $a_0 = 0$, a_1, a_2, ... такова, что $a_n > 0$ при $n > 0$ и НОД(a_m, a_n) = НОД(a_{m-n}, a_n) для любых $m > n \geqslant 1$. Докажите, что НОД$(a_m, a_n) = a_d$, где $d =$ НОД(m, n).

4.12. Докажите, что для любого натурального a и любых натуральных m и n НОД$(a^m - 1, a^n - 1) = a^d - 1$, где $d =$ НОД(m, n).

4.3. Разложения на простые множители

4.13. Пусть p/q — несократимая дробь, p и q — натуральные числа. Положим $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p^2q^2}{q_1 \dots q_n}$, где q_1, ..., q_n — различные простые делители числа q. Докажите, что f — взаимно однозначное отображение множества положительных рациональных чисел на множество всех натуральных чисел.

4.4. Признаки делимости

4.14. Пусть $a_na_{n-1}\dots a_1a_0$ — десятичная запись некоторого числа.

а) Докажите, что это число делится на 3 тогда и только тогда, когда $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ делится на 3.

б) Докажите, что это число делится на 9 тогда и только тогда, когда $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ делится на 9.

в) Докажите, что это число делится на 11 тогда и только тогда, когда $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^na_n$ делится на 11.

4.15. В десятичной записи целого числа есть 300 единиц, а остальные цифры нули. Может ли это число быть полным квадратом?

4.16. Имеются семь жетонов с цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное посредством этих жетонов, не делится на другое.

4.17. Пусть $a_na_{n-1}\dots a_1a_0$ — десятичная запись некоторого числа. Заменим это число на $a_na_{n-1}\dots a_1 + 2a_0$. Полученное число снова преобразуем по такому же правилу и т.д. до тех пор, пока не получится

число, не превосходящее 19. Докажите, что исходное число делится на 19 тогда и только тогда, когда в итоге получается 19.

4.18. Пусть $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ — десятичная запись некоторого числа. Заменим это число на $a_n a_{n-1} \dots a_1 - 2a_0$. Докажите, что исходное число делится на 7 тогда и только тогда, когда полученное число делится на 7.

4.5. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

4.19. а) Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = \dfrac{ab}{\text{НОК}(a, b)}$.

б) Докажите, что $\text{НОД}(a, b, c) = \dfrac{abc\,\text{НОК}(a, b, c)}{\text{НОК}(a, b)\,\text{НОК}(b, c)\,\text{НОК}(c, a)}$. (Общая формула приведена в задаче 14.23.)

б) Докажите, что $\text{НОК}(a, b, c) = \dfrac{abc\,\text{НОД}(a, b, c)}{\text{НОД}(a, b)\,\text{НОД}(b, c)\,\text{НОД}(c, a)}$.

4.20. Докажите, что $\text{НОД}(a, \text{НОД}(b, c)) = \text{НОД}(\text{НОД}(a, b), c) = \text{НОД}(a, b, c)$.

4.21. Докажите, что $\dfrac{\text{НОК}(a, a+b)}{\text{НОК}(a, b)} = \dfrac{a+b}{b}$.

4.22. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что $\text{НОД}(a+b, a^2+b^2) = 1$ или 2.

4.23. Докажите, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.

4.24. Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ не меньше na_1.

4.25. Функция $f(a, b)$, определённая для всех натуральных a и b, обладает следующими свойствами: (1) $f(a, a) = a$; (2) $f(a, b) = f(b, a)$; (3) $(a+b)f(a, b) = bf(a, a+b)$. Докажите, что $f(a, b) = \text{НОК}(a, b)$.

4.26. Имеется несколько чисел, каждое из которых меньше натурального числа $N \geqslant 4$. Наименьшее общее кратное любых двух из них больше N. Докажите, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

4.6. Делимость нацело

4.27. Докажите, что $7^{2n} - 5^{2n}$ делится на 24.

4.28. Докажите, что $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ — целое число для любого натурального n.

4.29. При каких целых n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

4.30. Докажите, что если при любом натуральном $k \neq b$ число $a - k^n$ делится на $b - k$, то $a = b^n$. (Здесь a, b, n — фиксированные натуральные числа.)

4.31. Докажите, что если $2^n - 2$ делится на n, то $2^{2^n-1} - 2$ делится на $2^n - 1$.

4.32. Пусть a, b, m и n — натуральные числа, причём a взаимно просто с b и $a > 1$. Докажите, что $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$ тогда и только тогда, когда $m = kn$, где k — нечётное число.

* * *

4.33. а) Докажите, что число $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не может быть целым.

б) Докажите, что число $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{k+n}$, где k и n — натуральные числа, не может быть целым.

4.34. Докажите, что следующие числа являются целыми:

а) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$; б) $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$;

в) $\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$; г) $\frac{(3m+3n)!(3n!)(2m)!(2n)!}{(2m+3n)!(m+2n)!m!(n!)^2(m+n)!}$.

4.7. Делимость на степень простого числа

4.35. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

4.36. Пусть p — простое число и a — наибольшее целое число, для которого $n!$ делится на p^a. Докажите, что

$$a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

4.37. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.

4.38. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число $(n+1)(n+2)\ldots 2n$.

* * *

4.39. Найдите все натуральные n, для которых $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ — конечные десятичные дроби.

4.40. а) Докажите, что для любого нечётного числа a и любого натурального числа m существует бесконечно много натуральных чисел k, для которых $a^k - 1$ делится на 2^m.

б) Докажите, что для любого нечётного числа a существует лишь конечное число натуральных чисел m, для которых $a^m - 1$ делится на 2^m.

4.41. Найдите все натуральные n, для которых: а) $3^n - 1$ делится на 2^n; б) $31^n - 1$ делится на 2^n.

4.8. Остатки от деления

4.42. Какие остатки может давать квадрат целого числа при делении на: а) 3, б) 4, в) 5, г) 8?

4.43. Найдите наименьшее натуральное число, которое:

а) При делении на 5 даёт остаток 4, при делении на 6 — остаток 5, а при делении на 7 — остаток 6.

б) При делении на 5 даёт остаток 4, при делении на 6 — остаток 5, а при делении на 8 — остаток 7.

4.44. Найдите число, которое:

а) При делении на 5 даёт остаток a, а при делении на 6 — остаток b.

б) При делении на 5 даёт остаток a, при делении на 6 — остаток b, а при делении на 7 — остаток c.

4.45. а) Число n при делении на 4 даёт остаток 3. Докажите, что n нельзя представить в виде суммы двух квадратов целых чисел.

б) Число n при делении на 8 даёт остаток 7. Докажите, что n нельзя представить в виде суммы трёх квадратов целых чисел.

4.46. Найдите четырёхзначное число, которое при делении на 131 даёт в остатке 112, а при делении на 132 даёт в остатке 98.

4.47. Допишите к 523... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

4.48. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$10^{10} + 10^{(10^2)} + 10^{(10^3)} + \ldots + 10^{(10^{10})}.$$

4.49. Пусть числа $m_1, \ldots, m_k$ попарно взаимно простые и $m = m_1 \ldots m_k$. Докажите, что для любых целых чисел $a_1, \ldots, a_k$ система сравнений $x \equiv a_i \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$, имеет решение, причём если x_1 и x_2 — два решения, то $x_1 - x_2$ делится на m (*китайская теорема об остатках*).

4.50. Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n - 1$ делится на 7.

4.51. Пусть p — простое число. Предположим, что дано r натуральных чисел $a_1, \ldots, a_r$, меньших p. Докажите, что если $r < p$, то из данных чисел можно составить по крайней мере $r + 1$ сумм, дающих разные остатки при делении на p (допускается и сумма «пустого множества» слагаемых, которая считается равной нулю).

4.52. Докажите, что из любых $2n - 1$ целых чисел можно выбрать ровно n чисел, сумма которых делится на n.

4.9. Взаимно простые числа

Натуральные числа m и n называют *взаимно простыми*, если $\text{НОД}(m, n) = 1$.

4.53. Докажите, что ни для какого натурального n число $n(n+1)$ не может быть степенью натурального числа.

4.54. а) Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ есть хотя бы одно число взаимно простое с остальными четырьмя из этих чисел.

б) Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+9$ есть число, хотя бы одно, взаимно простое с остальными девятью из этих чисел.

4.55. Пусть n и m — различные натуральные числа. Докажите, что числа $F_n = 2^{2^{n-1}}$ и $F_m = 2^{2^{m-1}}$ взаимно простые.

4.10. Простые числа

4.56. Докажите, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 даёт в остатке 1.

4.57. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел (*Евклид*).

4.58. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k - 1$.

4.59. а) Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то число n тоже простое.

б) Докажите, что если число $2^n + 1$ простое, то $n = 2^k$.

4.60. Докажите, что при любом натуральном n число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ имеет не менее n различных простых делителей.

4.11. Арифметика остатков

4.61. Докажите, что остатки от деления на n чисел $a \pm b$ и ab однозначно задаются остатками от деления на n чисел a и b.

4.62. Пусть p — простое число, а число a не делится на p. Докажите, что все остатки от деления на p чисел a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$ попарно различны, т.е. каждое число от 1 до $p - 1$ встречается среди этих остатков ровно один раз.

4.63. Докажите, что если p — простое число, а числа a и b не делятся на p, то остаток от деления на p числа a однозначно определяется остатками от деления чисел b и ab на p.

Решения

4.1. Ответ: нельзя. Чётность числа $1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 10$ не зависит от выбора знаков; она зависит только от того, сколько в этом выражении нечётных чисел. В этом выражении 5 нечётных чисел, поэтому оно всегда будет нечётно.

4.2. Сопоставим делителю d числа n делитель n/d. Если для всех d числа d и n/d разные (т.е. $n \neq d^2$), то делители числа n разбиваются на пары, поэтому их чётное число. Если же $n = d^2$, то все делители, отличные от d, разбиваются на пары, поэтому их нечётное число.

4.3. Предположим, что все числа $a_k - b_k$ нечётны. Тогда число $(a_1 - b_1) + \ldots + (a_{2n+1} - b_{2n+1})$ тоже нечётно (сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна). Но это число равно 0, поскольку $a_1 + \ldots + a_{2n+1} = b_1 + \ldots + b_{2n+1}$.

4.4. Предположим, что числа a, b, c нечётны и $ax^2 + bx + c = 0$ для некоторого рационального числа $x = m/n$, где числа m и n взаимно простые. Из равенства $am^2 + bmn + cn^2 = 0$ следует, что число $m^2 + mn + n^2$ чётно. Но числа m и n либо оба нечётны, либо одно из них чётно, а другое нечётно. В обоих случаях число $m^2 + mn + n^2$ нечётно.

4.5. Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. По условию числа $a_n = P(0)$ и $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = P(1)$ нечётны. Если x — чётное число, то $P(x) \equiv a_n \pmod 2$. Если x — нечётное число, то $P(x) \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 2$. В обоих случаях получаем, что число $P(x)$ нечётно, поэтому оно не может быть равно нулю.

4.6. Из того, что не все коэффициенты произведения делятся на 4, следует, что у одного многочлена есть нечётный коэффициент. Нужно доказать, что у другого многочлена нет нечётных коэффициентов. Предположим, что у обоих многочленов есть нечётные коэффициенты. Заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2. В результате получим многочлены $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + x^r$ и $b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + x^s$. Если в произведении данных многочленов мы заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2, то получим многочлен $a_nb_mx^{n+m} + \ldots + x^{r+s}$. Таким образом в произведении данных многочленов коэффициент при x^{r+s} нечётен, что противоречит условию.

4.7. Выпишем в каждой строке, начиная с третьей, первые четыре числа, заменив каждое чётное число на 0, а нечётное — на 1:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
. & . & . & . & & & &
\end{array}
$$

Пятая выписанная строка совпала с первой, поэтому в дальнейшем первые четыре числа будут периодически повторяться. Остаётся заметить, что в каждой из первых пяти выписанных строк есть чётные числа.

4.8. Пусть m и n — натуральные числа, для которых $ma + nb = \text{НОД}(a, b) = 1$. Тогда $mac + nbc = c$, т.е. $a(mc + n) = c$. Это означает, что c делится на a.

4.9. Предположим, что $a = p_1 \ldots p_r = q_1 \ldots q_s$, где $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ — простые числа. Ясно, что либо $\text{НОД}(p_1, q_1) = 1$, либо $\text{НОД}(p_1, q_1) = p_1$ и $p_1 = q_1$. Если $\text{НОД}(p_1, q_1) = 1$, то согласно задаче 4.8 число $q_2 \ldots q_s$ делится

на p_1. Если при этом НОД$(p_1, q_2) = 1$, то число $q_3 \ldots q_s$ делится на p_1 и т.д. В конце концов получим $p_1 = q_i$. После этого доказательство завершается очевидной индукцией.

4.10. Найдём наибольший общий делитель чисел $21n + 4$ и $14n + 3$, пользуясь алгоритмом Евклида. Поделив $21n + 4$ на $14n + 3$, получим в остатке $7n + 1$. Поделив $14n + 3$ на $7n + 1$, получим в остатке 1. Значит, числа $21n + 4$ и $14n + 3$ взаимно простые.

4.11. Для любой пары натуральных чисел $\{m, n\}$, где $m > n$, последовательные операции $\{m, n\} \to \{m - n, n\}$ приводят к паре $\{d, 0\}$, где $d =$ $=$ НОД(m, n). Действительно, операция деления m на n с остатком состоит из нескольких таких операций.

4.12. Согласно задаче 4.11 достаточно проверить, что НОД$(a^m - 1, a^n - 1) =$ НОД$(a^{m-n} - 1, a^n - 1)$ для любых $m > n \geqslant 1$. Но $a^m - 1 = a^n(a^{m-n} - 1) + a^n - 1$ и числа a и $a^n - 1$ взаимно простые.

4.13. Пусть $p = p_1^{a_1} \ldots p_m^{a_m}$, $q = q_1^{b_1} \ldots q_n^{b_n}$. Тогда $f(p/q) =$ $= p_1^{2a_1} \ldots p_m^{2a_m} q_1^{2b_1 - 1} \ldots q_n^{2b_n - 1}$. Ясно, что каждое натуральное число представимо в таком виде ровно одним способом.

4.14. а) Число 10 при делении на 3 даёт остаток 1. Поэтому 10^k при делении на 3 тоже даёт остаток 1. Следовательно, $a_k 10^k$ при делении на 3 даёт остаток a_k.

б) Решение аналогично решению задачи а).

в) Число 10 при делении на 11 даёт остаток -1. Поэтому 10^k при делении на 11 даёт остаток $(-1)^k$. Следовательно, $a_k 10^k$ при делении на 11 даёт остаток $(-1)^k a_k$.

4.15. Это число делится на 3, но не делится на 9, поэтому оно не может быть полным квадратом.

4.16. Пусть a и b — семизначные числа, составленные посредством этих жетонов. Предположим, что a делится на b и $a \neq b$. Тогда $a - b$ тоже делится на b. Ясно, что $\frac{a - b}{b} \leqslant 7$. С другой стороны, $a - b$ делится на 9, а b не делится на 9. Поэтому $\frac{a - b}{b}$ делится на 9.

4.17. Мы заменяем число $10a + b$ на $a + 2b$. Для любого числа, большего 19, имеет место неравенство $9a > b$, т.е. $10a + b > a + 2b$. Поэтому при указанных преобразованиях число всегда уменьшается. Ясно, что $10a + b$ делится на 19 тогда и только тогда, когда $20a + 2b$ делится на 19, т.е. $a + 2b$ делится на 19.

4.18. Запишем исходное число в виде $10a + a_0$. Нужно доказать, что оно делится на 7 тогда и только тогда, когда $a - 2a_0$ делится на 7. Ясно, что $10a +$ $+ a_0$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $20a + 2a_0$ делится на 7. Остаётся заметить, что при делении на 7 число $20a + 2a_0$ даёт такой же остаток, как и число $-a + 2a_0$.

4.19. а) Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$. Тогда

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}},$$
$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}.$$

Поэтому доказательство можно провести для каждого простого множителя отдельно.

Если $a = p^\alpha$ и $b = p^\beta$, причём $\alpha \leqslant \beta$, то $\text{НОД}(a, b) = p^\alpha$ и $\dfrac{ab}{\text{НОК}(a, b)} = \dfrac{p^\alpha p^\beta}{p^\alpha} = p^\alpha$.

б) Достаточно рассмотреть случай, когда $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$, причём $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В этом случае $\text{НОД}(a, b, c) = p^\alpha$,

$$\frac{abc\,\text{НОК}(a, b, c)}{\text{НОК}(a, b)\,\text{НОК}(b, c)\,\text{НОК}(c, a)} = \frac{p^\alpha p^\beta p^\gamma p^\gamma}{p^\beta p^\gamma p^\gamma} = p^\alpha.$$

в) Достаточно заметить, что

$$\frac{p^\alpha p^\beta p^\gamma p^\alpha}{p^\alpha p^\beta p^\alpha} = p^\gamma.$$

4.20. Пусть наибольшая степень простого числа p, на которую делятся a, b, c, равна α, β, γ. Требуется доказать, что $\min(\alpha, \min(\beta, \gamma)) = \min(\min(\alpha, \beta), \gamma)) = \min(\alpha, \beta, \gamma)$, где $\min(x, y)$ — наименьшее из чисел x и y. Это утверждение о наименьших числах очевидно.

4.21. Согласно задаче 4.19 а)

$$(a + b)\,\text{НОК}(a, b) = \frac{(a + b)ab}{\text{НОД}(a, b)} = \frac{(a + b)ab}{\text{НОД}(a, a + b)} = b\,\text{НОК}(a, a + b).$$

4.22. Предположим, что числа $a + b$ и $a^2 + b^2$ делятся на d. Тогда число $2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2)$ тоже делится на d. Поэтому числа $2a^2 = 2a(a+b) - 2ab$ и $2b^2 = 2b(a + b) - 2ab$ тоже делятся на d. По условию числа a и b взаимно просты, поэтому числа a^2 и b^2 тоже взаимно просты. Значит, $d = 1$ или 2.

4.23. В наименьшее общее кратное чисел a и b входят только те простые делители, которые входят в a и b. Только они и могут входить в наибольший общий делитель суммы и наименьшего общего кратного. Поэтому достаточно проследить за степенью каждого простого множителя отдельно. Пусть $a = p^\alpha \dots$ и $b = p^\beta \dots$, причём $\alpha \leqslant \beta$. Тогда сумма чисел a и b имеет вид $p^\alpha \dots$, а их наименьшее общее кратное имеет вид $p^\beta \dots$. Поэтому рассматриваемый наибольший общий делитель имеет вид $p^\alpha \dots$. Наибольший общий делитель самих чисел a и b имеет такой же вид.

4.24. Пусть наименьшее общее кратное данных чисел равно a. Тогда $\frac{a}{a_1} > \frac{a}{a_2} > \ldots > \frac{a}{a_n}$ — различные натуральные числа. Поэтому $\frac{a}{a_1} \geqslant n$, т.е. $a \geqslant na_1$.

4.25. Функция $f(a, b) = \text{НОК}(a, b)$ обладает свойствами (1)–(3); свойства (1) и (2) очевидны, а свойство (3) доказано в задаче 4.21. Легко видеть, что свойства (2) и (3) позволяют вычислить $f(a, b)$, если известны значения $f(a_1, b_1)$ для всех натуральных a_1 и b_1, для которых $a_1 + b_1 < a + b$. Поэтому функция $f(a, b)$ единственна.

4.26. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — данные числа. Количество членов ряда 1, 2, 3, $\ldots$, N, делящихся на a_k, равно $\left[\frac{N}{a_k}\right]$. По условию наименьшее общее кратное любых двух из чисел $a_1, \ldots, a_n$ больше N, поэтому среди чисел 1, 2, $\ldots$, N нет ни одного числа, делящегося одновременно на два из чисел $a_1, \ldots, a_n$. Поэтому число членов последовательности 1, 2, $\ldots$, N, делящихся хотя бы на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$, равно

$$\left[\frac{N}{a_1}\right] + \left[\frac{N}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{a_n}\right].$$

Но в последовательности 1, 2, $\ldots$, N всего N членов, поэтому

$$\left[\frac{N}{a_1}\right] + \left[\frac{N}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{a_n}\right] \leqslant N.$$

Учитывая, что $\left[\frac{N}{a_k}\right] > \frac{N}{a_k} - 1$, получаем

$$\left(\frac{N}{a_1} - 1\right) + \left(\frac{N}{a_2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{N}{a_n} - 1\right) < N,$$

т.е.

$$\frac{N}{a_1} + \frac{N}{a_2} + \frac{N}{a_3} + \ldots + \frac{N}{a_n} < N + n < 2 \cdot N.$$

Сокращая обе части на N, получаем требуемое.

4.27. Число $a^n - b^n$ делится на $a - b$ (задача 5.1 а), поэтому $7^{2n} - 5^{2n}$ делится на $7^2 - 5^2 = 24$.

4.28. Нужно доказать, что $3n^5 + 5n^3 + 7n$ делится на 15, т.е. $5n^3 + 7n$ делится на 3 и $3n^5 + 7n$ делится на 5. Ясно, что $5n^3 + 7n \equiv -(n^3 - n) \pmod 3$ и $3n^5 + 7n \equiv -2(n^5 - n) \pmod 5$. Рассматривая все различные остатки, легко проверить, что $n^3 - n$ делится на 3, а $n^5 - n$ делится на 5.

4.29. Ответ: при чётных n. Прежде всего заметим, что $323 = 17 \cdot 19$, поэтому число делится на 323 тогда и только тогда, когда оно делится на 17 и на 19. Число $20^n - 3^n$ делится на $20 - 3 = 17$. Далее, $16^n \equiv (-1)^n \pmod{17}$, поэтому число $16^n - 1$ делится на 17 тогда и только тогда, когда n чётно. Что касается делимости на 19, то $20^n - 1$ делится на $20 - 1 = 19$ при любом

n, а при $n = 2m$ число $16^n - 3^n$ делится на $16^2 - 3^2 = 13 \cdot 19$, поэтому оно делится на 19.

4.30. Многочлен $x^n - y^n$ делится на $x - y$ (задача 5.1 а), поэтому $b^n - k^n$ делится на $b - k$. Значит, число $a - b^n = (a - k^n) - (b^n - k^n)$ делится на $b - k$ при любом $k \neq b$. Это возможно лишь в том случае, когда $a = b^n$.

4.31. Пусть $2^n - 2 = nm$. Тогда

$$\frac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1} = 2\frac{2^{2^n-2} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{nm} - 1}{2^n - 1} = \\ = 2(2^{n(m-1)} + 2^{n(m-2)} + \ldots + 2^n + 1).$$

4.32. Если $m = kn$, где k — нечётное число, то $a^m + b^m = (a^n)^k + (b^n)^k$ делится на $a^n + b^n$ (задача 5.1 б).

Пусть $m = kn + r$, где k — нечётное число и $0 < r < n$. Докажем, что $a^m + b^m$ не делится на $a^n + b^n$. Действительно,

$$a^{kn+r} + b^{kn+r} = a^r(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn}(b^r - a^r).$$

Здесь $a^r(a^{kn} + b^{kn})$ делится на $a^n + b^n$, а $b^{kn}(b^r - a^r)$ не делится на $a^n + b^n$, поскольку b^{kn} взаимно просто с $a^n + b^n$ и $0 < |b^r - a^r| < a^n + b^n$.

Пусть $m = ln + r$, где l — чётное число и $0 \leqslant r < n$. Докажем, что $a^m + b^m$ не делится на $a^n + b^n$. Действительно, пусть $k = l - 1$ (k — нечётное число). Тогда

$$a^{ln+r} + b^{ln+r} = a^{kn}a^{n+r} + b^{kn}b^{n+r} = \\ = a^{n+r}(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn+r}(a^n + b^n) - b^{kn}a^n(a^r + b^r).$$

Здесь первые два слагаемых делятся на $a^n + b^n$, а последнее не делится, поскольку $b^{kn}a^n$ взаимно просто с $a^n + b^n$ и $0 < a^r + b^r < a^n + b^n$.

4.33. Решим сразу задачу б). Предположим, что рассматриваемое число целое. Выберем среди чисел k, $k+1$, $\ldots$, $k+n$ те, которые делятся на наибольшую степень двойки. Пусть такое число только одно, а именно, $2^m p$, где p нечётно. Тогда рассматриваемое число имеет вид $\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{p} + \frac{2q}{r}\right) = \frac{r + 2q}{2^m pr}$, где числа p и r нечётные. Это число представляет собой дробь с нечётным знаменателем и чётным числителем; такое число не может быть целым.

Поэтому есть по крайней мере два числа, которые делятся на максимальную степень двойки, а именно, $2^m p$ и $2^m q$, где $p < q$ и p, q — нечётные числа. Но тогда $p + 1 < q$ и $p + 1$ — чётное число. Поэтому число $2^m(p+1)$ содержится среди чисел k, $k+1$, $\ldots$, $k+n$ и делится на 2^{m+1}, что противоречит выбору числа m.

4.34. Рассмотрим общее выражение $\prod_k (a_k m + b_k n)!^{d_k}$, где a_k и b_k — целые числа, d_k — целые неотрицательные числа. Наивысшая степень простого числа p, на которую делится число $n!$, равна $\sum_{m=1}^{\infty}[n/p^m]$ (задача 4.36). Поэтому

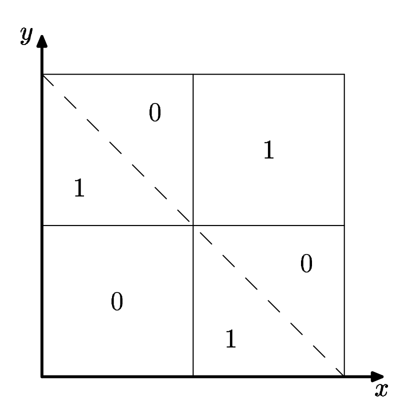


Рис. 4.1. Графики в квадрате (б)

если для любых чисел x, $y \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sum d_k[a_kx + b_ky] \geqslant 0$, то рассматриваемое выражение является целым числом.

В задачах а)– г) числа a_k, b_k, d_k связаны соотношением $\sum_k d_ka_k = \sum_k d_kb_k = 0$. В таком случае функция $f(x,y) = \sum_k d_k(a_kx + b_ky)$ обладает следующим свойством: $f(x+1,y) = f(x,y) = f(x,y+1)$. Поэтому неравенство $f(x,y) \geqslant 0$ достаточно проверить для чисел x, y, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x$, $y < 1$.

а) Нужно доказать неравенство $[x + y] - [x] - [y] \geqslant 0$ для $0 \leqslant x$, $y < 1$. Но $[x] = [y] = 0$.

б) Нужно доказать неравенство $[2x] + [2y] - [x] - [y] - [x + y] \geqslant 0$ для $0 \leqslant x$, $y < 1$. Учитывая, что $[x] = [y] = 0$, переходим к неравенству $f(x,y) = [2x] + [2y] - [x + y] \geqslant 0$. Чтобы вычислить значение функции $f(x,y)$ в квадрате $0 \leqslant x$, $y < 1$, поступим следующим образом. Нарисуем графики $2x = 1$ и $2y = 1$ сплошными линиями, а график $x + y = 1$ пунктирной линией (рис. 4.1).

Ясно, что $f(0,0) = 0$; поэтому $f = 0$ и во всех точках фигуры, ограниченной этими графиками и сторонами квадрата и содержащий начало координат. При переходе через сплошную линию значение функции f увеличивается на 1, а при переходе через пунктирную линию — уменьшается на 1 (имеется в виду движение в направлении от начала координат). Это замечание позволяет вычислить значение функции $f(x,y)$ во всех точках квадрата и убедиться, что они неотрицательны. На рис. 4.1 эти значения выписаны.

в) Нужно доказать неравенство $f(x,y) = [5x] + [5y] - [3x+y] - [x+3y] \geqslant 0$ для $0 \leqslant x$, $y < 1$. Чтобы вычислить значение функции $f(x,y)$ во всех точках квадрата, для каждого выражение $\pm[a_kx+b_ky]$ нарисуем графики $a_kx+b_ky =$

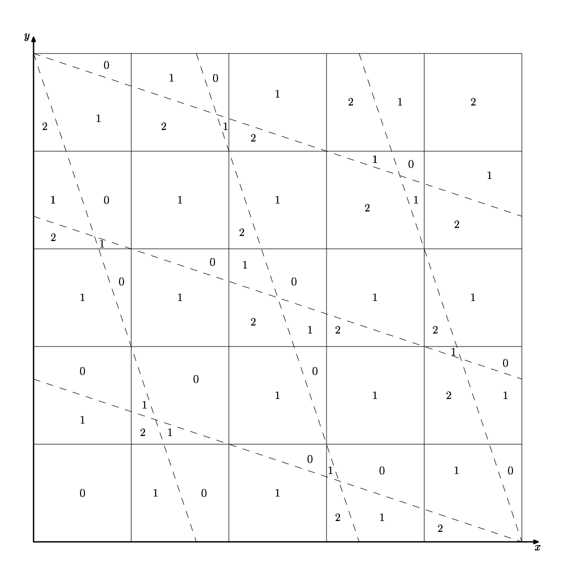


Рис. 4.2. Графики в квадрате (в)

$= 1, 2, \ldots, a_k + b_k - 1$; для знака плюс график рисуем сплошной линией, а для знака минус — пунктирной (рис. 4.2). Затем пользуемся теми же правилами, что и при решении задачи б).

г) Нужно доказать неравенство $f(x, y) = [3x+3y]+[3y]+[2x]+[2y]-[2x+ +3y]-[x+2y]-[x+y] \geqslant 0$. Это делается так же, как и при решении задачи в): см. рис. 4.3. Отметим, что график $x + y = 1$ мы не рисуем, потому что при прохождении через этот график значение функции $f(x, y)$ увеличивается на 1 и уменьшается на 1, т.е. не изменяется.

4.35. Ответ: 24. Среди чисел от 1 до 100 есть 20 чисел, делящихся на 5, и 4 числа, делящихся на 25 (чисел, делящихся на 125, среди них нет). Поэтому рассматриваемое произведение делится на 5^{24} и не делится на 5^{25}. Ясно также, что оно делится на 2^{24}.

4.36. Среди чисел $1, 2, \ldots, n$ есть $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ чисел, делящихся на p, $\left[\dfrac{n}{p^2}\right]$ чисел, делящихся на p^2, и т.д.

4.37. Пусть a — наибольшее целое число, для которого $n!$ делится на 2^a. Согласно задаче 4.36

$$a = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \ldots \leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3} + \ldots = n,$$

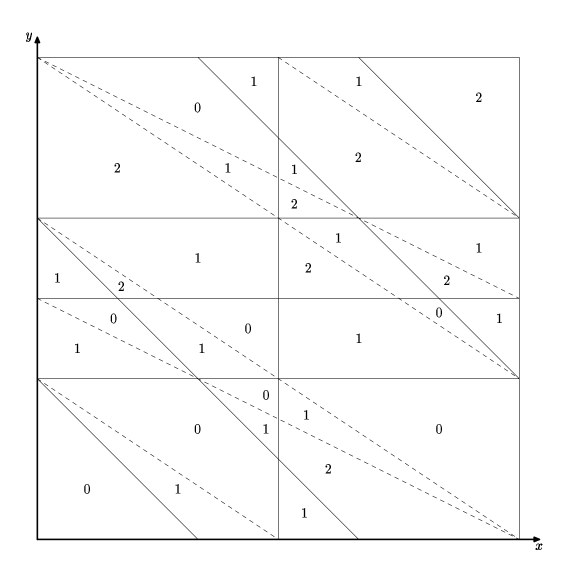


Рис. 4.3. Графики в квадрате (г)

поскольку $[x] \leqslant x$. Кроме того, $\left[\dfrac{n}{2^k}\right] = 0 < \dfrac{n}{2^k}$ при достаточно больших k. Поэтому $a < n$.

4.38. Пусть $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)$ и $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n$. Ясно, что $(2n)! = (2n-1)!!(2n)!!$ и $(2n)!! = 2^n n!$. Поэтому $(n+1)(n+2)\ldots 2n = \dfrac{(2n)!}{n!} = \dfrac{(2n-1)!!(2n)!!}{n!} = 2^n(2n-1)!!$, причём число $(2n-1)!!$ нечётно.

4.39. Ответ: 1 и 4. При $n > 1$ должны выполняться равенства $2^k 5^l = n$ и $2^s 5^t = n+1$. Числа n и $n+1$ взаимно простые, поэтому должно выполняться либо равенство $2^k + 1 = 5^t$, либо равенство $5^l + 1 = 2^s$. Предположим, что $5^l + 1 = 2^s$. Тогда число 2^s оканчивается на 6, поэтому $s = 4m$. Значит, $5^l = 2^{4m} - 1 = (2^{2m} - 1)(2^{2m} + 1)$. Но числа $2^{2m} - 1$ и $2^{2m} + 1$ не могут одновременно делиться на 5.

Рассмотрим теперь уравнение $2^k + 1 = 5^t$. Пусть $t = 2^m s$, где s нечётно. Тогда

$$5^t - 1 = (5^{2^m} - 1)(5^{2^m(s-1)} + 5^{2^m(s-2)} + \ldots + 1).$$

Второй множитель состоит из нечётного числа нечётных слагаемых, т.е. он нечётен. Значит, $s = 1$. Далее,

$$5^{2^m} - 1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)\ldots(5^{2^{m-1}} + 1).$$

Число $5+1=6$ не является степенью двойки, поэтому $m=0$. Это соответствует равенству $2^2+1=5$.

4.40. а) Пусть $k=2^n$. Тогда

$$a^k-1=(a^{2^{n-1}}-1)(a^{2^{n-1}}+1)=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{n-1}}+1). \quad (1)$$

Число a нечётно, поэтому в этом произведении есть $n+1$ чётных сомножителей. Значит, a^k-1 делится на 2^{n+1}. Таким образом, если $k=2^n$ и $n\geqslant m-1$, то a^k-1 делится на 2^m.

б) Введём следующее обозначение: если $m=2^n s$, где число s нечётно, то $d(m)=n$. Ясно, что $a^m-1=(a^{2^n}-1)(a^{2^n(s-1)}+a^{2^n(s-2)}+\ldots+1)$, где сумма во второй скобке состоит из нечётного числа нечётных слагаемых. Поэтому $d(a^m-1)=d(a^{2^n}-1)$. Далее, в разложении (1) числа $a^2+1, \ldots, a^{2^{n-1}}+ +1$ делятся на 2 и не делятся на 4, поскольку квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 4. Значит,

$$d(a^{2^n}-1)=\begin{cases} d(a-1) & \text{при } n=0;\\ d(a^2-1)+n-1 & \text{при } n\geqslant 1.\end{cases}$$

Число a^m-1 делится на 2^m тогда и только тогда, когда $d(a^m-1)\geqslant m$. Разберём два случая. Если $d(m)=0$, т.е. число m нечётно, то должно выполняться неравенство $m\leqslant d(a-1)$. Это неравенство имеет конечное число нечётных решений. Если $d(m)\geqslant 1$, т.е. число m чётно, то должно выполняться неравенство $d(a^2-1)+n-1\geqslant m=2^n s$, где $n=d(m)$. Это неравенство можно переписать в виде $s\leqslant \dfrac{d(a^2-1)+n-1}{2^n}$ (число s нечётно). Такое неравенство имеет конечное число решений, поскольку последовательность $n/2^n$ стремится к нулю при $n\to\infty$ (задача 25.18).

4.41. а) Ответ: 1, 2 и 4. Воспользуемся решением задачи 4.40 б). Если $a=3$, то $d(a-1)=1$ и $d(a^2-1)=3$. Неравенство $s\leqslant\dfrac{2+n}{2^n}$ имеет следующие решения: $(s,n)=(1,1)$ и $(1,2)$.

б) Ответ: 1, 2, 4, 6 и 8. Если $a=31$, то $d(a-1)=1$ и $d(a^2-1)=d(30\cdot 32)= =6$. Неравенство $s\leqslant\dfrac{5+n}{2^n}$ имеет следующие решения: $(s,n)=(1,1)$, $(3,1)$, $(1,2)$ и $(1,3)$. (Напомним, что число s нечётно.)

4.42. а) Ответ: 0 и 1. Воспользуйтесь равенством $(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1$.

б) Ответ: 0 и 1. Воспользуйтесь равенством $(2k+1)^2=4k^2+4k+1$.

в) Ответ: 0, 1 и 4. Воспользуйтесь равенствами $(5k\pm1)^2=25k^2\pm10k+1$ и $(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4$.

г) Ответ: 0, 1 и 4. Воспользуйтесь равенствами $(2k+1)^2=4k(k+1)+1$ и $(4k+2)^2=16k^2+16k+4$ и заметьте, что число $k(k+1)$ чётно.

4.43. а) Пусть n — искомое число. Тогда $n+1$ делится на $5\cdot6\cdot7=210$. Поэтому $n=209$.

б) Пусть n — искомое число. Тогда $n+1$ делится на НОК$(5,6,8)=120$. Поэтому $n=119$.

4.44. а) Пусть $6n \equiv 1 \pmod 5$ и $5m \equiv 1 \pmod 6$. Тогда

$$6na + 5mb \equiv 6na \equiv a \pmod 5$$
$$6na + 5mb \equiv 5mb \equiv b \pmod 6.$$

В нашем случае $m=5$ и $n=1$.

б) Пусть $42k \equiv 1 \pmod 5$, $35n \equiv 1 \pmod 6$ и $30m \equiv 1 \pmod 7$ (здесь $42 = 6\cdot 7$, $35 = 5\cdot 7$, $30 = 5\cdot 6$). Тогда

$$42ka + 35nb + 30mc \equiv 42ka \equiv a \pmod 5,$$
$$42ka + 35nb + 30mc \equiv 35nb \equiv b \pmod 6,$$
$$42ka + 35nb + 30mc \equiv 30mc \equiv c \pmod 7.$$

В нашем случае $k=3$, $n=5$, $m=4$.

4.45. а) Согласно задаче 4.42 б) сумма квадратов двух чисел при делении на 4 может давать остатки 0, 1 и 2.

б) Согласно задаче 4.42 г) сумма квадратов двух чисел при делении на 8 может давать остатки 0, 1, 2, 4 и 5, а сумма квадратов трёх чисел — остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

4.46. Ответ: 1946. Пусть N — искомое число. По условию $N = 131k + 112 = 132l + 98$, где k и l — натуральные числа. Кроме того, $N < 10\,000$, поэтому $l = \frac{N-98}{132} < \frac{10\,000-98}{132} \leqslant 75$. Далее, $131k + 112 = 132l + 98$, поэтому $131(k-l) = l - 14$. Следовательно, если $k \neq l$, то $|l-14| \geqslant 131$. Но $l \leqslant 75$, поэтому $k = l$ и $l - 14 = 0$. Таким образом, $N = 131\cdot 14 + 112 = 132\cdot 14 + 98 = 1946$.

4.47. Ответ: 523 152 или 523 656.

Полученное число должно делиться на $7\cdot 8\cdot 9 = 504$. Поделим 523 000 на 504 с остатком: $523\,000 = 1037\cdot 504 + 352$. Поскольку $504 - 352 = 152$, на 504 делятся числа 523 152 и $523\,152 + 504 = 523\,656$. Других чисел, делящихся на 504, среди чисел от 523 000 до 523 999 нет.

4.48. Заметим, что $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, поскольку $10^3 + 1$ делится на 7, и $10^k \equiv 4 \pmod 6$ при $k \geqslant 1$, поскольку число $99\ldots 96$ чётно и делится на 3. Значит, $10^{10^k} \equiv 10^4 \pmod 7$ при $k \geqslant 1$. Поэтому требуемый остаток равен остатку от деления числа $10\cdot 10^4 = 10^5$ на 7. Этот остаток равен 5.

4.49. Положим $n_i = m/m_i$. Число n_i является произведением чисел, взаимно простых с m_i, поэтому $(n_i, m_i) = 1$. В таком случае можно выбрать целые числа r_i и s_i так, что $r_im_i + s_in_i = 1$. Положим $e_i = s_in_i$ и $x = a_1e_1 + \ldots + a_ke_k$. Ясно, что $e_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ и $e_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ при $j \neq i$, поэтому $x \equiv a_i \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Если x_1 и x_2 — решения рассматриваемой системы сравнений, то $x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Числа $m_1, \ldots, m_k$ попарно взаимно простые, поэтому $x_1 - x_2$ делится на m.

4.50. Ясно, что $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Поэтому $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$, $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7$ и $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7$. Следовательно, $2^n - 1$ делится на 7 тогда и только тогда n делится на 3.

4.51. Применим индукцию по r. При $r = 1$ есть две суммы: 0 и a_1. Предположим, что утверждение верно для $r < p-1$ чисел и неверно для $r+1$ чисел. Тогда суммы 0, s_1, ..., s_r, составленные из чисел a_1, ..., a_r, дают разные остатки при делении на p, но все суммы $0 + a_{r+1}$, $s_1 + a_{r+1}$, ..., $s_r + ar + 1$ при делении на p не дают новых остатков по сравнению с 0, s_1, ..., s_r. Значит, $a_{r+1} \equiv s_i \pmod p$ для некоторого i. Далее, $s_i + a_{r+1} \equiv s_j \pmod p$ для некоторого j, т.е. $2a_{r+1} \equiv s_j \pmod p$. Аналогично получаем, что остатки от деления на p чисел a_{r+1}, $2a_{r+1}$, $3a_{r+1}$, ..., $(p-1)a_{r+1}$ содержатся среди остатков от деления на p чисел 0, s_1, ..., s_r. Число p простое, и a_{r+1} не делится на p. Поэтому остатки от деления на p чисел a_{r+1}, $2a_{r+1}$, ..., $(p-1)a_{r+1}$ различны и отличны от нуля. Значит, $p - 1 \geqslant r$, что противоречит предположению.

4.52. Сначала докажем, что если требуемое утверждение верно для $n = a$ и для $n = b$, то оно верно и для $n = ab$. Пусть дано $2ab - 1$ целых чисел. Утверждение верно для $n = b$, а кроме того, $2ab - 1 \geqslant 2b - 1$. Поэтому из данных $2ab - 1$ чисел можно выбрать b чисел, сумма которых делится на b. Затем из оставшихся чисел, если их не меньше $2b - 1$, снова выберем b чисел, сумма которых делится на b. Равенство $2ab - 1 = (2a-1)b + b - 1$ показывает что так можно поступить $2a - 1$ раз и получить $2a - 1$ наборов по b чисел, причём сумма чисел каждого набора делится на b, т.е. среднее арифметическое чисел набора — целое число. Рассмотрим эти средние арифметические. Утверждение верно для $n = a$, поэтому из $2a - 1$ средних арифметических можно выбрать a так, чтобы их сумма делилась на a. В результате получаем a наборов по b чисел. Сумма выбранных ab чисел делится на ab, что и требовалось.

Остаётся доказать самую трудную часть задачи: требуемое утверждение верно для любого простого числа $n = p$.

Вместо данных чисел можно рассматривать их остатки от деления на p. Пусть $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{2p-1}$ — остатки от деления данных чисел на p. Рассмотрим ещё $p-1$ чисел $a_1 = b_{p+1} - b_2$, $a_2 = b_{p+2} - b_3$, ..., $a_{p-1} = b_{2p-1} - b_p$. Если $a_i = 0$, то $b_i = b_{p+i}$, а значит, $b_i = b_{i+1} = \ldots = b_{i+p}$. В таком случае сумма p чисел b_i, b_{i+1}, b_{i+p} делится на p. Остаётся рассмотреть случай, когда все числа a_1, ..., a_{p-1} отличны от нуля.

Пусть x — остаток от деления на p суммы $b_1 + b_2 + \ldots + b_p$. Если $x = 0$, то мы сразу получаем требуемые p чисел. Предположим, что $x \neq 0$. Согласно задаче 4.51 из чисел a_1, ..., a_{p-1} можно составить суммы, дающие все различные остатки при делении на p. В частности, можно составить сумму

$a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$, дающую остаток $p - x$. Тогда сумма $b_1 + b_2 + \ldots + b_p + a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} = b_1 + \ldots + b_p + (b_{p+i_1} - b_{i_1}) + \ldots + (b_{p+i_k} - b_i k)$ делится на p. После очевидных сокращений эта сумма превращается в сумму p данных чисел.

4.53. Предположим, что $n(n+1) = m^k$, где m и k — натуральные числа, $k \geqslant 2$. Числа n и $n+1$ взаимно простые, поэтому $n = a^k$ и $n+1 = b^k$, где a и b — натуральные числа. Ясно, что $b > a$. Но $(a+1)^k > (a+1)a^{k-1} = a^k + a^{k-1} \geqslant n+1$. Поэтому $b^k \geqslant (a+1)^k > n+1$.

4.54. а) Если $|k - l| \leqslant 4$ и $k \neq l$, то наибольший общий делитель чисел k и l не превосходит 4. Поэтому наибольший общий делитель любой пары выбранных чисел не превосходит 4. Из пяти последовательных чисел можно выбрать пару последовательных нечётных чисел. Из двух последовательных нечётных чисел по крайней мере одно не делится на 3. Это число взаимно просто с остальными четырьмя числами.

б) Среди данных чисел есть 5 нечётных чисел. Рассмотрим остатки от деления этих пяти чисел на 3, 5 и 7. Среди остатков от деления на 3 нет трёх одинаковых, а среди остатков от деления на 5 и на 7 нет двух одинаковых. Поэтому среди указанных пяти чисел можно выбрать три числа, не делящихся на 3, а среди них выбрать число, не делящееся на 5 и на 7. Это число взаимно просто с остальными девятью числами.

4.55. Будем считать, что $n > m$. Подставим $x = 2$ в тождество

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\ldots(x^{2^{n-2}}+1) = x^{2^{n-1}}+1.$$

В результате получим $F_1F_2\ldots F_{n-1} + 2 = F_n$.

Предположим, что числа F_n и F_m делятся на d. Тогда $2 = F_n - F_1F_2\ldots F_{n-1}$ тоже делится на d. Но числа F_n и F_m нечётные, поэтому $d \neq 2$.

4.56. Посмотрим, какие остатки может давать простое число $p > 3$ при делении на 6. Оно не может давать остаток 2 или 4, поскольку иначе оно было бы чётно. Оно не может давать остаток 3, поскольку иначе оно делилось бы на 3. Значит, простое число $p > 3$ при делении на 6 даёт остаток 1 или 5, т.е. оно имеет вид $6n \pm 1$; его квадрат имеет вид $36n^2 \pm 12n + 1$.

4.57. Предположим, что существует лишь конечное число различных простых чисел, а именно, $p_1, \ldots, p_r$. Рассмотрим число $p_1\ldots p_r + 1$. Оно не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_r$, поэтому у него есть простой делитель, отличный от $p_1, \ldots, p_r$.

4.58. Предположим, что $p_1, \ldots, p_r$ — все различные простые числа вида $4k-1$. Рассмотрим число $4p_1\ldots p_r - 1$. Оно нечётно, поэтому все его простые делители имеют вид $4k \pm 1$. Ясно также, что все простые делители не могут иметь вид $4k+1$, поскольку произведение чисел такого вида имеет такой же вид. Остаётся заметить, что рассматриваемое число не делится на $p_1, \ldots, p_r$.

4.59. а) Многочлен $x^q - 1$ делится на $x - 1$, поэтому $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1$ делится на $2^q - 1$.

б) Если q нечётно, то многочлен $x^q + 1$ делится на $x + 1$. Поэтому если число n имеет нечётный делитель $q > 1$, то $2^n + 1$ делится на $2^q + 1$.

4.60. Воспользуемся тождеством $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$. При $x = 2^{2^{n-2}}$ получаем, что рассматриваемое число является произведением чисел $2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1$ и $2^{2^{n-1}} - 2^{2^{n-2}} + 1$. Эти числа взаимно просты, поскольку они нечётны, а их разность равна $2^{2^{n-2}+1}$. Теперь можно воспользоваться индукцией по n, поскольку число $2^{2^{n-1}} + 2^{2^{n-2}} + 1$ имеет тот же самый вид.

4.61. Пусть $a = a_1 + a_2 n$ и $b = b_1 + b_2 n$. Тогда $a \pm b = a_1 \pm b_1 + (a_2 \pm b_2)n$ и $ab = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 n)n$.

4.62. Если $xa \equiv ya \pmod{p}$, то $(x - y)a$ делится на p. Числа a и p взаимно простые, поэтому $x - y$ делится на p. Значит, если $1 \leqslant x, y \leqslant p - 1$, то $x = y$.

4.63. Согласно задаче 4.62 ровно один из остатков от деления на p чисел b, $2b$, ..., $(p - 1)b$ равен 1. Значит, существует единственное целое число $\bar{b}$, $1 \leqslant \bar{b} \leqslant p - 1$, для которого $\bar{b}b \equiv 1 \pmod{p}$. При этом $a \equiv \bar{b}(ab) \pmod{p}$.

Глава 5.

Тождества

5.1. Разложения на множители

В задачах 5.1–5.8 требуется разложить указанные выражения хотя бы на два множителя меньшей степени, не используя радикалов.

5.1. а) $x^n - y^n$; б) $x^{2n+1} + y^{2n+1}$.

5.2. $x^4 + 4$.

5.3. $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

5.4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

5.5. $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

5.6. $a^{10} + a^5 + 1$.

5.7. $a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$.

5.8. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$.

* * *

5.9. а) Разложите $x^8 + x^4 + 1$ на два множителя.

б) Разложите $x^8 + x^4 + 1$ на четыре множителя, допуская в качестве коэффициентов квадратные корни из натуральных чисел.

5.2. Доказательство тождеств

5.10. Докажите, что для любого натурального n справедливо соотношение

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n \cdot (2n-1)!!$$

5.3. Суммы квадратов

5.11. Докажите, что если каждое из чисел m и n представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел, то их произведение mn тоже представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

5.12. а) Представьте в виде суммы квадратов

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

б) Представьте в виде суммы квадратов

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2$$

(*тождество Лагранжа*).

5.4. Вспомогательные тождества

5.13. Известно, что число $a+1/a$ целое. а) Докажите, что число a^2+ $+1/a^2$ тоже целое. б) Докажите, что число a^n+1/a^n целое для любого натурального n.

5.14. Докажите, что любое нечётное число есть разность двух квадратов целых чисел.

5.15. Докажите, что произведение четырёх последовательных целых чисел в сумме с единицей даёт полный квадрат.

5.16. Докажите, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ то $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=$ $=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$ для любого нечётного n.

5.17. Пусть x, y, z — попарно различные целые числа. Докажите, что число $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ делится на $5(y-z)(z-x)(x-y)$.

5.18. Докажите, что если $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, то $\dfrac{a}{(b-c)^2}+$ $+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

5.19. Докажите, что n^2+3n+5 ни при каком целом n не делится на 121.

5.20. Докажите, что выражение

$$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$$

не равно 33 ни при каких целых значениях x и y.

5.21. Докажите, что для любого натурального $n\geqslant 2$ число $2^{4n+2}+1$ не является произведением двух простых чисел.

5.22. Докажите, что любое рациональное число можно представить в виде суммы трёх кубов рациональных чисел.

5.5. Разложения рациональных функций

5.23. Представьте дроби $\dfrac{2}{x^2-1}$ и $\dfrac{2x}{x^2-1}$ в виде суммы дробей $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$, где a и b — действительные числа.

5.24. Пусть $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n$ и

$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x+a_n},$$

где $A_1,\ldots,A_n$ — действительные числа. Докажите, что $A_1>0$, $A_2<0$, $A_3>0$, …

5.6. Разложения квадратичных функций

5.25. Докажите, что если для всех x, y, z справедливо равенство

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{23}yz=$$
$$=(b_1x+b_2y+b_3z)(c_1x+c_2y+c_3z),$$

то $a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{13}a_{12}a_{23}=a_{23}^2a_{11}+a_{13}^2a_{22}+a_{12}^2a_{33}$.

5.7. Тождества с целыми частями

5.26. Докажите, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

5.27. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

5.28. Пусть p и q — взаимно простые нечётные натуральные числа. Докажите, что

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{\frac{p-1}{2}\cdot q}{p}\right]+\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{\frac{q-1}{2}\cdot p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{4}.$$

(*Эйзенштейн*)

5.29. Докажите, что $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ для любого натурального числа n.

5.30. Докажите, что $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$ для любого натурального числа n.

5.31. Докажите, что $[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}]=[\sqrt[3]{8n+3}]$ для любого натурального числа n.

Решения

5.1. а) $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})$.
б) $(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\ldots+y^{2n})$.

5.2. $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

5.3. $3(x+y)(y+z)(z+x)$.

5.4. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

5.5. $3(x-y)(y-z)(z-x)$.

5.6. $(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$.

5.7. $(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(a-c)$.

5.8. $(x^2-2x+3)(x^2+3x+4)$.

5.9. а) $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$.

б) Каждый из полученных многочленов четвёртой степени можно разложить на множители, воспользовавшись тождеством
$$(x^2+ax+1)(x^2-ax+1)=x^4+(2-a^2)x^2+1;$$
нужно положить $a=1$ и $a=\sqrt{3}$.

5.10. Ясно, что $n!2^n = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$. Поэтому $n!2^n(2n-1)!! = (2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n)1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n)!$.

5.11. Воспользуйтесь тождеством $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

5.12. а) $(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2$.

б) $\sum(a_ib_j-a_jb_i)^2$, где суммирование ведётся по всем парам $i<j$.

5.13. а) Воспользуйтесь тождеством $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2$.

б) Воспользуйтесь тождеством
$$a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}=\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

5.14. Воспользуйтесь тождеством $2n+1=(n+1)^2-n^2$.

5.15. Достаточно заметить, что
$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=\bigl(n(n+3)+1\bigr)^2.$$

5.16. Равенство $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ эквивалентно равенству $(bc+ca+ab)(a+b+c)=abc$, т.е. $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ (предполагается, что $abc\neq 0$ и $a+b+c\neq 0$). Таким образом, тройка чисел a,b,c имеет вид $x,-x,y$, причём $y\neq\pm x$. Но тогда тройка чисел a^n,b^n,c^n при нечётном n тоже имеет такой вид.

5.17. Несложно проверить, что частное равно $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$. Действительно, пусть $x-y=u$ и $y-z=v$. Тогда $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5 = u^5+v^5-5(u+v)^5=-5(u^4v+2u^3v^2+2u^2v^3+vu^4)=-5uv(u+v)(u^2+uv+v^2)$ и $5(y-z)(z-x)(x-y)=-5uv(u+v)$. Остаётся заметить, что $u^2+uv+v^2 = x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$.

5.18. Докажем, что
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right).$$
Действительно, сумма трёх дробей
$$\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ac-ab}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$
$$\frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{ab-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$
$$\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=\frac{bc-ac}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

равна нулю.

5.19. Заметим, что $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$. Если число n^2+3n+5 делится на 121, то число $(n+7)(n-4)$ делится на 11. Но $(n+7)-(n-4)=$ $=11$, поэтому оба множителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Следовательно, если число $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится на 121. Но тогда число $(n+7)(n-4)+33$ не может делиться на 121.

5.20. Представим данное выражение в виде

$$(x+2y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+3y).$$

При $y \neq 0$ все пять сомножителей этого произведения попарно различны, а число 33 нельзя представить в виде произведения пяти целых попарно различных сомножителей (хотя и можно представить в виде произведения четырёх попарно различных сомножителей, два из которых равны ± 1). При $y=0$ рассматриваемое выражение превращается в x^5. Ни при каком целом x число x^5 не равно 33.

5.21. Число $2^{4n+2}+1$ можно представить как в виде произведения $(2^2+$ $+1)(2^{4n}-2^{4n-2}+\ldots-2^2+1)$, так и в виде произведения $(2^{2n+1}+2^{n+1}+$ $+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)$. При $n \geqslant 2$ эти разложения различны.

5.22. Воспользуемся тождеством

$$(a-b)^3+(b-c)^3+c^3=3b^2(a-c)+\bigl(a^3-3b(a^2-c^2)\bigr).$$

Возьмём рациональное число t и положим $a=12t(t+1)$, $b=(t+1)^3$ и $c=12t(t-1)$. Тогда получим

$$72t(t+1)^6=(a-b)^3+(b-c)^3+c^3.$$

Если $t \neq -1$, то число $w=72t$ является суммой трёх кубов рациональных чисел:

$$w=\left(\frac{a-b}{(t+1)^2}\right)^3+\left(\frac{b-c}{(t+1)^2}\right)^3+\left(\frac{c}{(t+1)^2}\right)^3.$$

Остаётся заметить, что $-72=(-4)^3+(-2)^3+0^3$.

5.23. Ясно, что $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}$. Поэтому $\dfrac{2}{x^2-1}=$ $=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ и $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$.

5.24. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Предположим, что требуемое утверждение доказано для $n-1$ чисел. Тогда

$$\frac{1}{(x+a_1)\ldots(x+a_{n-1})}=\frac{B_1}{x+a_1}+\ldots+\frac{B_{n-1}}{x+a_{n-1}},$$
$$\frac{1}{(x+a_2)\ldots(x+a_n)}=\frac{C_2}{x+a_2}+\ldots+\frac{C_n}{x+a_n},$$

где $B_1, C_2 > 0$, $B_2, C_3 < 0$, $B_3, C_4 > 0$, ... При этом

$$\frac{1}{(x+a_1)\dots(x+a_{n-1})} - \frac{1}{(x+a_2)\dots(x+a_n)} = \frac{a_n - a_1}{(x+a_1)\dots(x+a_n)},$$

где $a_n - a_1 > 0$. Требуемые неравенства следуют из того, что $(a_n - a_1)A_1 = B_1$, $(a_n - a_1)A_2 = B_2 - C_2$, ..., $(a_n - a_1)A_{n-1} = B_{n-1} - C_{n-1}$, $(a_n - a_1)A_n = -C_n$.

5.25. Если указанное равенство справедливо для всех x, y, z, то

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_1c_1, & 2a_{12} &= b_1c_2 + b_2c_1, \\ a_{22} &= b_2c_2, & 2a_{13} &= b_1c_3 + b_3c_1, \\ a_{33} &= b_3c_3, & 2a_{23} &= b_2c_3 + b_3c_2. \end{aligned}$$

Действительно, это утверждение эквивалентно тому, что если

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + 2A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + A_{23}yz = 0$$

для всех x, y, z, то все коэффициенты A_{ij} равны нулю. При $x = 1$, $y = z = 0$ получаем $A_{11} = 0$. Аналогично $A_{22} = A_{33} = 0$. Теперь при $x = y = 1$, $z = 0$ получаем $A_{12} = 0$. Аналогично $A_{13} = A_{23} = 0$.

Подставим в выражения $a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{13}a_{12}a_{23}$ и $a_{23}^2a_{11} + a_{13}^2a_{22} + a_{12}^2a_{33}$ полученные выражения a_{ij} через b_p и c_q. После несложных преобразований получаются одинаковые выражения.

5.26. Рассмотрим функцию

$$f(x) = [nx] - [x] - \left[x + \frac{1}{n}\right] - \dots - \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= [nx+1] - \left[x + \frac{1}{n}\right] - \left[x + \frac{2}{n}\right] - \dots - \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [x+1] = \\ &= [nx] - [x] - \left[x + \frac{1}{n}\right] - \dots - \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = f(x). \end{aligned}$$

Поэтому $f(x) = f(y)$ для некоторого числа y, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant y \leqslant 1/n$. Но для такого числа $f(y) = 0$.

5.27. Рассмотрим прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant q$ и проведём в нём диагональ $y = qx/p$. Интересующая нас сумма равна числу точек с целыми координатами, лежащих строго внутри (не на границе) этого прямоугольника и под его диагональю. Симметрия относительно центра прямоугольника показывает, что под диагональю лежит столько же целочисленных точек, сколько и над диагональю. Из взаимной простоты чисел p и q следует, что на диагонали лежат только две вершины; других целочисленных точек на ней нет. Остаётся заметить, что всего внутри прямоугольника лежит $(p-1)(q-1)$ целочисленных точек.

5.28. Рассмотрим прямоугольник $1 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}$, $1 \leqslant y \leqslant \frac{q-1}{2}$ и проведём прямую $y = qx/p$. Интересующая нас сумма состоит из двух частей. Первая

часть равна числу целочисленных точек этого прямоугольника, лежащих под этой прямой, а вторая — над. Внутри прямоугольника нет целочисленных точек, лежащих на рассматриваемой прямой. Поэтому интересующая нас сумма равна количеству целочисленных точек рассматриваемого прямоугольника, т.е. она равна $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$.

5.29. Сначала сравним числа $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ и $\sqrt{4n+2}$: $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \vee \sqrt{4n+2} \iff n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1 \vee 4n+2 \iff 2\sqrt{n(n+1)} \vee 2n+1 \iff 4n^2+4n \vee 4n^2+ + 4n+1$. Значит, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$.

Предположим, что существует натуральное число m, для которого $\sqrt{n}+ +\sqrt{n+1} \leqslant m \leqslant \sqrt{4n+2}$. Тогда $2n+1+2\sqrt{n(n+1)} \leqslant m^2 \leqslant 4n+2$, а значит, $4n(n+1) \leqslant (m-2n-1)^2 \leqslant 4n(n+1)+1$. Число $4n(n+1)$ не может быть полным квадратом, поэтому первое неравенство строгое. Значит, $m^2-2n-1 = 2n+1$, т.е. $m^2 = 2(2n+1)$, чего не может быть.

5.30. Положим $x = \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$. Тогда $x^2 = 3n+3+2(\sqrt{n(n+1)}+ + \sqrt{n(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)})$. При $n \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$\begin{array}{ccc} \left(n+\frac{2}{5}\right)^2 < & n(n+1) < & \left(n+\frac{1}{2}\right)^2, \\ \left(n+\frac{7}{10}\right)^2 < & n(n+2) < & (n+1)^2, \\ \left(n+\frac{7}{5}\right)^2 < & (n+1)(n+2) < & \left(n+\frac{3}{2}\right)^2. \end{array}$$

Учитывая, что $n+\frac{2}{5}+n+\frac{7}{10}+n+\frac{7}{5} = 3n+5$ и $n+\frac{1}{2}+n+1+n+\frac{3}{2} = 3n+6$, получаем $9n+8 < x^2 < 9n+9$, а значит, $[x] = [\sqrt{9n+8}]$.

5.31. Согласно задаче 8.41 для любых чисел $a > b > 0$ выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} < \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$. Применив это неравенство для $a = \sqrt[3]{n+1}$ и $b = \sqrt[3]{n}$, получим $\sqrt[3]{n+\frac{1}{2}} > \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n+1}} = \sqrt[6]{n^2+n}$. Значит, $\sqrt[3]{8n+4} > \sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[6]{64n^2+64n} > \sqrt[3]{8n+3}$. Поэтому если $\sqrt[3]{8n+3} > m$, то $\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} > m$. Кроме того, не существует целого числа m, для которого $\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} \geqslant m > \sqrt[3]{8n+3}$, поскольку иначе $8n+ +4 > m^3 > 8n+3$, а между целыми числами $8n+3$ и $8n+4$ никаких других целых чисел нет.

Глава 6.

Рациональные и иррациональные числа

6.1. Сравнение чисел

6.1. Сравните, какое из чисел больше: а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{11}$; б) $\sqrt{6}+$ $+\,2\sqrt{7}$ или $\sqrt{10}+\sqrt{21}$; в) $\sqrt{11}$ или $5+\sqrt[3]{5}$.

6.2. Сравните, какое из чисел больше: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ (выражение состоит из какого-то конечного числа корней) или 2?

6.2. Иррациональности в знаменателях

В следующих задачах нужно избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.

6.3. а) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

6.4. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$.

6.5. а) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[2n+1]{x}+\sqrt[2n+1]{y}}$.

6.6. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}}$

6.7. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$.

6.8. Докажите, что можно избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, который представляет собой сумму квадратных корней из рациональных чисел.

6.3. Тождества с радикалами

6.9. Докажите, что если $a > \sqrt{b}$, то

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

6.10. Представьте следующие числа в виде $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, где a и b — натуральные числа. а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

6.11. Докажите, что $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}$.

6.12. Докажите, что число $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ рационально.

6.13. Докажите, что следующие числа рациональны:

а) $\sqrt[3]{3+\sqrt{\dfrac{242}{27}}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{\dfrac{242}{27}}}$;

б) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}$.

6.14. Докажите, что $\sqrt{\sqrt[3]{4}-1} + \sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}} = \sqrt{3}$.

6.15. Докажите следующие *тождества Рамануджана*:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$;

б) $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}\right)$;

в) $\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

г) $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$;

д) $\sqrt{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1\right)$;

е) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}} + \sqrt[5]{\frac{3}{25}} - \sqrt[5]{\frac{9}{25}}$.

6.4. Доказательства иррациональности и рациональности

6.16. Докажите, что следующие числа иррациональны: а) $\sqrt{p}$, где p — простое число; б) $\sqrt{p_1 \ldots p_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа; в) $\sqrt{\frac{p_1 \cdots p_k}{p_{k+1} \cdots p_n}}$, где $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа.

6.17. Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ иррационально.

6.18. Выясните, рационально ли число

$$\alpha = \sqrt[3]{4+\sqrt{15}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{15}}.$$

6.19. а) Докажите, что если числа a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рациональные, то числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональные.

б) Докажите, что если числа a, b, c, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ рациональные, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ тоже рациональные.

в) Докажите, что если числа $a_1, \ldots, a_n$, $\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n}$ рациональные, то числа $\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}$ тоже рациональные.

6.20. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Докажите, что число $\sqrt{p_k}$ нельзя представить в виде суммы рационального числа и чисел $\sqrt{p_{i_1} \ldots p_{i_s}}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant k-1$, с рациональными коэффициентами.

6.5. Сопряжённые числа

6.21. а) Пусть p — простое число. Докажите, что никакое число нельзя представить двумя разными способами в виде $m + n\sqrt{p}$, где m и n — рациональные числа.

б) Докажите аналогичное утверждение для представлений в виде $m + n\sqrt{p}$, где p — произведение попарно различных простых чисел.

Таким образом, для каждого числа z вида $m + n\sqrt{p}$, где m и n — рациональные числа, а p — произведение попарно различных простых чисел, можно определить *сопряжённое число* $\bar{z} = m - n\sqrt{p}$.

6.22. Докажите, что если $(a + b\sqrt{p})^n = A_n + B_n\sqrt{p}$, где p — произведение различных простых чисел, а числа a, b, A_n, B_n рациональные, то $(a - b\sqrt{p})^n = A_n - B_n\sqrt{p}$.

6.23. Найдите первую цифру после запятой числа $(2 + \sqrt{3})^{1000}$.

6.24. Докажите, что рациональных чисел x, y, z и t не может выполняться равенство

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}.$$

6.25. Докажите, что для натуральных чисел m и n не может выполняться равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$.

6.26. а) Докажите, что $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$, где k — некоторое натуральное число.

б) Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что $(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$, где k — некоторое натуральное число.

6.27. Докажите, что для любого натурального n число $[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$ делится на 2^{n+1} и не делится на 2^{n+2}.

6.6. Последовательность Фарея

6.28. Расположим в порядке возрастания все рациональные числа, которые заключены между нулём и единицей и знаменатели которых

не превосходят n. Пусть a/b и c/d — два соседних числа в этой последовательности. Докажите, что $|bc - ad| = 1$

Последовательность чисел из задачи 6.28 называют *последовательностью Фарея* и обозначают F_n.

6.29. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ — три последовательные дроби в последовательности Фарея. Докажите, что $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$.

6.30. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ — две последовательные дроби в последовательности Фарея F_n. Докажите, что $b + d > n$.

6.31. В последовательности Фарея F_n вычислите дроби, соседние с 1/2.

6.32. а) Докажите, что сумма знаменателей дробей в последовательности Фарея в 2 раза меньше суммы числителей.

б) Докажите, что сумма дробей в последовательности Фарея в 2 раза меньше количества её членов.

6.33. Докажите, что количество членов в последовательности Фарея F_n равно $\sum_{q=2}^{n} \varphi(q)$.

6.7. Задачи с целыми частями

6.34. Пусть α и β — положительные числа. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) каждое натуральное число ровно один раз встречается среди чисел $[\alpha]$, $[\beta]$, $[2\alpha]$, $[2\beta]$, $[3\alpha]$, $[3\beta]$, ...

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, причём α иррационально.

6.35. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — положительные числа, обладающие следующим свойством: каждое натуральное число ровно один раз встречается среди чисел $[\alpha]$, $[\beta]$, $[2\alpha]$, $[2\beta]$, $[3\alpha]$, $[3\beta]$, ... Докажите, что $k \leqslant 2$.

Решения

6.1. Вместо знака неравенства поставим знак $\vee$ и будем рассматривать только преобразования, которые сохраняют знак неравенства.

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \vee \sqrt{11} \iff 2 + 2\sqrt{6} + 3 \vee 11 \iff 2\sqrt{6} \vee 6 \iff 6 \vee 9$. Значит, $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{11}$.

б) $\sqrt{6}+2\sqrt{7} \vee \sqrt{10}+\sqrt{21} \iff 6+4\sqrt{42}+28 \vee 10+2\sqrt{210}+21 \iff 3+$ $+4\sqrt{42} \vee 2\sqrt{210} \iff 9+24\sqrt{42}+672 \vee 840 \iff 24\sqrt{42} \vee 159 \iff 24\,192 \vee 25\,281$. Значит, $\sqrt{6}+2\sqrt{7} < \sqrt{10}+\sqrt{21}$.

в) $\sqrt{11} \vee 5+\sqrt[3]{5} \iff \sqrt[3]{5} \vee 5-\sqrt{11} \iff 5 \vee 125-75\sqrt{11}+165-11\sqrt{11} \iff$ $86\sqrt{11} \vee 285 \iff 81\,356 \vee 81\,225$. Значит, $\sqrt{11} > 5+\sqrt[3]{5}$.

6.2. Если $a < 2$, то $\sqrt{2+a} < \sqrt{2+2} = 2$. Поэтому $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} < 2$.

6.3. а) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

в) Нужно воспользоваться тем, что

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}) =$$
$$= \big((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5\big)\big((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5\big) =$$
$$= (2-2\sqrt{6}+3-5)(2+2\sqrt{6}+3-5) = -24.$$

6.4. а) Домножьте знаменатель на $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$.

б) Домножьте знаменатель на $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$.

6.5. а) Домножьте знаменатель на $\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}$.

б) Домножьте знаменатель на $\sqrt[2n+1]{x^{2n}}-\sqrt[2n+1]{x^{2n-1}y}+\sqrt[2n+1]{x^{2n-2}y^2}-\ldots+$ $+\sqrt[n]{y^{2n}}$.

6.6. Домножьте знаменатель на $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})(x^2+x\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y^4})$.

6.7. Воспользовавшись тождеством из задачи 5.4, запишем

$$x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} = (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{yz}-\sqrt[3]{zx}).$$

После этого остаётся избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}}$. Это мы уже делали в задаче 6.4: нужно домножить знаменатель на

$$(x+y+z)^2+3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}+9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

6.8. После домножения числителя и знаменателя на некое натуральное число можно считать, что в знаменателе получится сумма с целыми коэффициентами квадратных корней из простых чисел $p_1, \ldots, p_k$ и произведений этих квадратных корней. Применим индукцию по k. Знаменатель можно представить в виде $a+b\sqrt{p_k}$, где числа a и b выражаются через квадратные корни из $p_1, \ldots, p_{k-1}$. Равенство

$$\frac{1}{a+b\sqrt{p_k}} = \frac{a-b\sqrt{p_k}}{a^2-b^2p_k}$$

позволяет сделать шаг индукции, если $a^2 - b^2 p_k \neq 0$. Ясно также, что можно считать, что $b \neq 0$. Остаётся рассмотреть случай, когда $p_k = a^2/b^2$, т.е. $\sqrt{p_k} = \pm a/b$. По условию $a + b\sqrt{p_k} \neq 0$, поэтому $\sqrt{p_k} = a/b$ и $a + b\sqrt{p_k} = 2a$. Шаг индукции очевиден и в этом случае.

6.9. В левой части стоит положительное число, поэтому достаточно проверить, что после возведения обеих частей в квадрат получим тождество. Это легко проверяется, поскольку $(a + \sqrt{a^2 - b})(a - \sqrt{a^2 - b}) = b$.

6.10. Воспользовавшись формулой из задачи 6.9, получим следующие ответы: а) $1 + \sqrt{2}$; б) $2 + \sqrt{5}$; в) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

6.11. Число $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ положительно, а его квадрат равен $4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{16 - 7} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{9} = 2$.

6.12. Тождество $(2 \pm \sqrt{2})^3 = 20 \pm 14\sqrt{2}$ показывает, что $\sqrt[3]{20 \pm 14\sqrt{2}} = 2 \pm \sqrt{2}$. Поэтому рассматриваемое число равно 4.

6.13. Пусть $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$. Тогда $x^3 = 2a + 3\sqrt[3]{a^2 - b}$. В случае а) получаем $x^3 = 6 + x$, а в случае б) получаем $x^3 = 12 + 5x$. Первое уравнение имеет корень $x = 2$, а второе уравнение имеет корень $x = 3$. Поэтому достаточно проверить, что других (вещественных) корней у этих уравнений нет. Легко проверит, что $\dfrac{x^3 - x - 6}{x - 2} = x^2 + 2x + 3$ и $\dfrac{x^3 - 5x - 12}{x - 3} = x^2 + 3x + 2$. У этих квадратных трёхчленов нет вещественных корней.

6.14. Вычислим квадрат выражения в левой части, воспользовавшись тем, что $\sqrt{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}} = \sqrt{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4} - 1)} = \sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}$. Получаем:

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{2} + 1)^2 &= (\sqrt[3]{4} - 1)(\sqrt[3]{4} + 1 + 2\sqrt[3]{2}) = \\ &= \sqrt[3]{16} - 1 + 2\sqrt[3]{8} - 2\sqrt[3]{2} = \\ &= 2\sqrt[3]{2} - 1 + 4 - 2\sqrt[3]{2} = 3.\end{aligned}$$

6.15. а) Несложно проверить, что $(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3 = 9(\sqrt[3]{2} - 1)$.

б) Несложно проверить, что $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{25})^2 = 9(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})$. Кроме того, неравенство $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{20} > \sqrt[3]{25}$ легко проверяется посредством возведения обеих частей в куб.

в) Несложно проверить, что $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^6 = 9(7\sqrt[3]{20} - 19)$; члены, содержащие $\sqrt[3]{50}$, взаимно сокращаются.

г) Прежде всего отметим, что $3 - 2\sqrt[4]{5} > 0$. Затем несложно проверить, что $(\sqrt[4]{5} - 1)^4(3 + 2\sqrt[4]{5}) = 10\sqrt[4]{25} - 22 = (\sqrt[4]{5} + 1)^4(3 - 2\sqrt[4]{5})$; члены, содержащие $\sqrt[4]{5}$, взаимно сокращаются; члены, содержащие $\sqrt[4]{125}$, тоже.

д) Несложно проверить, что $(\sqrt[3]{98} - \sqrt[3]{28} - 1)^2 = 9(\sqrt[3]{28} - 3) = 9(\sqrt[3]{28} - \sqrt[3]{27})$; члены, содержащие $\sqrt[3]{14}$, взаимно сокращаются.

Покажем, что $\sqrt[3]{98} > \sqrt[3]{28} + 1$, т.е. $\sqrt[3]{14}(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}) > 1$. Домножив обе части на положительное число $\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}$, перейдём к неравенству

$5\sqrt[3]{14} > \sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}$, т.е. $4\sqrt[3]{14} > \sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{4}$. Это неравенство легко доказывается, поскольку $4\sqrt[3]{14} > 8$, а $\sqrt[3]{49} < 6$ и $\sqrt[3]{4} < 2$.

е) Несложно проверить, что $(1 + \sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{9})^3 = 10 - 5\sqrt[5]{3} = 5(\sqrt[5]{32} - \sqrt[5]{27})$.

6.16. а) Предположим, что $\sqrt{p} = r/s$ — несократимая дробь. Тогда $r^2 = ps^2$, поэтому r делится на p (здесь используется задача 4.8). Значит, ps^2 делится на p^2. Поэтому s делится на p, что противоречит несократимости дроби r/s.

б) Из равенства $r^2 = p_1 \dots p_k s^2$ следует, что r делится на p_1. Поэтому $p_2 \dots p_k s^2$ делится на p_1. Число $p_2 \dots p_k$ взаимно просто с p_1, поэтому s делится на p_1.

в) Из равенства $p_{k+1} \dots p_n r^2 = p_1 \dots p_k s^2$ следует, что r делится на p_1, поскольку число $p_{k+1} \dots p_n$ делится на p_1.

6.17. Предположим, что $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = r$, где r — рациональное число. Тогда $(\sqrt[3]{3})^3 = (r - \sqrt{2})^3$, т.е. $3 = r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 6r - 2\sqrt{2}$. Поэтому $\sqrt{2} = \dfrac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2}$ — рациональное число, чего не может быть.

6.18. Ответ: иррационально. Пусть $\alpha_1 = \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}$ и $\alpha_2 = \sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}$. Тогда $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 = 8$ и $\alpha_1^3\alpha_2^3 = 1$, поэтому $\alpha_1\alpha_2 = 1$. Следовательно, $(\alpha_1 + \alpha_2)^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 8 + 3(\alpha_1 + \alpha_2)$. Таким образом, $\alpha^3 = 8 + 3\alpha$. Поэтому остаётся доказать, что многочлен $x^3 - 3x - 8$ не имеет рациональных корней. Согласно задаче 10.3 рациональные корни этого многочлена — целые числа, являющиеся делителями числа 8. Непосредственная проверка показывает, что числа ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 не являются корнями этого многочлена.

6.19. а) Пусть $\sqrt{a} + \sqrt{b} = r$ — рациональное число. Если $r = 0$, то $a = b = 0$. Поэтому будем предполагать, что $r \neq 0$. Возведём в квадрат обе части равенства $\sqrt{a} = r - \sqrt{b}$. В результате получим $a = r^2 - 2r\sqrt{b} + b$, а значит, $\sqrt{b} = \dfrac{r^2 + b - a}{2r}$ — рациональное число.

б) Пусть $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = r$ — рациональное число. Достаточно рассмотреть случай, когда $r \neq 0$. Возведём в квадрат обе части равенства $\sqrt{a} + \sqrt{b} = r - \sqrt{c}$. Получим

$$a + 2\sqrt{ab} + b = r^2 - 2r\sqrt{c} + c. \qquad (1)$$

Затем возведём в квадрат обе части равенства $2\sqrt{ab} = r^2 + c - a - b - 2r\sqrt{c}$. Получим

$$4ab = (r^2 + c - a - b)^2 + 4r^2c - 2r(r^2 + c - a - b)\sqrt{c}. \qquad (2)$$

Если $r^2 + c - a - b \neq 0$, то равенство (2) показывает, что число $\sqrt{c}$ рационально. Если же $r^2 + c = a + b$, то из равенства (1) следует, что $2\sqrt{ab} = -2r\sqrt{c}$, причём $r > 0$. Следовательно, $\sqrt{ab} = 0$ и $\sqrt{c} = 0$. В частности, число $\sqrt{c}$ рационально. Рациональность чисел $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ доказывается аналогично.

в) Можно считать, что все числа $a_1, \ldots, a_n$ отличны от нуля. Достаточно доказать, что число $\sqrt{a_1}$ рационально. Положим $x_1 = \sqrt{a_1}, \ldots, x_n = \sqrt{a_n}$ и $y = \sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n}$. Рассмотрим произведение

$$f(y, x_1, \ldots, x_n) = \prod (y - x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n), \tag{1}$$

где берутся все возможные комбинации знаков плюс и минус. Это произведение является многочленом с целыми коэффициентами от $y, x_1, x_2^2, \ldots, x_n^2$. Выделяя члены с чётными степенями x_1 и с нечётными, получим

$$f(y, x_1, \ldots, x_n) = g(y, x_1^2, \ldots, x_n^2) - x_1 h(y, x_1^2, \ldots, x_n^2). \tag{2}$$

В произведение (1) входит множитель $y - x_1 - x_2 - \ldots - x_n = 0$. Поэтому $f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$. По условию числа $y, x_1^2, \ldots, x_n^2$ рациональны. Поэтому если $h(y, x_1^2, \ldots, x_n^2) \neq 0$, то число

$$x_1 = g(y, x_1^2, \ldots, x_n^2)/h(y, x_1^2, \ldots, x_n^2)$$

рационально.

Предположим теперь, что $h(y, x_1^2, \ldots, x_n^2) = 0$. Воспользовавшись соотношением (2), получаем

$$f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y, -x_1, x_2, \ldots, x_n) = -2x_1 h(y, x_1^2, \ldots, x_n^2).$$

Значит,

$$\begin{aligned} h(y, x_1^2, \ldots, x_n^2) &= \frac{1}{2x_1} f(y, -x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= \frac{1}{2x_1} \prod (y + x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n) = \\ &= \frac{1}{2x_1} \prod \big(2x_1 + (x_2 \pm x_2) + \ldots + (x_n \pm x_n)\big); \end{aligned}$$

при записи последнего равенства мы воспользовались тем, что $y = x_1 + \ldots + x_n$. Значит, одно из выражений $2x_1 + (x_2 \pm x_2) + \ldots + (x_n \pm x_n)$ обращается в нуль. Но $x_1 > 0$, а $x_k \pm x_k \geqslant 0$. Значит, $h(y, x_1^2, \ldots, x_n^2) \neq 0$.

6.20. Применим индукцию по k. Сначала рассмотрим случай $k = 2$. Предположим, что $\sqrt{p_2} = a + b\sqrt{p_1}$, где числа a и b рациональны. Задача 6.16 в) показывает, что $ab \neq 0$. После возведения в квадрат получаем $p_2 = a^2 + 2ab\sqrt{p_1} + b^2 p_1$, а значит, число $\sqrt{p_1}$ рационально, чего не может быть.

Предположим теперь, что $\sqrt{p_{k+1}} = a + b\sqrt{p_k}$, где a и b выражаются через $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{k-1}}$. Если $b = 0$, то получаем, что $\sqrt{p_{k+1}}$ выражается через $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{k-1}}$, что противоречит предположению индукции. Если $a = 0$, то $\sqrt{p_{k+1}} = (a' + b'\sqrt{p_{k-1}})\sqrt{p_k}$. Если снова $a' = 0$ и т.д., то в конце концов получим $\sqrt{p_{k+1}} = r\sqrt{p_1 \ldots p_k}$, где число r рациональное. Этого не может быть (задача 6.16 в). Поэтому (возможно, после изменения нумерации чисел $p_1, \ldots, p_k$) имеем $\sqrt{p_{k+1}} = a + b\sqrt{p_k}$, где $ab \neq 0$. Значит, $p_{k+1} = a^2 + 2ab\sqrt{p_k} + b^2 p_k$,

т.е. $\sqrt{p_k} = \dfrac{p_{k+1} - a^2 - p_k b^2}{2ab}$. Избавившись от иррациональности в знаменателе (задача 6.8), мы получим выражение $\sqrt{p_k}$ через $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{k-1}}$, что противоречит предположению индукции.

6.21. Пусть $m+n\sqrt{p} = m_1+n_1\sqrt{p}$, причём числа m, n, m_1 и n_1 рациональные. Если $m_1 \neq m$ или $n_1 \neq n$, то $\sqrt{p} = \dfrac{m - m_1}{n_1 - n}$. Это равенство выполняться не может, поскольку $\sqrt{p}$ — иррациональное число.

6.22. Легко проверить, что $\bar{z}_1\,\bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$, т. е. если $(a + b\sqrt{p})(c + d\sqrt{p}) = A + B\sqrt{p}$, то $(a - b\sqrt{p})(c - d\sqrt{p}) = A - B\sqrt{p}$. Следовательно,

$$a_n + b_n = (2 + \sqrt{p})^n + (2 - \sqrt{p})^n = 2A_n$$

— целое число.

6.23. Ответ: 9. Пусть $(2 + \sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$, где A_n и B_n — натуральные числа. Согласно задаче 6.22 $(2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$. Поэтому $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ — натуральное число. Но $2 - \sqrt{3} \approx 0,2679 < 0,3$, поэтому $(2 - \sqrt{3})^{1000} \approx 0,0\ldots$ (и дальше идёт ещё несколько нулей).

6.24. Если для рациональных чисел x, y, z и t выполняется указанное равенство, то согласно задаче 6.22 для тех же самых чисел должно выполняться равенство

$$(x - y\sqrt{2})^2 + (z - t\sqrt{2})^2 = 5 - 4\sqrt{2}.$$

Но $5 - 4\sqrt{2} < 0$, а $(x - y\sqrt{2})^2 + (z - t\sqrt{2})^2 \geqslant 0$.

6.25. В самом деле, пусть $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$. Тогда согласно задаче 6.22 $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$. Прийти к противоречию теперь можно разными способами. Во-первых, можно заметить, что $|5 - 3\sqrt{2}| < 1$ и $|3 - 5\sqrt{2}| > 1$. Во-вторых, можно перемножить равенства $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ и $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$; в результате получим $7^m = (-41)^n$.

6.26. а) Если $(\sqrt{2} + 1)^n = x\sqrt{2} + y$, то согласно задаче 6.22 $(\sqrt{2} - 1)^n = (-1)^n(1-\sqrt{2})^n = (-1)^n(y+x\sqrt{2}) = (-1)^n(\sqrt{y^2}-\sqrt{2x^2})$. При этом $y^2-2x^2 = (y + x\sqrt{2})(y - x\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^n(1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n$. Таким образом, если n чётно, то $(\sqrt{2} - 1)6n = \sqrt{y^2} - \sqrt{2x^2}$ и $y^2 - 2x^2 = 1$, а если n нечётно, то $(\sqrt{2} - 1)6n = \sqrt{2x^2} - \sqrt{y^2}$ и $2x^2 - y^2 = 1$.

б) Равенства

$$(a\sqrt{m} \pm b\sqrt{m-1})(c\sqrt{m} \pm d\sqrt{m-1}) = acm + bd(m-1) \pm (ad + bc)\sqrt{m(m-1)},$$
$$(a \pm b\sqrt{m(m-1)})(c\sqrt{m} \pm d\sqrt{m-1}) = \big(ac + bd(m-1)\big)\sqrt{m} \pm (ad + bcm)\sqrt{m-1}$$

показывают, что $(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = a\sqrt{m} \pm b\sqrt{m-1}$ при нечётном n и $(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = a \pm b\sqrt{m(m-1)}$ при чётном n (a и b — натуральные числа). В обоих случаях получаем $(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, где x и y — натуральные числа ($x = a^2m$ и $y = b^2(m-1)$ при нечётном n, $x = a^2$ и

$y = b^2m(m-1)$ при чётном n). При этом $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \big((\sqrt{m} - \sqrt{m-1})(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})\big)^n = 1$.

6.27. Число $(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$ целое, причём $-1 < (1-\sqrt{3})^{2n+1} < 0$. Поэтому $[(1+\sqrt{3})^{2n+1}] = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$. Равенство $(1 \pm \sqrt{3})^2 = 2(2 \pm \sqrt{3})$ показывает, что

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} = 2^n\big((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n\big).$$

Ясно, что $(1 \pm \sqrt{3})(2 \pm \sqrt{3})^n = a \pm b\sqrt{3}$, где a и b — некоторые натуральные числа. Достаточно доказать, что число a нечётное. Равенство $a^2 - 3b^2 = -2$ показывает, что числа a и b одной чётности. Эти числа не могут быть оба чётными, поскольку тогда число $a^2 - 3b^2$ делилось бы на 4.

6.28. Можно считать, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} \leqslant \frac{a+1}{b}$, которое выполняется при $a + 1 \leqslant b$, показывает, что $b \neq d$, т.е. знаменатели двух соседних дробей не могут быть одинаковыми.

Докажем требуемое утверждение индукцией по n. При $n = 3$ получаем числа $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$; для них утверждение легко проверяется. Предположим, что утверждение доказано для $n-1$. При переходе от $n-1$ к n к старому набору чисел добавляются некоторые числа вида $\frac{k}{n}$. Согласно сделанному выше замечанию два новых числа не могут быть соседними, поэтому $\frac{a}{b} < \frac{k}{n} < \frac{c}{d}$, где $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — соседние числа из старого списка. Нужно доказать, что оба числа $A = kb - an$ и $B = dn - kd$ равны 1 (ясно, что эти числа положительны). Предположим, что одно из них больше 1. Тогда $b + d < bB + dA = (bc - ad)n = n$, поскольку $bc - ad = 1$ по предположению индукции. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ показывает, что числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не могут быть соседними. Приходим к противоречию.

6.29. Согласно задаче 6.28 $bx - ay = 1$ и $cy - dx = 1$. Решая эту систему линейных уравнений относительно x и y, получаем $x = \frac{a+c}{bc-ad}$ и $y = \frac{b+d}{bc-ad}$.

6.30. Ясно, что $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Поэтому если $b + d \leqslant n$, то дробь $\frac{a+c}{b+d}$ входит в последовательность Фарея F_n, причём она расположена между дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$

6.31. О т в е т: $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2n}$ при чётном n; $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2n-2}$ при нечётном n.

При нечётном n числитель и знаменатель дроби $\frac{n \pm 1}{2n}$ можно сократить на 2; при чётном n то же самое верно для дроби $\frac{n-1 \pm 1}{2n-2}$. Поэтому указанные в ответе дроби входят в последовательность Фарея. Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ — соседние

дроби в последовательности Фарея, то $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd}$. Если $b = 2$ и $d \leqslant n$, то $\frac{1}{bd} \leqslant \frac{1}{2n}$. В случае нечётного n доказательство завершено. А в случае чётного n достаточно убедиться, что если $\frac{a}{b} = \frac{1}{2n}$, то $d \neq n$. Но если $a = 1$, $b = 2$ и $d = n$, то $1 = bc - ad = 2c - n$, поэтому n нечётно.

6.32. а) Если дробь p/q входит в последовательность Фарея, то и дробь $(q-p)/q$ тоже входит, поскольку НОД$(q-p,q) =$ НОД(p,q). Поэтому $\sum p = \sum(q-p)$, т.е. $2\sum p = \sum q$, что и требовалось.

б) Аналогично а) получаем $\sum \frac{p}{q} = \sum \frac{q-p}{q}$, т.е. $\sum \frac{p}{q} = \sum 1$. Последняя сумма равна количеству членов в последовательности Фарея.

6.33. Дробь p/q входит в последовательность Фарея, если $1 \leqslant p < q \leqslant n$ и НОД$(p,q) = 1$. Поэтому при фиксированном $q > 1$ количество членов вида p/q равно $\varphi(q)$. Следовательно, количество всех членов равно $\sum_{q=2}^{n} \varphi(q)$.

6.34. Докажем сначала, что из (1) следует (2). Количество значений x, для которых $[x\alpha] \leqslant n$, равно $\frac{n}{\alpha} + \lambda$, где $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{\alpha}$. Количество значений y, для которых $[y\beta] \leqslant n$, равно $\frac{n}{\beta} + \mu$, где $0 \leqslant \mu < \frac{1}{\beta}$. По условию $\frac{n}{\alpha} + \lambda + \frac{n}{\beta} + \mu = n$. Поэтому при $n \to \infty$ получаем $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Если бы число α было рациональным, то из этого равенства мы получили бы $\alpha = \frac{p}{q}$ и $\beta = \frac{p}{p-q}$, где $p > q$ — натуральные числа. Но тогда $[q\alpha] = p = [(p-q)\beta]$. Приходим к противоречию, поэтому α иррационально.

Докажем теперь, что из (2) следует (1). Число $[k\alpha]$ меньше n в точности при $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{\alpha}\right]$. Число $[k\beta]$ меньше n в точности при $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{\beta}\right]$. Поэтому среди рассматриваемых чисел встречается ровно $\left[\frac{n}{\alpha}\right] + \left[\frac{n}{\beta}\right]$ чисел, меньших n. Из соотношения $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ и иррациональности чисел α и β следует, что $\left[\frac{n}{\alpha}\right] + \left[\frac{n}{\beta}\right] = n - 1$. Поэтому среди рассматриваемых чисел встречается 0 чисел, меньших 1; 1 число, меньшее 2; 2 числа, меньших 3, и т.д. Чтобы получить количество чисел, равных n, нужно из количества чисел, меньших $n+1$, вычесть количество чисел, меньших n. В результате получим 1.

6.35. Можно считать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ (неравенства строгие, потому что иначе возникли бы повторения). Число 1 встречается ровно один раз, поэтому $[\alpha_1] = 1$, т.е. $\alpha_1 = 1 + \delta$, где $0 < \delta < 1$.

Пусть $[p\alpha_1] = n$. Тогда $p\alpha_1 < n + 1$. Поэтому $(p+1)\alpha_1 = p\alpha_1 + \alpha_1 < n + 1 + 1 + \delta < n + 3$, а значит, $[(p+1)\alpha_1] \leqslant n + 2$. Таким образом, между

соседними членами последовательности $[\alpha_1]$, $[2\alpha_1]$, $\ldots$ не могут встретиться два последовательных натуральных числа.

Пусть m — наименьшее натуральное число, не встречающееся в последовательности $[\alpha_1]$, $[2\alpha_1]$, $\ldots$ Тогда $[\alpha_1] = 1$, $[2\alpha_1] = 2$, $\ldots$, $[(m-1)\alpha_1] = m-1$ и $[m\alpha_1] = m+1$. Поэтому $(m-1)\alpha_1 < 1$ и $m\alpha_1 \geqslant 1$. Ясно также, что $m = [\alpha_2]$, поскольку $\alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_k$. Таким образом, $\alpha_2 = m + \varepsilon$, где $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Пусть x — произвольное натуральное число, не встречающееся в последовательности $[\alpha_1]$, $[2\alpha_1]$, $\ldots$ Тогда $x = [p\alpha_1] + 1$ и $[(p+1)\alpha_1] > [p\alpha_1] + 1$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что $[p + 1 + (p+1)\delta] > [p + p\delta] + 1$, т.е. $[(p+1)\delta] > [p\delta]$. Таким образом, $p\delta < q \leqslant (p+1)\delta$ для некоторого натурального числа q.

Ясно, что $(p+m-1)\delta = p\delta + (m-1)\delta < q+1$ и $(p+m+1)\delta = (p+1)\delta + m\delta \geqslant q+1$. Возможны два случая.

(1) $(p+m)\delta \geqslant q+1$. В этом случае $(p+m-1)\delta < q+1 \leqslant (p+m)\delta$.

(2) $(p+m)\delta < q+1$. В этом случае $(p+m)\delta < q+1 \leqslant (p+m+1)\delta$.

Следующее за x натуральное число, не встречающееся в последовательности $[\alpha_1]$, $[2\alpha_1]$, $\ldots$, равно $[p'\alpha_1] + 1$, где $p'\delta < q' \leqslant (p'+1)\delta$, причём q' — наименьшее возможное натуральное число, большее q. Мы видим, что в качестве q' можно взять $q+1$. При этом в случае (1) $p' = p+m-1$, а в случае (2) $p' = p+m$. Следовательно, в случае (1) $[p'\alpha_1]+1 = p+m-1+[(p+m-1)\delta] + 1 = p+m+q$, а в случае (2) $[p'\alpha_1]+1 = p+m+[(p+m)\delta]+1 = p+m+q+1$. Напомним, что $x = [p\alpha_1] + 1 = p + [p\delta] + 1 = p + q$. Поэтому следующее за x число, не встречающееся в последовательности $[\alpha_1]$, $[2\alpha_1]$, $\ldots$, равно $x+m$ или $x+m+1$.

Если $[n\alpha_2] = y$, то $n\alpha_2 - 1 < y \leqslant n\alpha_2$. Поэтому $(n+1)\alpha_2 = n\alpha_2 + \alpha_2 < y + 1 + m + 1 = y + m + 2$ и $(n+1)\alpha_2 = n\alpha_2 + \alpha_2 \geqslant y + m$. Таким образом, $(n+1)\alpha_2 = y+m$ или $y+m+1$.

Пусть x_k — k-е число, не встречающееся в последовательности $[\alpha_1]$, $[2\alpha_1]$, $\ldots$, а $y_k = [k\alpha_2]$. Докажем индукцией по k, что $x_k = y_k$. При $k = 1$ это очевидно: $x_1 = m = y_1$. Предположим, что $x_k = y_k$ для некоторого k. Выше было показано, что $x_{k+1} = x_k + m$ или $x_k + m + 1$, а $y_{k+1} = y_k + m$ или $y_k + m + 1$. Среди двух последовательных чисел $x_k + m$ и $x_k + m + 1$ лишь одно может не входить в последовательность $[\alpha_1]$, $[2\alpha_1]$, $\ldots$ Именно оно должно быть как числом x_{k+1}, так и числом y_{k+1}.

Глава 7.

Текстовые задачи

7.1. Решения без вычислений

7.1. В одном стакане 5 ложек чая, в другом 5 ложек молока. Ложку молока перелили из второго стакана в первый, а затем ложку чая с молоком перелили обратно во второй стакан. Чего оказалось больше: чая в молоке или молока в чае?

7.2. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 5 км, вышел пешеход. Из пункта B навстречу ему одновременно с ним выехал велосипедист, скорость которого в 2 раза больше скорости пешехода. Встретив пешехода, он повернул и поехал обратно в B. Доехав до B, велосипедист снова повернул и поехал навстречу пешеходу и т.д. Какой путь проедет велосипедист к тому моменту, когда пешеход придёт в B?

7.2. Вычисления

7.3. Над озёрами летела стая гусей. На каждом озере садилась половина гусей и ещё полгуся, а остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озёрах. Сколько было гусей в стае?

7.4. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились в 70 км от A. Продолжая двигаться с теми же скоростями, они доехали до A и B и повернули обратно. Второй раз они встретились в 90 км от B. Найдите расстояние от A до B.

7.5. Пароход от Горького до Астрахани идёт 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

7.6. Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/час. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/час. A отправляется в путь пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N и M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

а) Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно (если он идёт пешком с той же скоростью, что A и B)?

б) Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы время, затраченное A и B на дорогу в N, было наименьшим (C идёт пешком с той же скоростью, что A и B; время, затраченное на дорогу, считается от момента выхода A и B из M до момента прибытия последнего из них в N)?

7.3. Неравенства

7.7. Города A и B расположены на реке на расстоянии 10 км друг от друга. На что пароходу потребуется больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?

7.8. В деревне A 100 жителей, в деревне B 50 жителей. В каком месте шоссе, соединяющего деревни, нужно построить баню, чтобы общее расстояние, которое нужно пройти всем 150 жителям до бани и обратно, было наименьшим?

7.9. В таблице размером 10×10 записано 100 различных чисел. В каждой строке выбрано наименьшее число и среди них выбрано наибольшее число A. В каждом столбце выбрано наибольшее число и среди них выбрано наименьшее число B. Может ли оказаться, что $A > B$?

7.10. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причём никакие двое не собрали одинакового количества грибов. Докажите, что среди них есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.

7.11. Школьники одного класса ходили в два туристических похода. В каждом походе мальчиков было меньше 2/5 общего количества

участников похода. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше 4/7 общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

7.4. Целочисленные приближения

7.12. В классе провели контрольную работу. Оказалось, что у мальчиков средняя оценка 4; у девочек 3,25; у всех вместе 3,6. Сколько мальчиков и сколько девочек писало контрольную работу, если известно, что в классе больше 30 и меньше 50 человек?

7.13. В отчёте о лыжном забеге сказано, что 96% его участников выполнили норму ГТО. Известно, что эта цифра дана с точностью до 0,5%. Каково наименьшее число участников этого забега?

7.14. В карьере заготовлено 120 гранитных плит по 7 т и 80 плит по 9 т. На железнодорожную платформу можно погрузить до 40 т. Какое наименьшее число платформ потребуется, чтобы вывезти все плиты?

7.15. Груз весом $13,5$ т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках. (Весом пустого ящика можно пренебречь.)

7.16. Десять рабочих должны собрать из деталей 50 изделий. Сначала детали каждого изделия нужно покрасить; на это одному рабочему требуется 10 минут. После окраски детали 5 минут сохнут. На сборку изделия одному рабочему требуется 20 минут. Сколько рабочих нужно назначить малярами и сколько монтажниками, чтобы работа была выполнена в кратчайшее время? (Двое рабочих не могут одновременно красить или монтировать одно и то же изделие.)

7.5. Соответствия

7.17. На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.

7.18. В библиотеке поставили две доски. На одной доске читатель записывает число читателей, которых он застал, войдя в читальный

зал, а на другой — сколько читателей оставалось, когда он уходил из библиотеки. Рано утром и поздно вечером читателей в библиотеке не было. Докажите, что за день на обеих досках появятся одни и те же числа (возможно, в другом порядке).

7.19. Подряд выписаны n чисел, среди которых есть положительные и отрицательные. Подчёркивается каждое положительное число, а также каждое число, сумма которого с несколькими непосредственно следующими за ним числами положительна. Докажите, что сумма всех подчёркнутых чисел положительна.

7.20. Докажите, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^{k+1}$.

Решения

7.1. Из второго стакана убавилось молока ровно столько, сколько в него добавилось чая. Поэтому чая в молоке ровно столько, сколько молока в чае.

7.2. Можно считать, что велосипедист всё время едет в одном направлении (длина пути от этого не меняется). Его скорость в 2 раза больше скорости пешехода, поэтому за то время, за которое пешеход пройдёт 5 км, велосипедист проедет 10 км.

7.3. Мысленно добавим к стае какую-нибудь птицу, например утку, которая летит со стаей до самого последнего озера. Тогда на каждом озере садится ровно половина птиц, причём на седьмом озере садятся две птицы — гусь и утка. Значит, в стае было 2^7 птиц, из них $2^7 - 1 = 127$ гусей.

7.4. Пусть x — расстояние от A до B. До первой встречи оба велосипедиста вместе проехали x км, а до второй — $3x$ км. Значит, велосипедист, выехавший из A, к моменту второй встречи проехал $3 \cdot 70 = 210$ км. С другой стороны, он проехал $x + 90$ км. Поэтому $x = 210 - 90 = 120$ км.

7.5. Ответ: 35. Пусть v — скорость течения реки, u — скорость парохода, l — расстояние от Горького до Астрахани. По условию $\frac{l}{u+v} = 5$ и $\frac{l}{u-v} = 7$; требуется найти l/v. Из системы уравнений $l = 5u + 5v$, $l = 7u - 7v$ находим $l/v = 35$.

7.6. а) Чтобы A и B прибыли в пункт N, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x и проехать на велосипеде одно и то же расстояние $15 - x$. Тогда C до встречи с B тоже должен пройти пешком расстояние x. Поэтому C до встречи с A проедет на велосипеде $15 - 2x$, а после этого A

проедет на велосипеде $15 - x$. Всего A и B вместе проедут на велосипеде $30 - 3x$. За это же время B пройдёт пешком x, поэтому $\frac{30-3x}{15} = \frac{x}{6}$, т.е. $x = 60/11$. B до встречи с C едет $\frac{15-x}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{105}{11} = \frac{7}{11}$ час, а C до встречи с B идёт $\frac{x}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{11} = \frac{10}{11}$ час, поэтому C должен выйти из M за $\frac{3}{11}$ час до того, как A и B отправятся в путь из M.

б) Чтобы A и B затратили на дорогу наименьшее время, они должны прибыть в N одновременно, т.е. они должны пройти пешком одинаковые расстояния. Действительно, пусть A проходит пешком расстояние x и проезжает на велосипеде $15 - x$, а B проходит y и проезжает $15 - y$. Тогда время, затраченное A, равно $\frac{x}{6} + \frac{15-x}{15} = 1 + \frac{x}{10}$, а время, затраченное B, равно $1 + \frac{y}{10}$. Нас интересует меньшее из этих чисел; оно должно быть наименьшим. За то же самое время, за которое A проходит пешком расстояние x, B и C успевают проехать на велосипеде расстояние $(15 - y) + (15 - y - x)$. Поэтому $\frac{30-x-2y}{15} = \frac{x}{6}$, т.е. $7x + 4y = 60$. Прямая $x = y$ пересекает прямую $7x + 4y = 60$ в точке $(11/10, 11/10)$. Для любой другой точки прямой $7x + 4y = 60$ координата x или координата y будет больше.

Задача о том, когда должен выйти C, чтобы A и B прибыли одновременно, — это в точности задача а).

7.7. Пусть скорость парохода равна v, скорость течения реки равна w. Если $v \leqslant w$, то пароход вообще не сможет плыть против течения. Если же $v > w$, то на путь из A в B и обратно требуется время

$$\frac{10}{v+w} + \frac{10}{v-w} = \frac{20}{v^2 - w^2} > \frac{20}{v},$$

а на то, чтобы проплыть 20 км по озеру, требуется время $20/v$.

7.8. Пусть расстояние между деревнями равно a. Предположим, что баня построена на расстоянии x от деревни A $(0 \leqslant x \leqslant a)$. Тогда общее расстояние равно $200x + 100(a - x) = 100x + 100a$. Оно минимально, когда $x = 0$. Это означает, что баню нужно построить в деревне A.

7.9. Нет, не может. Пусть на пересечении строки, в которой стоит число A, и столбца, в котором стоит число B, стоит число x. Тогда $A \leqslant x \leqslant B$.

7.10. Пусть $a_1 > a_2 > \ldots > a_7$ — количества грибов, собранных грибниками. Если $a_3 \geqslant 16$, то $a_2 \geqslant 17$ и $a_1 \geqslant 18$, поэтому $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 51$. Если $a_3 \leqslant 15$, то $a_4 \leqslant 14$, $a_5 \leqslant 13$, $a_6 \leqslant 12$ и $a_7 \leqslant 11$, поэтому $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leqslant 50$, а значит, $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 50$.

7.11. Первое решение. По условию в каждом походе мальчиков было меньше 2/3 девочек, участвовавших в походе. Следовательно, в каждом походе мальчиков было меньше 2/3 всех девочек, учащихся в классе. Каждый

мальчик был хотя бы в одном походе, поэтому мальчиков в классе меньше 4/3 всех девочек, т.е. мальчиков меньше 4/7 общего числа учеников.

Второе решение. Пусть всего в классе x мальчиков и y девочек; в первом походе было x_1 мальчиков и y_1 девочек, во втором — x_2 и y_2. По условию $5x_1 < 2(x_1 + y_1)$, поэтому $3x_1 < 2y_1 \leqslant 2y$. Аналогично $3x_2 < 2y$. Следовательно, $3(x_1 + x_2) < 4y$. Кроме того, по условию $x_1 + x_2 \geqslant x$. Поэтому $3x < 4y$, т.е. $7x < 4(x + y)$.

7.12. Пусть в классе x мальчиков и y девочек. Тогда $\frac{4x + 3,25y}{x + y} = 3,6$, т.е. $8x = 7y$. Значит, $x = 7a$ и $y = 8a$ для некоторого целого a. Поэтому число $x + y = 15a$ делится на 15. Единственное число, делящееся на 15, которое больше 30 и меньше 50, — это 45. Таким образом, $x = 21$ и $y = 24$.

7.13. Пусть в забеге участвовало n лыжников, причём k из них не выполнили норму ГТО. По условию $3,5 \leqslant 100k/n \leqslant 4,5$. Значит, $k \geqslant 1$ и $n \geqslant \frac{100k}{4,5} > 22,2k \geqslant 22,2$. Поэтому $n \geqslant 23$. Если в забеге участвовало 23 лыжника, из которых норму ГТО не выполнили только один, то требуемое условие выполняется.

7.14. На одну платформу нельзя погрузить 6 плит даже по 7 т. Поэтому нужно по крайней мере $200/5 = 40$ платформ. Сорока платформ достаточно: на каждую платформу можно погрузить 3 плиты по 7 т и 2 плиты по 9 т.

7.15. Выделим 8 машин и будем последовательно их грузить, причём каждый раз тот ящик, который уже нельзя погрузить, будем ставить рядом с машиной. Погруженные ящики вместе с ящиками, стоящими рядом с машинами, весят более $8 \cdot 1,5 = 12$ т, поэтому оставшиеся ящики весят менее 1,5 т; их можно увезти на одной полуторатонке. Поскольку $4 \cdot 350 = 1400 < 1500$, на одной машине можно увезти любые 4 ящика. Значит, 8 ящиков, стоящих рядом с машинами, можно увезти на двух оставшихся полуторатонках.

7.16. Ответ: 3 маляра и 6 монтажников (один рабочий лишний, т.е. можно назначить 4 маляра и 6 монтажников или 3 маляра и 7 монтажников). Легко проверить, что 3 маляра и 6 монтажников могут выполнить работу за 195 минут. Действительно, через 15 минут после начала работы маляров 3 изделия готовы к сборке и 3 монтажника соберут их через 20 минут. После этого к сборке будут готовы 6 изделий, причём монтажникам никогда уже не придётся ждать, пока маляры закончат покраску очередного изделия. Через $15 + 20 + 140 = 175$ минут после начала работы будет смонтировано$3 + 7 \cdot 6 = 45$ изделий. Чтобы смонтировать 5 оставшихся изделий, нужно ещё 20 минут (этим смогут заниматься только 5 монтажников).

Если маляров меньше трёх, то покраска займёт не менее 250 минут, а если монтажников меньше шести, то монтаж займёт не менее 200 минут.

7.17. Начнём разбор задач с того, что произвольный школьник расскажет одну из решённых им задач. Пусть этот школьник решил задачи a_1 и a_2,

а рассказал он задачу a_1. Тогда есть ровно один школьник, который тоже решил задачу a_2 (и ещё задачу a_3). Этот школьник расскажет задачу a_2. Затем школьник, который решил задачи a_3 и a_4, расскажет задачу a_3 и т.д. Так мы дойдём до n-го школьника, который решил задачи a_n и a_k, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Нужно понять, что делать, если $n < 20$. Ясно, что $k = 1$. Действительно, задачу a_k, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, решили два школьника с номерами $k-1$ и k. Пусть n-й школьник расскажет задачу a_n. Для оставшихся школьников и оставшихся задач выполняется то же самое условие: каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Поэтому можно повторить то же самое и т.д.

7.18. Можно считать, что всегда выходит самый последний из пришедших в библиотеку читателей. Действительно, не имеет значения, кто именно запишет на доске число читателей, остающихся в зале; один читатель может перепоручить это другому — результат от этого не изменится. Тогда каждый читатель на обеих досках запишет одно и то же число.

7.19. Пусть a_1, a_2, ..., a_n. Подчеркнём число a_i $k+1$ чертами, если k — наименьшее число, для которого $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+k} > 0$ (положительное число a_1 подчёркивается одной чертой). Ясно, что если число a_i подчёркнуто $k+1$ чертами, то числа a_{i+1}, a_{i+2}, $\ldots a_{i+k}$ подчёркнуты соответственно k, $k-1$, ..., 2, 1 чертами. Подчёркнутые числа разобьём на группы следующим образом. Сначала возьмём числа, подчёркнутые наибольшим числом черт (пусть это число черт равно K), и следующие за каждым из них $K-1$ чисел. Затем возьмём числа, подчёркнутые $K-1$ чертами, и следующие за каждым из них $K-2$ чисел, и т.д. Сумма чисел в каждой группе положительна.

7.20. Сопоставим цифре числа из первой последовательности нуль числа из второй последовательности следующим образом. Напишем после данной цифры нуль. В результате получим число из второй последовательности с отмеченным нулём. Нашей цифре мы сопоставляем именно этот нуль. Наоборот, нулю числа из второй последовательности сопоставим цифру числа из первой последовательности следующим образом. Отметим цифру, которая стоит перед данным нулём, и после этого нуль вычеркнем. В результате получим число из первой последовательности с отмеченной цифрой. Нашему нулю мы сопоставляем именно эту цифру. Эти операции взаимно обратны, поэтому мы получаем взаимно однозначное соответствие между цифрами числа первой последовательности и нулями чисел второй последовательности.

Глава 8.

Неравенства

8.1. Неравенство $x + 1/x \geqslant 2$

Напомним, что согласно задаче 1.1 для всех $x > 0$ выполняется неравенство $x + 1/x \geqslant 2$.

8.1. При каких n существуют положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 3?$$

8.2. Докажите, что если числа $a_1, \ldots, a_n$ положительны и $a_1 \ldots a_n = 1$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

8.3. Докажите, что если $x^5 - x^3 + x = 2$, то $3 < x^6 < 4$.

8.4. а) Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_3 + x_1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

б) Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, причём $n \geqslant 4$, то

$$\frac{x_1}{x_2 + x_n} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \frac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geqslant 2.$$

8.2. Неравенство треугольника

Будем говорить, что положительные числа a, b, c удовлетворяют *неравенству треугольника*, если $a + b > c$, $b + c > a$ и $c + a > b$. На геометрическом языке это означает, что из отрезков длиной a, b, c можно составить треугольник.

8.5. Докажите, что положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству треугольника тогда и только тогда, когда $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$.

8.6. Докажите, что если для положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n ($n \geqslant 3$) выполняется неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4),$$

то любые три из этих чисел удовлетворяют неравенству треугольника.

8.7. Неравенство

$$Aa(Bb + Cc) + Bb(Cc + Aa) + Cc(Aa + Bb) > \frac{1}{2}(ABc^2 + BCa^2 + CAb^2),$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ — данные числа, выполняется для всех $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Можно ли из отрезков a, b, c составить треугольник?

8.3. Неравенство Коши

8.8. Докажите неравенство $xy \leqslant (x^2 + y^2)/2$.

8.9. Докажите неравенство $\left(\sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k b_i^2\right)$.

Неравенство из задачи 8.9 называют *неравенством Коши*. Другие его доказательства приведены в задачах 1.9 и 5.12.

8.10. Докажите неравенство

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{n}.$$

8.11. Пусть x_1, ..., x_n — положительные числа. Докажите неравенство

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

8.12. Пусть $S = a_1 + \ldots + a_n$, где a_1, ..., a_n — положительные числа и $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

8.4. Монотонность

8.13. Пусть x и y — произвольные вещественные числа. Докажите, что
$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\frac{x^3+y^3}{2}\leqslant\frac{x^6+y^6}{2}.$$

8.5. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Их *средним арифметическим* называют число $A = \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$, а их *средним геометрическим* называют число $G = \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$. В 1821 г. Коши доказал неравенство $A \geqslant G$. Доказательство Коши использовало индукцию, но не обычным способом: сначала доказывалось, что если утверждение верно для $n = 2^m$, то оно верно и для $n = 2^{m+1}$, а затем доказывалось, что если утверждение верно для n, то оно верно и для $n-1$ (см. решение задачи 13.10).

8.14. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Докажите неравенство $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$.

8.15. Пусть $a, b > 0$. Докажите, что $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

8.16. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ имеют место неравенства
$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)+1.$$

8.17. Пусть $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n$ — положительные числа. Докажите, что
$$\frac{1}{W}(w_1a_1+\ldots+w_na_n)\geqslant(a_1^{w_1}\ldots a_n^{w_n})^{1/W},$$
где $W = w_1+\ldots+w_n$.

При $w_1 = \ldots = w_n = 1$ получаем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, поэтому неравенство из задачи 8.17 является обобщением неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

8.18. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — попарно различные положительные числа. Для $x > 0$ положим $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}$. Выберем a и α так, чтобы графики функций $y = f(x)$ и $y = ax^{\alpha}$ касались при $x = x_0$. Докажите, что $f(x) \geqslant ax^{\alpha}$, причём равенство достигается только при $x = x_0$.

См. также задачи 13.10, 25.21.

8.6. Неравенства, имеющие геометрическую интерпретацию

8.19. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b}$.

8.7. Циклические неравенства

8.20. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

8.21. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

8.22. Пусть $0 \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant 1$. Докажите, что при $n \geqslant 3$

$$x_1 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1 \leqslant [n/2].$$

8.23. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$3 + (a + b + c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geqslant \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}.$$

8.8. Разные неравенства

8.24. Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа, причём $a/b < c/d$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

8.25. Докажите неравенство

$$x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \ldots + y^{2n} \geqslant 0.$$

8.26. Пусть $a > b > 0$. Докажите, что $a^a b^b > a^b b^a$.

8.27. Предположим, что $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа, про которые известно, что все числа $\sigma_1 = \sum x_i$, $\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, $\sigma_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$, $\ldots$, $\sigma_n = x_1 \ldots x_n$ положительны. Верно ли, что тогда и сами числа $x_1, \ldots, x_n$ положительны?

8.28. Докажите, что $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ для всех x.

8.29. Докажите, что

$$\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| < 1,$$

если $|x| < 1$ и $|y| < 1$.

8.30. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Докажите, что $x^n - nx + n - 1 \geqslant 0$ для всех $x > 0$.

8.31. Докажите, что для всех натуральных n

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

8.32. Докажите, что для всех натуральных n справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

8.33. Докажите, что при всех натуральных $n > 1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

8.34. Докажите, что $(2n-1)^n + (2n)^n < (2n+1)^n$ для любого натурального $n > 2$.

8.35. По окружности расставлены в произвольном порядке числа 1, 2, …, n. Докажите, что сумма модулей разностей соседних чисел не меньше $2n-2$.

8.36. Пусть $0 < a \leqslant x_i \leqslant b$. Докажите, что

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.$$

8.37. Докажите, что если $-1 \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant 1$ и $x_1^3 + \ldots + x_n^3 = 0$, то $x_1 + \ldots + x_n \leqslant n/3$.

8.38. Докажите, что если $xy = 4$ и $z^2 + 4w^2 = 4$, то $(x-z)^2 + (y-w)^2 \geqslant 1{,}6$.

8.39. Пусть $A(x) = A_1(x) + \ldots + A_5(x)$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ и $A_i(x) = \prod_{j\neq i}(x_i - x_j)$,. Докажите, что $A(x) \geqslant 0$ для всех x

8.40. Сто положительных чисел x_1, x_2, …, x_{100} удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 & > & 10000, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} & < & 300. \end{array}$$

Докажите, что среди них можно найти три числа, сумма которых больше 100.

См. также задачу 18.4.

8.9. Выпуклость

8.41. Пусть $n \neq 1$ — натуральное число и $a > b > 0$. Докажите, что $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}$.

8.42. Сравните числа $\sqrt[3]{60}$ и $2 + \sqrt[3]{7}$.

8.10. Неравенства Гёльдера и Минковского

8.43. а) Пусть a — рациональное число, причём $a > 1$ или $a < 0$. Докажите, что для любого $x > 0$, $x \neq 1$, выполняется неравенство $x^a - ax + a - 1 > 0$.

б) Пусть a — рациональное число, причём $0 < a < 1$. Докажите, что для любого $x > 0,\ \ x \neq 1$, выполняется неравенство $x^a - ax + a - 1 < 0$.

8.44. Докажите, что если m и n —натуральные числа, отличные от 1, то

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} > 1.$$

8.45. Пусть A и B — положительные числа, а p и q — рациональные числа, связанные соотношением $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Докажите, что если $p > 1$, то $A^{1/p}B^{1/q} \leqslant \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{q}$, а если $p < 1$, то $A^{1/p}B^{1/q} \geqslant \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{q}$. (Если $A \neq B$, то оба неравенства строгие.)

8.46. Пусть x_i и y_i — положительные числа, а p и q — рациональные числа, связанные соотношением $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Докажите, что если $p > 1$, то

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \leqslant (x_1^p + \ldots + x_n^p)^{1/p}(y_1^q + \ldots + y_n^q)^{1/q},$$

а если $p < 1$, то

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \geqslant (x_1^p + \ldots + x_n^p)^{1/p}(y_1^q + \ldots + y_n^q)^{1/q}.$$

(*Неравенство Гёльдера*)

8.47. Пусть x_i и y_i — положительные числа, а $p > 1$ — рациональное число. Докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Если $p < 1$, то неравенство заменяется на противоположное. (*Неравенство Минковского*)

Решения

8.1. Воспользовавшись неравенством $x_i + 1/x_i \geqslant 2$, получим $3 + 3 = (x_1 + 1/x_1) + \ldots + (x_n + 1/x_n) \geqslant 2n$, т.е. $n \leqslant 3$. При $n = 3$ получаем решение $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. При $n = 2$ получаем решение $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ \ x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. При $n = 1$ система несовместна.

8.2. Из соотношения $a_1 \dots a_n = 1$ следует, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) = \frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{a_1\dots a_n} = \\ = \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\dots\left(1+\frac{1}{a_n}\right).$$

Кроме того, $(1+a_i)\left(1+\frac{1}{a_i}\right) = 2 + a_i + \frac{1}{a_i} \geqslant 4$. Поэтому

$$\big((1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\big)^2 = (1+a_1)\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\dots(1+a_n)\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant 4^n.$$

8.3. Из равенства $2 + x^3 = x^5 + x$ следует, что $\frac{2}{x^3} + 1 = x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$. Поэтому $\frac{2}{x^3} \geqslant 1$, т.е. $x^3 \leqslant 2$. Но $x \neq 1$, поэтому неравенство строгое.

Сложив равенства $x^5 - x^3 + x = 2$ и $x^7 - x^5 + x^3 = 2x^2$, получим $x^7 + x = 2 + 2x^2$, т.е. $x^6 + 1 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \geqslant 4$. Следовательно, $x^6 \geqslant 3$. Неравенство строгое, поскольку $x \neq 1$.

8.4. а) Положим $x_2 + x_3 = a,\ \ x_3 + x_1 = b,\ \ x_1 + x_2 = c$, т.е. $x_1 = \frac{b+c-a}{2}$, $x_2 = \frac{a+c-b}{2}$, $x_3 = \frac{a+b-c}{2}$. Тогда требуемое неравенство запишется в виде

$$\frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c} \geqslant \frac{3}{2},$$

т.е. $b/a + c/a + a/b + c/b + a/c + b/c \geqslant 3 + 3 = 6$. Остаётся заметить, что $b/a + a/b \geqslant 2$ и т.д.

б) При $n = 4$ получаем

$$\frac{x_1}{x_2+x_4} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_4+x_2} + \frac{x_4}{x_3+x_1} = \frac{x_1+x_3}{x_2+x_4} + \frac{x_2+x_4}{x_1+x_3} \geqslant 2.$$

При $n > 4$ требуемое неравенство можно доказать по индукции. Предположим, что для чисел $x_1, \dots, x_n$ неравенство уже доказано. Выберем среди положительных чисел $x_1, \dots, x_{n+1}$ наименьшее. После циклической перенумерации этих чисел можно считать, что это будет число x_{n+1}. Тогда $\frac{x_1}{x_2+x_{n+1}} \geqslant \frac{x_1}{x_2+x_n}$, $\frac{x_n}{x_{n+1}+x_{n-1}} \geqslant \frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}$ и $\frac{x_{n+1}}{x_1+x_n} > 0$. Поэтому

$$\frac{x_1}{x_2+x_{n+1}} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}+x_{n-1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1+x_n} > \frac{x_1}{x_2+x_n} + \dots + \frac{x_n}{x_1+x_{n-1}} \geqslant 2;$$

последнее неравенство выполняется по предположению индукции.

8.5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству треугольника тогда и только тогда, когда

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c) > 0. \qquad (1)$$

Действительно, два выражения в скобках не могут быть одновременно отрицательными. Например, неравенства $a+b < c$ и $b+c < a$ не могут выполняться одновременно. После раскрытия скобок неравенство (1) записывается в виде $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4) > 0$, а из этого уже легко получить требуемое.

8.6. Прежде всего покажем, что для таких чисел выполняется неравенство

$$(a_2^2 + \ldots + a_n^2) > (n-2)(a_2^4 + \ldots + a_n^4).$$

Исходное неравенство можно записать в виде

$$a_1^4 + 2a_1^2 S_2 + S_2^2 > (n-1)a_1^4 + (n-1)S_4,$$

где $S_2 = a_2^2 + \ldots + a_n^2$ и $S_4 = a_2^4 + \ldots + a_n^4$. Выделим полный квадрат:

$$(n-2)\left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2 + \frac{S_2^2}{n-2} - S_2^2 + (n-1)S_4 < 0.$$

Следовательно, $S_2^2\left(1 - \dfrac{1}{n-2}\right) > (n-1)S_4$, т.е. $S_2^2 > (n-2)S_4$, что и требовалось.

Далее по индукции получаем

$$(a_k^2 + \ldots + a_n^2) > (n-k)(a_k^4 + \ldots + a_n^4).$$

При $k = n-2$ согласно задаче 8.5 это неравенство означает, что числа a_{n-2}, a_{n-1}, a_n удовлетворяют неравенству треугольника. То же самое доказательство можно применить и для любой другой тройки чисел.

8.7. Ответ: да, можно. Положим $A = B = 1$, $C = \varepsilon$. Тогда

$$a(b + \varepsilon c) + b(\varepsilon c + a) + \varepsilon c(a + b) > \frac{1}{2}(c^2 + \varepsilon a^2 + \varepsilon b^2). \qquad (1)$$

Поэтому должно выполняться неравенство $2ab \geqslant \dfrac{1}{2}c^2$, поскольку иначе неравенство (1) не выполнялось бы при малых ε. Значит, $c^2 \leqslant 4ab \leqslant (a+b)^2$. Числа a, b, c положительны, поэтому $c \leqslant a + b$. Неравенства $a \leqslant b + c$ и $b \leqslant a + c$ доказываются аналогично.

8.8. Достаточно заметить, что $(x-y)^2 \leqslant 0$.

8.9. Пусть $A = \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2}$ и $B = \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$. Воспользовавшись неравенством $xy \leqslant (x^2 + y^2)/2$, получим

$$\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{A}\frac{b_i}{B} \leqslant \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{A^2} + \frac{b_i^2}{B^2}\right) = \frac{1}{2A^2}\sum_{i=1}^k a_i^2 + \frac{1}{2B^2}\sum_{i=1}^k b_i^2 = 1.$$

Значит, $\left(\sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2 \leqslant A^2B^2 = \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k b_i^2\right)$.

8.10. Это неравенство является частным случаем неравенства Коши; достаточно положить $b_1 = \ldots = b_n = 1$.

8.11. Это неравенство очевидным образом следует из неравенства Коши: достаточно положить $a_i = \sqrt{x_i}$ и $b_i = 1/\sqrt{x_i}$.

8.12. Положим $b_i = S - a_i$. Тогда требуемое неравенство запишется в виде

$$\frac{S-b_1}{b_1} + \ldots + \frac{S-b_n}{b_n} \geqslant \frac{n}{n-1}, \quad \text{т.е.}$$

$$S\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right) \geqslant \frac{n}{n-1} + n = \frac{n^2}{n-1}.$$

Но $b_1 + \ldots + b_n = (S - a_1) + \ldots + (S - a_n) = nS - S = (n-1)S$. Остаётся заметить, что

$$(b_1 + \ldots + b_n)\left(\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right) \geqslant n^2$$

(задача 8.11).

8.13. Докажем сначала, что если m и n — натуральные числа одной чётности, то

$$\frac{x^m + y^m}{2} \cdot \frac{x^n + y^n}{2} \leqslant \frac{x^{m+n} + y^{m+n}}{2}.$$

Это неравенство легко преобразуется к виду $(x^m - y^m)(x^n - y^n) \geqslant 0$. Если числа m и n нечётные, то из неравенства $x \geqslant y$ следуют неравенства $x^m \geqslant y^m$ и $x^n \geqslant y^n$, а из неравенства $x \leqslant y$ следуют неравенства $x^m \leqslant y^m$ и $x^n \leqslant y^n$. Если же числа m и n оба чётные, то из неравенства $x^2 \geqslant y^2$ следуют неравенства $x^m \geqslant y^m$ и $x^n \geqslant y^n$.

Таким образом, $\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2} \leqslant \frac{x^4+y^4}{2}$ и $\frac{x^2+y^2}{2} \cdot \frac{x^4+y^4}{2} \leqslant \frac{x^6+y^6}{2}$. Из этих неравенств следует требуемое.

8.14. Первое решение. Предположим, что требуемое неравенство доказано для любых n положительных чисел. Рассмотрим положительные числа $b_1 = \sqrt[n+1]{a_1}, \ldots, b_{n+1} = \sqrt[n+1]{a_{n+1}}$. Ясно, что $(b_i^n - b_j^n)(b_i - b_j) \geqslant 0$. Просуммируем такие неравенства для всех пар i, j, для которых $i > j$. В результате получим

$$n\sum_{i=1}^{n+1} b_i^{n+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} b_i \sum_{j \neq i} b_j^n.$$

Воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для n чисел, получим

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i \sum_{j \neq i} b_j^n \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} b_i \prod_{j \neq i} b_j = n(n+1)\prod_{j=1}^{n+1} b_j.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i^{n+1} \geqslant (n+1)\prod_{j=1}^{n+1} b_j,$$

что и требовалось.

Второе решение. Расположим данные числа в порядке возрастания: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Если $a_1 = a_n$, то $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. В таком случае $A = G$. Поэтому будем предполагать, что $a_1 < a_n$. Тогда $a_1 < A < a_n$, а значит,

$$A(a_1 + a_n - A) - a_1a_n = (a_1 - A)(A - a_n) > 0,$$

т.е. $A(a_1 + a_n - A) > a_1a_n$. В частности, $a_1 + a_n - A > 0$.

Предположим, что неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим верно для любых $n-1$ положительных чисел. Применим его к числам $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_1 + a_n - A$. В результате получим

$$\left(\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_1 + a_n - A}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant a_2a_3 \ldots a_{n-1}(a_1 + a_n - A).$$

Здесь

$$\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_1 + a_n - A}{n-1} = \frac{nA - A}{n-1} = A.$$

Умножим теперь обе части полученного неравенства на A:

$$A^n \geqslant a_2a_3 \ldots a_{n-1}A(a_1 + a_n - A) > a_1a_2 \ldots a_n;$$

мы воспользовались доказанным выше неравенством $A(a_1 + a_n - A) > a_1a_n$.

8.15. Положим $a = x^{10}$ и $b = y^{15}$. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x^5 + x^5 + y^5 + y^5 + y^5}{5} \geqslant \sqrt[5]{x^{10}y^{15}},$$

т.е. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

8.16. Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}$. В результате получим

$$\frac{1}{n}\left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n}\right) > \sqrt[n]{n+1}, \quad \text{т.е.}$$
$$(1+1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) > n\sqrt[n]{n+1}.$$

Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}$. В результате получим

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) > \sqrt[n]{\frac{1}{n}}, \quad \text{т.е.}$$
$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) > \frac{n}{\sqrt[n]{n}}.$$

8.17. Первое решение. Применим индукцию по n и воспользуемся неравенством из задачи 8.45. Введём для удобства обозначения $W_n = W$ и $W_{n-1} = w_1 + \ldots + w_{n-1}$. Ясно, что

$$\begin{aligned}(a_1^{w_1}\ldots a_n^{w_n})^{1/W_n} &= \left((a_1^{w_1}\ldots a_{n-1}^{w_{n-1}})^{W_{n-1}/W_n}\right)a_n^{w_n/W_n} \leqslant \\ &\leqslant \frac{W_{n-1}}{W_n}(a_1^{w_1}\ldots a_{n-1}^{w_{n-1}})^{1/W_{n-1}} + \frac{w_n}{W_n}a_n \leqslant \\ &\leqslant \frac{W_{n-1}}{W_n}\,\frac{w_1a_1+\ldots+w_{n-1}a_{n-1}}{W_{n-1}} + \frac{w_n}{W_n}a_n = \\ &= \frac{w_1a_1+\ldots+w_na_n}{W_n}.\end{aligned}$$

Мы сначала воспользовались неравенством $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$ ($p, q \geqslant 0$ и $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$), а затем — предположением индукции.

Второе решение. Мы воспользуемся неравенством $1 + x < e^x$ для $x \neq 0$ (задача 28.48). Определим числа $b_1, \ldots, b_n$ так, чтобы выполнялись равенства $a_i = (1+b_i)\dfrac{w_1a_1+\ldots+w_na_n}{W}$. Тогда

$$w_ib_i = w_i\frac{a_i(w_1+\ldots+w_n) - w_1a_1 - \ldots - w_na_n}{w_1a_1+\ldots+w_na_n},$$

поэтому $w_1b_1+\ldots+w_nb_n = 0$. Легко видеть, что если не все числа $a_1, \ldots, a_n$ равны, то хотя бы одно из чисел $b_1, \ldots, b_n$ отлично от нуля. В таком случае

$$\begin{aligned}(a_1^{w_1}\ldots a_n^{w_n})^{1/W} &= \frac{w_1a_1+\ldots+w_na_n}{W}\left((1+b_1)^{w_1}\ldots(1+b_n)^{w_n}\right)^{1/W} < \\ &< \frac{w_1a_1+\ldots+w_na_n}{W}e^{(b_1w_1+\ldots+b_nw_n)/W} = \\ &= \frac{w_1a_1+\ldots+w_na_n}{W}.\end{aligned}$$

Заодно мы доказали, что требуемое неравенство является строгим, если не все числа $a_1, \ldots, a_n$ равны.

8.18. Пусть $g(x) = ax^\alpha$. По условию $f(x_0) = g(x_0)$ и $f'(x_0) = g'(x_0)$, т.е. $ax_0^\alpha = f(x_0)$ и $a\alpha x_0^{\alpha-1} = \sum_{i=1}^n a_ix_0^{\alpha_i-1}$. Следовательно, $a = f(x_0)/x_0^\alpha$ и $\alpha f(x_0) = a\alpha x_0^\alpha = \sum_{i=1}^n a_ix_0^{\alpha_i}$, поэтому $\alpha = \sum_{i=1}^n \dfrac{a_ix_0^{\alpha_i}}{f(x_0)}$.

Ясно, что

$$f(x) = \frac{\sum a_ix^{\alpha_i}}{\sum a_ix_0^{\alpha_i}}\sum a_ix_0^{\alpha_i} = \frac{\sum a_ix_0^{\alpha_i}\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{\alpha_i}}{\sum a_ix_0^{\alpha_i}}f(x_0).$$

Согласно неравенству из задачи 8.17

$$\frac{\sum a_ix_0^{\alpha_i}\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{\alpha_i}}{\sum a_ix_0^{\alpha_i}} \geqslant \prod_{i=1}^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha_ia_ix_0^{\alpha_i}/f(x_0)} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha.$$

Таким образом, $f(x) \geqslant \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha} f(x_0) = ax^{\alpha}$. Остаётся заметить, что если $x \neq x_0$, то числа $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$, попарно различны, поэтому получаем строгие неравенства.

8.19. Рассмотрим треугольник AOC, в котором $AO = a$, $CO = c$ и угол при вершине O равен 120°. Проведём биссектрису угла O и отложим на ней или на её продолжении отрезок $OB = b$. Тогда по теореме косинусов $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ и $AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$. Поэтому требуемое неравенство — это обычное неравенство треугольника $AC \leqslant AB + BC$. Оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC. Это эквивалентно тому, что сумма площадей треугольников AOB и BOC равна площади треугольника AOB, т.е. $ac\sin 120^\circ = (ab + bc)\sin 60^\circ$. Учитывая, что $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, получаем $ac = ab + bc$, т.е. $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$.

8.20. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}\right) \geqslant \left(\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \ldots \frac{a_n}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

8.21. Выделим полный квадрат: $a^3b + b^3c + c^3a - a^2bc - b^2ca - c^2ab = (a^3b - 2a^2bc + c^2ab) + (b^3c - 2b^2ca + a^2bc) + (c^3a - 2c^2ab + b^2ca) = ab(a-c)^2 + bc(b-a)^2 + ca(c-b)^2 \geqslant 0$.

8.22. Фиксируем все числа $x_1, \ldots, x_n$, кроме одного числа $x_i = x$. Тогда выражение в левой части неравенства имеет вид $ax + b$, где a и b — постоянные числа. Оно максимально при $x = 0$ или при $x = 1$ (или постоянно). Значит, выражение в левой части неравенства максимально в том случае, когда каждое из чисел $x_1, \ldots, x_n$ равно 0 или 1.

Предположим, что $x_i = x_{i+1} = 1$ (или $x_n = x_1 = 1$). После циклической перенумерации можно считать, что $x_1 = x_2 = 1$. Рассмотрим лишь те члены, которые зависят от x_1 и x_2, т.е. $x_1 + x_2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_nx_1$. При $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$ это выражение равно $1 - x_3 - x_n$, а при $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ оно равно $1 - x_n \geqslant 1 - x_3 - x_n$. Поэтому можно считать, что никакие два соседних числа в последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$ не равны одновременно 1. Тогда количество единиц не превосходит $[n/2]$, а выражение в левой части не превосходит количества единиц.

При $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = 0$ и $x_2 = x_4 = \ldots = 1$ получаем как раз $[n/2]$.

8.23. Требуемое неравенство легко преобразуется к виду $a^2b^2c^2(a + b + c) - 2abc(ab + bc + ac) - 2abc(a + b + c) + (a^2c + b^2c + c^2b) + abc(a^2c + b^2c + c^2b) + (ab + bc + ac) \geqslant 0$. Но левая часть этого неравенства равна $ab(b + a)(ac-1)^2 + bc(c+1)(ab-1)^2 + ac(a+1)(bc-1)^2$.

8.24. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ эквивалентно неравенству $ab + ad < ab + bc$, т.е. $ad < bc$. А неравенство $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ эквивалентно неравенству $ad + cd < bc + cd$, т.е. $ad < bc$.

8.25. Если $x = y$, то требуемое неравенство очевидно. Если же $x \neq y$, то выражение в левой части равно $\frac{x^{2n+1} - y^{2n+1}}{x - y}$. При $x > y$ числитель и знаменатель положительны, а при $x < y$ отрицательны.

8.26. По условию $a - b > 0$ и $a/b > 1$. Поэтому $(a/b)^{a-b} > 1$, т.е. $a^{a-b} > b^{a-b}$. Это неравенство эквивалентно требуемому.

8.27. Да, верно. Чтобы это доказать, рассмотрим многочлен

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

Числа $x_1, \ldots, x_n$ являются его корнями. Поэтому достаточно проверить, что если $x < 0$, то $f(x) \neq 0$. Но если $-x > 0$, то

$$(-1)^n f(x) = (-x)^n + \sigma_1 (-x)^{n-1} + \sigma_2 (-x)^{n-2} + \ldots + \sigma_n > 0.$$

Замечание. *Условий $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ не достаточно для того, чтобы комплексные числа x_1 и x_2 были положительны. Например, если $x_1 = 2 + i$ и $x_2 = 2 - i$, то $\sigma_1 = 4$ и $\sigma_2 = 3$.*

8.28. Если $x \leqslant 0$, то x^{12}, $-x^9$, x^4, $-x \geqslant 0$. Если $0 < x < 1$, то $x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x) > 0$. Если $x \geqslant 1$, то $x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 > 0$.

8.29. По условию $1 - x > 0$, $1 + x > 0$, $1 - y > 0$ и $1 + y > 0$. Поэтому $(1-x)(1+y) > 0$ и $(1+x)(1-y) > 0$, т.е. $1-x+y-xy > 0$ и $1+x-y-xy > 0$. Следовательно, $1 - xy > x - y$ и $1 - xy > y - x$. Кроме того, $1 - xy = |1 - xy|$.

8.30. Ясно, что

$$x^n - nx + n - 1 = (1 + x + \ldots + x^{n-1} - n)(x - 1).$$

Если $x > 1$, то оба выражения в скобках положительны, а если $0 < x < 1$, то отрицательны.

8.31. Сложим $n - 1$ неравенств $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, $\ldots$, $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ и равенство $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$. В результате получим требуемое.

8.32. Ясно, что $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}$.

8.33. Пусть $P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}$. Тогда

$$P_n^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Если $k > 1$, то $\frac{(2k-1)^2}{(2k-2)2k} = \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2-1} > 1$. Поэтому $P_n^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n}$, т.е. $P_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

С другой стороны, $\frac{(2k-1)(2k+1)}{2k^2} = \frac{(2k^2-1)}{2k^2} < 1$. Поэтому

$$P_n^2 = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(2n)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2n},$$

т.е. $P_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

8.34. Требуемое неравенство можно переписать в виде $2^n < \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$ Выражение в правой части равно

$$\begin{aligned}&2^n + 2^{n-1}n \cdot \frac{1}{n} + 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + 2^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots \\ &-2^n + 2^{n-1}n \cdot \frac{1}{n} + 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - 2^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots = \\ &= 2^n + 2^{n-2}\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots > 2^n.\end{aligned}$$

8.35. Рассмотрим две дуги, на которые разбивают окружность точки, в которых стоят числа 1 и n. На каждой дуге сумма разностей соседних чисел равна $n-1$ (если мы идём от n к 1), а сумма модулей чисел не меньше их суммы.

8.36. По условию $(x_i - a)(x_i - b) \leqslant 0$ и $x_i > 0$, поэтому $\frac{ab}{x_i} + x_i \leqslant a + b$. Складывая такие неравенства, получаем $ab\sum \frac{1}{x_i} + \sum x_i \leqslant n(a+b)$. Положим $x^* = \frac{1}{n}\sum x_i$ и $y^* = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{x_i}$. Тогда полученное неравенство можно записать в виде $aby^* + x^* \leqslant a + b$, т.е. $y^* \leqslant \frac{a+b-x^*}{ab}$. Домножим обе части этого неравенства на x^* и воспользуемся тем, что $x(a+b-x) \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ для любого x (задача 1.2). В результате получим

$$x^*y^* \leqslant \frac{x^*(a+b-x^*)}{ab} \leqslant \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

Это неравенство эквивалентно требуемому.

8.37. Рассмотрим многочлен $P(x) = 4(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 3x + 1$. Ясно, что $P(x_i) \geqslant 0$. Сложив неравенства $P(x_1) \geqslant 0, \ldots, P(x_n) \geqslant 0$, получим $-3(x_1 + \ldots + x_n) + n \geqslant 0$, т.е. $x_1 + \ldots + x_n \leqslant n/3$.

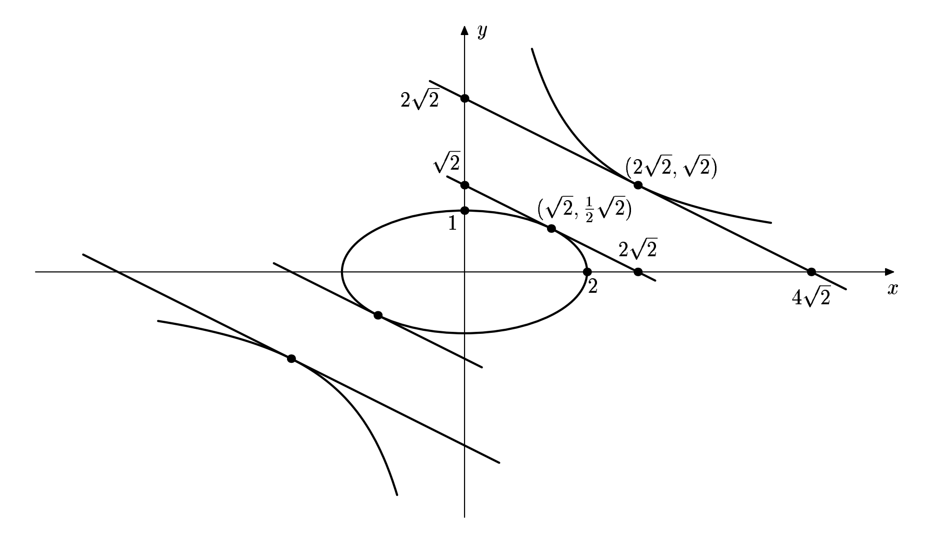


Рис. 8.1.

8.38. На геометрическом языке это неравенство означает, что расстояние между эллипсом $x^2 + 4y^2 = 4$ и гиперболой $xy = 4$ не меньше $\sqrt{1,6}$. При доказательстве удобно пользоваться именно геометрической формулировкой. Мы будем доказывать следующее утверждение:

> Касательная к эллипсу $x^2+4y^2 = 4$ в точке $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ параллельна касательной к гиперболе $xy = 4$ в точке $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, и квадрат расстояния между этими касательными равен $1,6$.

Обратившись к рис. 8.1, несложно убедиться, что из этого следует требуемое утверждение.

Согласно задаче 1.26 касательная к эллипсу $x^2+4y^2 = 4$ в точке $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ задаётся уравнением $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 4$, т.е.

$$x + 2y = 2\sqrt{2}, \qquad (1)$$

а касательная к гиперболе $xy = 4$ в точке $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ задаётся уравнением $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 8$, т.е.

$$x + 2y = 4\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Прямые, заданные уравнениями (1) и (2), параллельны. Расстояние между ними равно высоте h прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$, опущенной на гипотенузу. Ясно, что $h = ab/c$, где $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким образом, $h^2 = 1,6$, что и требовалось.

8.39. Значение $A(x)$ не изменяется при любой перестановке переменных, поэтому можно считать, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_5$. В таком случае $A_1(x) + A_2(x) =$

$$(x_1 - x_2)[(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5) - (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)] \geqslant 0,$$

так как $x_1 - x_2 \geqslant 0, x_1 - x_3 \geqslant 0, x_2 - x_3 \geqslant 0$ и т. д. Аналогично доказывается, что $A_4(x) + A_5(x) \geqslant 0$. Ясно также, что $A_3(x)$ представляет собой произведение двух неположительных и двух неотрицательных сомножителей, поэтому $A_3(x) \geqslant 0$.

8.40. Можно считать, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{100} > 0$. Если $x_1 \geqslant 100$, то $x_1 + x_2 + x_3 > 100$. Поэтому будем считать, что $x_1 < 100$. Тогда $100 - x_1 > 0$, $100 - x_2 > 0$, $x_1 - x_2 \geqslant 0$ и $x_1 - x_3 \geqslant 0$, поэтому

$$\begin{aligned}100(x_1 + x_2 + x_3) \geqslant 100(x_1 + x_2 + x_3) - (100 - x_1)(x_1 - x_3) -\\ - (100 - x_2)(x_2 - x_3) =\\ = x_1^2 + x_2^2 + x_3(300 - x_1 - x_2) >\\ > x_1^2 + x_2^2 + x_3(x_3 + x_4 + \ldots + x_{100}) \geqslant\\ \geqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{100}^2 > 10000.\end{aligned}$$

Следовательно, $x_1 + x_2 + x_3 > 100$.

8.41. Применим индукцию по n. При $n = 2$ нужно доказать неравенство $a^2 + 2ab + b^2 < 2a^2 + 2b^2$, которое эквивалентно очевидному неравенству $0 < (a - b)^2$. Предположим, что $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}$. Тогда $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b + ab^n}{4}$. Остаётся доказать, что $a^n b + ab^n < a^{n+1} + b^{n+1}$. Это неравенство эквивалентно очевидному неравенству $(a^n - b^n)(a - b) > 0$.

8.42. Применим неравенство из задачи 8.41 при $n = 3$, $a = \sqrt[3]{8}$ и $b = \sqrt[3]{7}$. В результате получим $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7}}{2} < \sqrt[3]{\frac{7+8}{2}}$, т.е. $2 + \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{60}$.

8.43. Пусть n — натуральное число. Тождество

$$\frac{y^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{y^n - 1}{n} = \frac{y - 1}{n(n+1)}(ny^n - y^{n-1} - \ldots - y - 1)$$

показывает, что $\frac{y^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{y^n - 1}{n} > 0$ при $y > 0$, $y \neq 1$. Действительно, если $y > 1$, то $y - 1 > 0$ и $ny^n > y^{n-1} + \ldots + y + 1$, а если $0 < y < 1$, то $y - 1 < 0$ и $ny^n < y^{n-1} + \ldots + y + 1$.

Пусть m — натуральное число, причём $m > n$. Тогда $(y^m - 1)/m > (y^n - 1)/n$ при $y > 0$, $y \neq 1$. Положим $y = x^{1/n}$, где

$x > 0$, $x \neq 1$. Тогда $(x^{m/n} - 1)/m > (x - 1)/n$, т.е. $x^{m/n} - 1 - \dfrac{m}{n}(x - 1) > 0$. Мы получили требуемое неравенство для $a = m/n > 1$.

Чтобы получить остальные неравенства, поступим следующим образом. Для $a > 1$ положим $x^a = x^{1-b} = y^{b-1}$, где $b = 1 - a < 0$ и $y = x^{-1}$. Тогда неравенство $x^a - ax + a - 1 > 0$ перепишется в виде $y^{b-1} - (1-b)y^{-1} + 1 - b - 1 > 0$, т.е. $y^{-1}(y^b - by + b - 1) > 0$, $b < 0$.

Положим теперь $b = 1/a$ и $y = x^a$ (здесь снова $a > 1$ и $x > 0$). Тогда неравенство $x^a - ax + a - 1 > 0$ перепишется в виде $y - \dfrac{1}{b}y^b + \dfrac{1}{b} - 1 > 0$, т.е. $y^b - by + b - 1 < 0$, $0 < b < 1$.

8.44. Воспользуемся неравенством из задачи 8.43 б), положив $x = m + 1$ и $a = 1/n$. В результате получим $(m + 1)^{1/n} < 1 + \dfrac{m}{n}$. Аналогично $(n + 1)^{1/m} < 1 + \dfrac{n}{m}$. Значит,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} > \frac{n}{n+m} + \frac{m}{n+m} = 1.$$

8.45. Положим $x = A/B$, $a = 1/p$ и $1 - a = 1/q$. Тогда $B(x^a - ax + a - 1) = A^{1/p}B^{1/q} - \dfrac{A}{p} - \dfrac{B}{q}$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 8.43.

Замечание. *Доказательство в случае $p > 1$ приведено также в решении задачи 26.22.*

8.46. Положим $X = x_1^p + \ldots + x_n^p$, $Y = y_1^q + \ldots + y_n^q$, $A = x_i^p/X$ и $B = y_i^q/Y$. Если $p > 1$, то согласно задаче 8.45 $\dfrac{x_i}{X^{1/p}}\dfrac{y_i}{Y^{1/q}} \leqslant \dfrac{x_i^p}{pX} + \dfrac{y_i^q}{qY}$. Сложив такие неравенства для $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{X^{1/p}Y^{1/q}} \leqslant \frac{X}{pX} + \frac{Y}{qY} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

В случае, когда $p < 1$, доказательство аналогично.

8.47. Пусть $p > 1$. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1}.$$

Согласно неравенству Гёльдера (задача 8.46)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\Big)^{1/q},$$

где $q = p/(p-1)$, т.е. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Запишем такое же неравенство для второй суммы и сложим оба этих неравенства. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i+y_i)^{p-1} \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i+y_i)^{p-1}\right)^{1/q}.$$

Это неравенство эквивалентно требуемому.

В случае, когда $p < 1$, доказательство аналогично.

Глава 9.

Вычисление сумм и произведений

9.1. Арифметическая и геометрическая прогрессии

9.1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

9.2. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия с положительными членами. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Десятичную дробь $\alpha = 0,a_1a_2a_3\ldots$ называют *периодической*, если $a_{k+n} = a_k$ для всех $k \geqslant N$; число n называют *длиной периода*. Если $N = 1$, то дробь называют *чисто* периодической. Для десятичных дробей с ненулевой целой частью используется та же самая терминология. Для периодической десятичной дроби используется запись $0,a_1a_2\ldots a_{N-1}(a_Na_{N+1}\ldots a_{N+n-1})$.

9.3. Докажите, что периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

По поводу обратного утверждения см. задачу 17.1.

9.4. Рационально ли число $0{,}1234567891011\ldots$ (подряд записаны все натуральные числа)?

9.5. Докажите, что любое число вида n^k, где n и k — натуральные числа, большие 1, можно представить в виде суммы n последовательных нечётных чисел.

9.6. Найдите сумму $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$.

9.7. Пусть a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$ — бесконечная арифметическая прогрессия, причём a, $d > 0$. Докажите, что из неё можно выбрать бесконечную подпоследовательность, являющуюся геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда число a/d рационально.

9.8. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырёх попарно различных можно составить геометрическую прогрессию. Докажите, что среди этих чисел найдётся n одинаковых.

9.9. Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой — целое число (не равное 0 и -1). Докажите, что сумма любого числа произвольно выбранных её членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

9.2. Изменение порядка суммирования

9.10. Докажите, что если $n = p + q - 1$, то $(a_1 + a_2 + \ldots + a_p) + (a_2 + \ldots + a_{p+1}) + \ldots + (a_{n-p+1} + \ldots + a_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_q) + (a_2 + \ldots + a_{q+1}) + \ldots + (a_{n-q+1} + \ldots + a_n)$

9.11. Числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n таковы, что сумма любых семи последовательных чисел отрицательна, а сумма любых одиннадцати последовательных чисел положительна. При каком наибольшем n это возможно?

9.3. Суммы $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$

Сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ можно вычислить следующим способом. Сложим равенства $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. В результате после сокращения получим $(n+1)^2 = 1 + 2S_1(n) + n$, где $S_1(n)$ — искомая сумма. Значит, $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

9.12. Вычислите таким же способом суммы $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ и $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

9.13. а) Докажите, что

$$\binom{k+1}{k} S_k(n) + \binom{k+1}{k-1} S_{k-1}(n) + \ldots + \binom{k+1}{1} S_1(n) + S_0(n) = (n+1)^{k+1} - 1.$$

б) Докажите, что при фиксированном k сумма $S_k(n)$ является многочленом степени $k+1$ от n со старшим коэффициентом $\dfrac{n^{k+1}}{k+1}$.

9.14. а) Пусть $S = \binom{k}{1} S_{2k-1}(n) + \binom{k}{3} S_{2k-3}(n) + \binom{k}{5} S_{2k-5}(n) + \ldots$, причём последнее слагаемое в этой сумме равно $\binom{k}{k} S_k(n)$ при чётном k и $\binom{k}{k-1} S_{k+1}(n)$ при нечётном k. Докажите, что $S = \dfrac{n^k(n+1)^k}{2}$.

б) Докажите, что $S_{2k-1}(n)$ — многочлен степени k от $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (при фиксированном k).

9.15. Пусть $S = \binom{k+1}{1} S_k(n) + \binom{k+1}{3} S_{k-2}(n) + \ldots$, причём последнее слагаемое в этой сумме равно $\binom{k+1}{k+1} S_0(n)$ при чётном k и $\binom{k+1}{k} S_1(n)$ при нечётном k. Докажите, что $S = \dfrac{(n+1)^{k+1} + n^{k+1} - 1}{2}$.

9.16. Найдите сумму

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3.$$

9.4. Разбиение на пары

9.17. а) Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ числитель дроби

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

делится на p.

б) Докажите, что для любого простого числа $p > 3$ числитель дроби

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

делится на p^2.

9.18. Пусть $\dfrac{p}{q} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{4k-1}$ —несократимая дробь, причём число $6k-1$ простое. Докажите, что p делится на $6k-1$.

9.19. Пусть $p > 2$ — простое число, a_k — остаток от деление k^p на p^2. Докажите, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = \dfrac{p^3 - p^2}{2}$.

9.5. Вычисление одной суммы двумя способами

9.20. По окружности в произвольном порядке расставлено a плюсов и b минусов. Пусть p — количество пар стоящих рядом плюсов, q — количество пар стоящих рядом минусов. Докажите, что $a - b = p - q$.

Решения

9.1. Ясно, что $\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{d}{a_k a_{k+1}}$, где d — разность арифметической прогрессии. Поэтому рассматриваемая сумма равна

$$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{1}{d} \cdot \frac{(n-1)d}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

9.2. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d},$$

где d — разность арифметической прогрессии. Поэтому рассматриваемая сумма равна

$$\frac{1}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

9.3. Ясно, что $0{,}a_1 a_2 \ldots a_{N-1}(a_N a_{N+1} \ldots a_{N+n-1}) = a_1 a_2 \ldots a_{N-1} 10^{-N+1} + 10^{-N} a_N q + 10^{-N-1} a_{N+1} q + \ldots + 10^{-N-n+1} a_{N+n-1} q$, где $q = 1 + 10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \ldots = \dfrac{1}{1 - 10^{-n}}$ — рациональное число.

9.4. Предположим, что это число рационально. Тогда оно записывается периодической десятичной дробью $0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$, где $a_{k+n} = a_k$ для всех $k \geqslant N$

(n — длина периода). Выберем m достаточно большим, чтобы число 10^{m+2n} было записано после a_N. Тогда получим, что, с одной стороны, период состоит из одних нулей, а с другой стороны, период содержит единицу. Полученное противоречие показывает, что данное число иррационально.

9.5. Чтобы число $a + (a + 2) + \ldots + (a + 2n - 2) = n(a + n - 1)$ равнялось n^k, нужно положить $a + n - 1 = n^{k-1}$, т.е. $a = n^{k-1} - n + 1$. Ясно, что число a при этом нечётно.

9.6. Чтобы получить требуемую сумму, нужно сложить $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, $x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - x}{x - 1}, \ldots, x^n = \dfrac{x^{n+1} - x^n}{x - 1}$. В результате получим

$$\frac{(n+1)x^{n+1} - (1 + x + \ldots + x^n)}{x - 1} = \frac{(n+1)x^{n+1} - \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}{x - 1} = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}.$$

9.7. Пусть $a/d = m/n$, где m и n — натуральные числа. При всех натуральных k число $(1+n)^k - 1$ делится на n, поэтому число $b_k = \dfrac{a(1+n)^k - a}{d} = \dfrac{m}{n}((1+n)^k - 1)$ целое. Значит, все числа $a(1+n)^k = a + b_k d$ принадлежат данной арифметической прогрессии.

Пусть $a + kd$, $a + ld$, $a + md$ — последовательные члены геометрической прогрессии, причём $k < l < m$. Тогда $(a + ld)^2 = (a + kd)(a + md)$, т.е. $a(2l - k - m) = d(km - l^2)$. Остаётся проверить, что $2l - k - m \neq 0$. Пусть $2l - k - m = 0$. Тогда $km - l^2 = 0$. Поэтому $(k - m)^2 = (k + m)^2 - 4km = 4l^2 - 4l^2 = 0$, что противоречит условию $k < m$.

9.8. Покажем, что среди данных чисел не может быть больше четырёх попарно различных чисел. Объединим равные числа в группы, выберем в каждой группе по одному числу и расположим выбранные числа в порядке убывания: $a > b > c > d > e > \ldots$. Числа a, b, c, d по условию образуют геометрическую прогрессию. Но $ab > cd$ и $ac > bd$, поэтому $ad = bc$, т.е. $d = bc/a$. Те же самые рассуждения показывают, что $e = bc/a$.

9.9. Каждый член геометрической прогрессии представляется в виде aq^n, $n \geqslant 0$. Случай, когда $q = 1$, очевиден, поэтому будем считать, что $q \neq 1$. Предположим, что существуют различные целые неотрицательные числа k_1, $k_2, \ldots, k_{m+1}$ $(m \geqslant 2)$, для которых

$$aq^{k_1} + aq^{k_2} + \ldots + aq^{k_m} = aq^{k_{m+1}}. \tag{1}$$

Пусть $l_1 < l_2 < \ldots < l_{m+1}$ — это числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$, записанные в порядке возрастания. Перепишем равенство (1) в виде

$$aq^{l_1} = \pm aq^{l_2} \pm \ldots \pm aq^{l_{m+1}}.$$

После сокращения на aq^{l_1} получим

$$1 = q^{l_2-l_1}(1 + q^{l_3-l_2} + \ldots + q^{l_{m+1}-l_2}).$$

Левая часть равенства равна 1, а правая часть делится на целое число $q^{l_2-l_1}$, абсолютная величина которого строго больше 1. Получено противоречие.

9.10. Первую сумму можно записать в виде $\sum_{i=1}^{n-p+1}(a_i + \ldots + a_{i+p-1}) = \sum_{i=1}^{n-p+1}\sum_{j=0}^{p-1} a_{i+j} = \sum_{i=0}^{n-p}\sum_{j=0}^{p-1} a_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{n-p} a_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{n-q}\sum_{i=0}^{q-1} a_{i+j+1}$. В результате мы получили вторую сумму.

9.11. Согласно задаче 9.10 $(a_1+a_2+\ldots+a_7)+(a_2+\ldots+a_8)+\ldots+(a_{11}+ \ldots + a_{17}) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}) + (a_2 + \ldots + a_{12}) + \ldots + (a_7 + \ldots + a_{17})$. Поэтому $n < 17$.

При $n = 16$ такая последовательность существует: 5, 5, -13, 5,5, 5, -13, 5, 5, -13, 5,5, 5, -13, 5, 5.

9.12. Сложив равенства $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, получим $(n+1)^3 = 1 + 3S_2(n) + 3S_1(n) + n$. Значит,

$$3S_2(n) = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Сложив равенства $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем $(n+1)^4 = 1 + 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + n$. Значит,

$$4S_3(n) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) = n^2(n+1)^2.$$

9.13. а) С одной стороны, $\sum_{j=1}^{k}\left((j+1)^{k+1} - j^{k+1}\right) = (n + 1)^{k+1} - 1$. С другой стороны, $\sum_{j=1}^{k}\left((j+1)^{k+1} - j^{k+1}\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\binom{k+1}{k}j^k + \binom{k+1}{k-1}j^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{1}j + 1\right) = \binom{k+1}{k}S_k(n) + \binom{k+1}{k-1}S_{k-1}(n) + \ldots + \binom{k+1}{1}S_1(n) + S_0(n)$.

б) Достаточно воспользоваться формулой из задачи а) и применить индукцию по k. Нужно лишь учесть, что $\binom{k+1}{k} = k+1$.

9.14. а) С одной стороны, $\sum_{j=1}^{k}\left(j^k(j+1)^k - j^k(j-1)^k\right) = n^k(n+1)^k$. С другой стороны, эта сумма равна сумме выражений вида

$$j^k + \binom{k}{1}j^{2k-1} + \binom{k}{2}j^{2k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}j^{k-1} + \binom{k}{k}j^k$$
$$- j^k + \binom{k}{1}j^{2k-1} - \binom{k}{2}j^{2k-2} + \ldots \pm \binom{k}{k-1}j^{k-1} \mp \binom{k}{k}j^k.$$

Поэтому она равна $2S$.

б) Согласно задаче а) $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\binom{2}{1}S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$, $\binom{5}{1}S_5(n) = \frac{n^3(n+1)^3}{2} - \binom{5}{3}S_3(n)$ и т.д.

9.15. С одной стороны, $\sum_{j=1}^{k}\left((j+1)^{k+1}-(j-1)^{k+1}\right) = (n+1)^{k+1} + n^{k+1} - 1$. С другой стороны, эта сумма равна $2S$.

9.16. Согласно задаче 9.12 $1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$. Поэтому $1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n)^3 = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)$, т.е. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3+2^3(1^3+2^3+\ldots+n^3) = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2$. Преобразуем последнее равенство, воспользовавшись тем, что $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. В результате получим $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

9.17. а) Рассматриваемую сумму можно разбить на слагаемые $\frac{1}{k}+\frac{1}{p-k}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}$. При этом $\frac{1}{k}+\frac{1}{p-k} = \frac{p}{k(p-k)}$. После приведения таких дробей к общему знаменателю получаем $\frac{m}{n} = \frac{pq}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)}$. Остаётся заметить, что p не делится ни на одно из чисел $2,\ 3,\ \ldots,\ p-1$.

б) Рассматриваемая дробь равна

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}+\frac{p+1}{2}}\right) =$$

$$= p\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2(p-2)}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)}\right) = p\frac{M}{(p-1)!},$$

где

$$M = \frac{(p-1)!}{p-1}+\frac{(p-1)!}{2(p-2)}+\ldots+\frac{(p-1)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

Нужно доказать, что M делится на p.

Пусть $x \equiv \frac{(p-1)!}{k(p-k)} \pmod p$. Тогда $xk(p-k) \equiv (p-1)! \pmod p$. Согласно теореме Вильсона (задача 31.15 а) $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, поэтому $-xk^2 \equiv -1 \pmod p$. Теперь легко убедиться, что, когда k пробегает значения $1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}$, x пробегает значения $1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Действительно, k^2 пробегает все квадратичные вычеты. Для каждого k можно выбрать $\bar{k}$ так, что $k\bar{k} \equiv 1 \pmod p$. Ясно, что $\bar{k}^2$ тоже пробегает все квадратичные вычеты и $\bar{k} \equiv x \pmod p$.

В итоге получаем, что $M \equiv 1^2+2^2+\ldots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod p$. Но согласно

задаче 9.12 $1^2+2^2+\ldots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p}{6}\right)$. Это число делится на p.

9.18. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-1}= \\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-1}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{4k-2}\right)= \\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-1}--1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2k-1}= \\
&=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\ldots+\frac{1}{4k-1}.
\end{aligned}$$

Число слагаемых в последней сумме чётно, поэтому слагаемые можно сгруппировать в пары

$$\frac{1}{2k-s}+\frac{1}{4k-1+s}=\frac{6k-1}{(2k-s)(4k-1+s)}.$$

По условию число $6k-1$ простое. Поэтому сумма нескольких дробей с числителями $6k-1$ является дробью, числитель которой делится на $6k-1$.

9.19. Покажем, что $k^p+(p-k)^p$ делится на p^2. Действительно, $(x-y)^p = -y^p+pxy^{p-1}+\ldots$, где многоточием обозначены члены, делящиеся на x^2. В нашем случае $(p-k)^p \equiv -k^p+pk^{p-1}p \equiv -k^p \pmod{p^2}$, поэтому $k^p+(p-k)^p$ делится на p^2.

Число p простое, поэтому если $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то оба числа k^p и $(p-k)^p$ на p не делятся. Значит, $a_k+a_{p-k}=p^2$. Рассматриваемая сумма разбивается на $(p-1)/2$ слагаемых вида a_k+a_{p-k}, поэтому она равна $p^2(p-1)/2$.

9.20. Запишем между соседними плюсами число $+2$, между соседними минусами запишем -2, а между соседними плюсом и минусом запишем 0. С одной стороны, сумма всех записанных чисел равна $2(a-b)$. С другой стороны, она равна $2(p-q)$.

Глава 10.

Многочлены I

10.1. Выделение полного квадрата

10.1. Представьте многочлен $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ в виде полного квадрата.

10.2. Корни многочленов

10.2. а) Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ равен $f(a)$ (*Безу*).

б) Пусть x_0 — корень многочлена $f(x)$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x-x_0$.

10.3. Пусть $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что он имеет рациональный корень $x_0 = p/q$, причём p/q — несократимая дробь. Докажите, что a_n делится на q, а a_0 делится на p.

10.4. Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

10.5. Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

10.6. Найдите все многочлены вида $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \ldots \pm x \pm 1$, у которых все корни вещественны.

10.3. Коэффициенты многочлена

10.7. Определите коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1 + x^5 + x^7)^{20}.$$

10.8. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с вещественными коэффициентами, причём $a_n \geqslant 1$. Докажите, что если число m больше любого из чисел $|a_{n-1}| + 1, \ldots, |a_0| + 1$, то $Q(x) = P(x + m)$ — многочлен с положительными коэффициентами.

10.9. При делении многочлена $x^{1951} - 1$ на $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ получается частное и остаток. Найдите в частном коэффициент при x^{14}.

10.4. Теорема Виета

10.10. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$, чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

10.11. а) Пусть α, β и γ — корни многочлена $x^3 - 9x + 9$. Докажите, что $\alpha^2 + \alpha - 6 = \beta$ или γ.

б) Пусть α, β и γ — корни многочлена $x^3 - 21x + 35$. Докажите, что $\alpha^2 + 2\alpha - 14 = \beta$ или γ.

10.5. Делимость

10.12. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — целые числа. Докажите, что число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

10.13. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(7) = 11$ и $P(11) = 13$?

10.14. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём для некоторого целого числа n числа $P(n)$, $P(n+1)$ и $P(n+2)$ делятся на 3. Докажите, что тогда $P(m)$ делится на 3 для любого целого m.

10.15. Докажите, что любой многочлен с целыми коэффициентами, отличный от константы, при некотором натуральном значении аргумента принимает значение, которое является составным числом.

10.16. Приведите пример многочлена $P(x)$, который делится на $x^2 + 1$, и при этом $P(x) - 1$ делится на $x^3 + 1$.

10.17. Пусть $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$ для $n = 1, 2, \ldots$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём $P(x) > 0$ при $x \geqslant 0$. Докажите, что $\text{НОД}(a_m, a_n) = a_d$, где $d = \text{НОД}(m, n)$.

10.18. Докажите, что многочлен $x^{15} - 1$ имеет делители всех степеней от 1 до 14, т.е. для любого натурального числа $k \leqslant 14$ найдётся многочлен степени k с целыми коэффициентами, делящий $x^{15} - 1$.

10.19. Докажите, что многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$ тогда и только тогда, когда n не делится на 3.

10.20. а) Известно, что $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — данные целые числа, при любом целом x делится на 5. Докажите, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

б) Известно, что $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d, e — данные целые числа, при любом целом x делится на 7. Докажите, что все целые числа a, b, c, d, e делятся на 7.

10.21. Докажите, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то $p - kq$ — делитель числа $f(k)$ при любом целом k.

10.22. Докажите, что ни при каком целом A многочлен $3x^{2n} + Ax^n + 2$ не делится на многочлен $2x^{2m} + Ax^m + 3$.

10.6. Неравенства для корней

10.23. Докажите, что положительный корень уравнения $x(x + 1) \ldots (x + n) = 1$ меньше, чем $1/n!$.

10.7. Количество вещественных корней многочлена

10.24. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n не может иметь более n различных корней.

Число a называют корнем *кратности* k $(k \geqslant 1)$ многочлена $P(x)$, если $P(x)$ делится на $(x-a)^k$ и не делится на $(x-a)^{k+1}$.

10.25. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n не может иметь более n корней с учётом их кратностей, т.е. если $a_1, \ldots, a_m$ — различные корни с кратностями $k_1, \ldots, k_m$, то $k_1 + \ldots + k_m \leqslant n$.

10.26. Докажите, что уравнение

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = 0,$$

где $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$, не может иметь двух положительных корней.

10.27. Пусть $f_1(x) = x^2 - 2$, $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. Докажите, что для любого натурального n уравнение $f_n(x) = x$ имеет ровно 2^n различных решений.

10.8. Разные задачи

10.28. Докажите, что в произведении

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} + x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не остаётся членов, содержащих x в нечётной степени.

10.29. Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $(x-1)$?

10.30. В каком из выражений:

$$(1 - x^2 + x^3)^{1000}, \quad (1 + x^2 - x^3)^{1000}$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

10.31. а) Найдите целое число a, при котором $(x-a)(x-10)+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

б) Найдите такие отличные от нуля неравные между собой целые числа a, b, c, чтобы выражение $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ разлагалось в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

10.9. Интерполяционные многочлены

10.32. Пусть $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — попарно различные числа. Докажите, что существует ровно один многочлен $P(x)$ степени не выше n, принимающий в точке x_i заданное значение a_i (*интерполяционный многочлен Лагранжа*).

10.33. Докажите, что $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0$ при $m < n$ (m — натуральное число) и $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^n \binom{n}{k} = (-1)^n n!$.

10.34. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные числа. Докажите, что для любых $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n & = & b_0, \\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n & = & b_1, \\ a_1^2x_1 + \ldots + a_n^2x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + \ldots + a_n^{n-1}x_n & = & b_{n-1} \end{cases}$$

имеет решение, причём ровно одно.

10.35. Даны точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что многочлен $f(x)$ степени n, принимающий в этих точках значения $f(x_0), \ldots, f(x_n)$, можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \ldots + \\ + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})f(x_0; \ldots; x_n),$$

где $f(x_0; \ldots; x_k)$ зависит только от точек $x_0, \ldots, x_k$ и значений многочлена в этих точках (*интерполяционный многочлен Ньютона*).

Интерполяционный многочлен Ньютона удобен тем, что при добавлении к $x_0, x_1, \ldots, x_n$ одной точки x_{n+1} нужно вычислить только $f(x_0; \ldots; x_{n+1})$; остальные коэффициенты, в отличие от интерполяционного многочлена Лагранжа, пересчитывать не нужно.

10.10. Рациональные функции

10.36. Пусть $R(x) = P(x)/Q(x)$, где P и Q — взаимно простые многочлены. Докажите, что $R(x)$ можно представить в виде

$$R(x) = A(x) + \sum_{i,k} \frac{c_{ik}}{(x - a_i)^k},$$

где c_{ik} — некоторые числа, $A(x)$ — некоторый многочлен.

10.37. Докажите, что представление рациональной функции в виде, указанном в задаче 10.36, единственно.

10.11. Целозначные многочлены

Многочлен $p(x)$ называют *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых x.

10.38. Докажите, что многочлен

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$$

целозначный.

10.39. Пусть $p_k(x)$ — многочлен степени k, принимающий целые значения при $x = n, n+1, \ldots, n+k$ для некоторого целого числа n. Тогда

$$p_k(x) = c_0\binom{x}{k} + c_1\binom{x}{k-1} + c_2\binom{x}{k-2} + \ldots + c_k,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_k$ — целые числа.

10.12. Многочлены от нескольких переменных

Многочлен от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ — это сумма *мономов* вида $a_{k_1\ldots k_n}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$. *Степень* монома — это число $k_1 + \ldots + k_n$. *Степень* многочлена от нескольких переменных — это наибольшая степень (ненулевого) монома.

10.40. Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и одного только y.

10.41. а) Существуют ли многочлены $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ от переменных x, y, z, удовлетворяющие тождеству

$$(x - y + 1)^3P + (y - z - 1)^3Q + (z - 2x + 1)^3R = 1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x - y + 1)^3P + (y - z - 1)^3Q + (z - x + 1)^3R = 1.$$

См. также задачу 16.10.

Решения

10.1. Равенства $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = x^4+10x^3+\ldots+25$ и $(x^2+ax+b)^2 = x^4+2ax^3+\ldots+b^2$ показывают, что подходящими кандидатами являются квадратные трёхчлены $x^2+5x\pm 5$. Далее заметим, что $(x^2+5x+5)-1 = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$ и $x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$, $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$.

10.2. а) Поделим $f(x)$ на $x-a$ с остатком. В результате получим $f(x) = (x-a)g(x)+r$, где r — некоторое число. Положим $x=a$. В результате получим $f(a)=r$.

б) Непосредственно следует из а), поскольку $f(x_0)=0$.

10.3. Равенство $a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=0$ после умножения на q^n запишется в виде $a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$. Число $a_np^n = -(a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n)$ делится на q, причём по условию p и q не имеют общих делителей. Следовательно, a_n делится на q. Число $a_0q^n = -(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1})$ делится на p, причём p и q не имеют общих делителей. Следовательно, a_0 делится на p.

10.4. Пусть $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогда $x^2=5+\sqrt{6}$ и $(x^2-5)^2=24$, т.е. $x^4-10x^2+1=0$.

10.5. Несложные вычисления показывают, что

$$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})^3 = 5+3\alpha,$$
$$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})^6 = 133+30\alpha+9\beta,$$
$$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})^9 = 2555+711\alpha+135\beta,$$

где $\alpha=\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})$ и $\beta=\sqrt[3]{36}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9})$. Поэтому $x^9-15x^6-87x^3-125=0$ для $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

10.6. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots$, где $a_i=\pm 1$. Предположим, что все эти корни вещественны. Тогда $x_1^2+\ldots+x_n^2 = a_{n-1}^2-2a_{n-2} = 1\pm 2 = 3$, поскольку рассматриваемое число неотрицательно. Таким образом, $a_{n-2}=-1$. Далее, $x_1^2\ldots x_n^2 = a_0^2 = 1$. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $(x_1^2+\ldots+x_n^2)/n \geqslant \sqrt[n]{x_1^2\ldots x_n^2}$, т.е. $3/n\geqslant 1$. Следовательно, $n\leqslant 3$, причём при $n=3$ должно выполняться равенство $x_1^2=x_2^2=x_3^2=1$. Многочлены $(x\pm 1)^3$ нам не подходят, поэтому при $n=3$ остаются многочлены $(x^2-1)(x\pm 1)$. Случаи $n=1$ и 2 легко разбираются.

10.7. Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, поэтому коэффициент при x^{18} будет равен нулю.

Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: $17=7+5+5$; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 выражений $1+x^5+x^7$ мы должны выбрать x^7, а

в двух из 19 оставшихся таких выражений мы должны выбрать x^5. Поэтому коэффициент при x^{17} равен $20 \cdot \frac{19 \cdot 18}{2} = 3420$.

10.8. Запишем многочлен $P(x)$ в виде $P(x) = (a_n - 1)x^n + (x + a_{n-1} - 1)x^{n-1} + (x + a_{n-2} - 1)x^{n-2} + \ldots + (x + a_0 - 1) + 1$. Эта запись показывает, что $Q(x) = (a_n - 1)(x+m)^n + \big(x + (m + a_{n-1} - 1)\big)x^{n-1} + \ldots + \big(x + (m + a_0 - 1)\big) + 1$. Здесь $a_n - 1 \geqslant 0$, а числа $m + a_{n-1} - 1, \ldots, m + a_0 - 1$ положительны. Поэтому после раскрытия скобок получаем многочлен с положительными коэффициентами.

10.9. Ответ: -1. Равенства $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2+1)(x^2+x+1)$ и $x^{12} - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ показывают, что

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = \frac{x^{12}-1}{(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{x^{12}-1}{x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1}.$$

Поэтому поделить многочлен $x^{1951} - 1$ на $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ — это то же самое, что сначала поделить его на $x^{12} - 1$, а потом умножить на $x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1$. Но

$$\frac{x^{1951}-1}{x^{12}-1} = x^{1939} + x^{1927} + x^{1915} + \ldots + x^{19} + x^7 + \frac{x^7-1}{x^{12}-1},$$

поэтому искомый коэффициент равен коэффициенту при x^{14} в произведении

$$\left(x^{1939} + \ldots + x^{19} + x^7 + \frac{x^7-1}{x^{12}-1}\right)(x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1).$$

10.10. Числа x_1, x_2, x_3 составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $x_1 + x_3 = x_2$ (возможно, после перенумерации), т.е. $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$. Согласно теореме Виета $x_1 + x_2 + x_3 = -a$. Таким образом, число $x_2 = -a/3$ должно быть корнем данного многочлена. Эквивалентное условие таково: $\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c = 0$.

10.11. а) Пусть $y = \alpha^2 + \alpha - 6$. Требуется доказать, что $(y-\beta)(y-\gamma) = 0$. По теореме Виета $(y-\beta)(y-\gamma) = y^2 - (\beta+\gamma)y + \beta\gamma = y^2 + \alpha y - \frac{9}{\alpha}$. Вычислим $y^2 + \alpha y - \frac{9}{\alpha}$, подставив $y = \alpha^2 + \alpha - 6$ и воспользовавшись тем, что $\alpha^3 = 9\alpha - 9$, $\alpha^4 = 9\alpha^2 - 9\alpha$ и $-\frac{9}{\alpha} = \alpha^2 - 9\alpha$.

б) Можно воспользоваться такими же рассуждениями, как и при решении задачи а).

10.12. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Тогда $P(a) - P(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} + b^{n-1}) + \ldots + a_1(a - b)$. Поэтому достаточно проверить, что для любого натурального k число $a^k - b^k$ делится на $a - b$. Для этого можно воспользоваться тождеством $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-1}b + \ldots + b^{k-1})$.

10.13. Нет, не существует. Согласно задаче 10.12 разность $P(11)-P(7) = 2$ должна делиться на $11-7=4$.

10.14. Если a и b — целые числа, причём $a>b$, то число $P(a)-P(b)$ делится на $a-b$ (задача 10.12). Для любого целого числа m одно из чисел $m-n$, $m-(n+1)$, $m-(n+2)$ делится на 3. Поэтому одно из чисел $P(m)-P(n)$, $P(m)-P(n+1)$, $P(m)-P(n+2)$ делится на 3.

10.15. Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ целые. Предположим, что $P(k)=p$ — простое число (здесь k — некоторое натуральное число). Многочлен $P(x)$ не может принимать одно и то же значение более чем в n различных точках, поэтому можно выбрать натуральное число a так, что $P(k+pa) \neq \pm p$. С другой стороны, $P(k+pa)$ делится на p. Действительно, согласно задаче 10.12 разность $P(k+pa)-P(k)$ делится на $k+pa-k=pa$.

10.16. Ответ: $P(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)(x^2+x-1)$.

Пусть $P(x) = U(x)(x^2+1)$ и $P(x) = V(x)(x^3+1)$. Тогда $U(x)(x^2+1) - V(x)(x^3+1) = 1$. Чтобы найти такие многочлены U и V, нужно применить алгоритм Евклида к $a = x^3+1$ и $b = x^2+1$:

$$a = xb + r_1 \qquad (r_1 = 1-x),$$
$$b = -xr_1 + r_2 \qquad (r_2 = x+1),$$
$$r_1 = -r_2 + 2.$$

Выражая последовательно r_1 и r_2 через a и b, получаем:

$$b = -x(a-bx) + r_2,$$
$$a - bx = -b - xa + x^2b + 2.$$

Таким образом, $(x+1)a + (-x^2-x+1)b = 2$. Поэтому можно положить $U(x) = -\frac{1}{2}(x^2+x-1)$ и $V(x) = -\frac{1}{2}(x^2+x-1)$.

10.17. Положим $P_1(x) = P(x)$, $P_n(x) = P\big(P_{n-1}(x)\big)$ при $n \geqslant 2$. Тогда $a_n = P_n(a_0)$ и вообще $a_n = P_{n-k}(a_k)$ при $0 \leqslant k < n$. Равенство $a_n = P_n(0)$ показывает, что a_n — свободный член многочлена P_n, т.е. $P_n(x) = a_n + xQ_n(x)$, где Q_n — многочлен с целыми коэффициентами. Таким образом, если $m > n \geqslant 1$, то НОД(a_m, a_n) = НОД$(P_{m-n}(a_n), a_n)$ = НОД$(a_{m-n} + a_nQ_{m-n}(a_n), a_n)$ = НОД(a_{m-n}, a_n). Воспользовавшись результатом задачи 4.11, получаем требуемое.

10.18. Многочлен $x^{15}-1$ раскладывается на множители, степени которых равны 1, 2, 4 и 8. Действительно, $x^{15}-1 = (x^5-1)(x^{10}+x^5+1)$, $x^5-1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, а многочлен $x^{10}+x^5+1$ раскладывается на множители степеней 2 и 8 (задача 5.6). Легко также проверить, что любое натуральное число $k \leqslant 14$ можно представить в виде $a_0 + a_1\cdot 2 + a_2\cdot 4 + a_3\cdot 8$, где $a_i = 0$ или 1.

10.19. При $n = 0$ и 1 утверждение очевидно. При $n = 2$ можно поделить многочлен $x^4 + x^2 + 1$ на $x^2 + x + 1$; в результате получим $x^2 - x + 1$. Разность многочленов $x^{2(n+3)} + x^{n+3} + 1$ и $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$, поскольку многочлены $x^{2n+6} - x^{2n} = x^{2n}(x^6 - 1)$ и $x^{n+3} - x^n = x^n(x^3 - 1)$ делятся на $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Поэтому многочлен $x^{2(n+3)} + x^{n+3} + 1$ делится на $x^2 + x + 1$ тогда и только тогда, когда $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

10.20. а) Подставив $x = 0$, получим, что d делится на 5. Учитывая это и подставляя $x = \pm 1$, получим, что $a + b + c$ и $-a + b - c$ делятся на 5. Следовательно, $2b$ и $2a + 2c$ делятся на 5, а значит, b и $a + c$ делятся на 5. Подставив $x = 2$, получим, что $4(2a + c) + 4b + d$ делится на 5. Значит, $2a + c$ делится на 5 и $a = (2a+c)-(a+c)$ тоже делится на 5. Поэтому c тоже делится на 5.

б) Подставив $x = 0$, получим, что e делится на 7. Учитывая это и подставляя $x = \pm 1$, получим, что числа $a \pm b + c \pm d$ делятся на 7. Поэтому $2(a + c)$ и $2(b + d)$ делятся на 7, а значит, $a + c$ и $b + d$ делятся на 7. Подставляя $x = \pm 2$ и учитывая, что e делится на 7, получаем, что числа $2(8a \pm 4b + 2c \pm d)$ делятся на 7. Поэтому $4a + c$ и $4b + d$ делятся на 7. Следовательно, $3a = (4a + c) - (a + c)$ делится на 7. Поэтому a делится на 7, а значит, c делится на 7. Аналогично доказывается, что b и d делятся на 7.

10.21. Многочлен $f(x)$ делится на $x - \frac{p}{q}$, поэтому $f(x) = g(x)\left(x - \frac{p}{q}\right)$. Пусть $g(x) = b_0 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$. Тогда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 - b_0 \frac{p}{q}$, $a_2 = b_2 - b_2 \frac{p}{q}$, $\ldots$, $a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2} \frac{p}{q}$, $a_n = -b_{n-1} \frac{p}{q}$. Число b_0 целое. Равенство $qa_1 = qb_1 - pb_0$ показывает, что число qb_1 целое. Равенство $q^2 a_2 = q^2 b_2 - qb_1 p$ показывает, что число $q^2 b_2$ целое и т.д. Таким образом, многочлен $q^{n-1} g(x)$ имеет целые коэффициенты.

Равенство $q^n f(k) = q^{n-1} g(k)(qk - p)$ показывает, что число $q^n f(k)$ делится на $qk - p$. Числа q^n и $qk - p$ взаимно простые, поэтому число $f(k)$ делится на $qk - p$.

10.22. Предположим, что многочлен $3x^{2n} + Ax^n + 2$ делится на многочлен $2x^{2m} + Ax^m + 3$. Тогда любой корень многочлена $2x^{2m} + Ax^m + 3$ является также корнем многочлена $3x^{2n} + Ax^n + 2$. Если x_i — корень многочлена $2x^{2m} + Ax^m + 3$, то $x_i^m = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 24}}{4} = \alpha_{1,2}$. Можно считать, что $x_1^m = \alpha_1$ и $x_2^m = \alpha_2$. Пусть $\beta_{1,2} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 24}}{6}$ — корни квадратного трёхчлена $3x^2 + Ax + 2$.

Случай 1. $A^2 - 24 > 0$.

В этом случае $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$, поэтому $x_1^n = \beta_1$ и $x_2^n = \beta_2$. С одной стороны, $|x_1 x_2| = \sqrt[n]{|\beta_1 \beta_2|} = \sqrt[n]{2/3} < 1$, а с другой стороны $|x_1 x_2| = \sqrt[m]{|\alpha_1 \alpha_2|} = \sqrt[m]{3/2} > 1$. Приходим к противоречию.

Случай 2. $A^2 - 24 \leqslant 0$.

В этом случае $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \sqrt{3/2}$ и $|\beta_1| = |\beta_2| = \sqrt{2/3}$. Поэтому, с одной стороны, $|x_1| = \sqrt[m]{|\alpha_1|} = \sqrt[2m]{3/2} > 1$, а с другой стороны, $|x_1| = \sqrt[n]{|\beta_1|} = \sqrt[2n]{2/3} < 1$. Снова приходим к противоречию.

10.23. Если $x > 0$ и $x(x+1)\dots(x+n) = 1$, то

$$x = \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} < \frac{1}{1\cdot 2\dots n} = \frac{1}{n!}.$$

10.24. Пусть a — корень многочлена $P(x)$. Поделим $P(x)$ на $x-a$ с остатком. В результате получим $P(x) = (x-a)R(x) + b$. При этом $b = P(a) = 0$. Значит, многочлен $P(x)$ делится на $x-a$. Если $a_1, \dots, a_m$ — корни многочлена $P(x)$, то он делится на $(x-a_1)\dots(x-a_m)$, поэтому $n \geqslant m$.

10.25. Многочлен $P(x)$ делится на $(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_m)^{k_m}$, поэтому $k_1 + \dots + k_m \leqslant n$.

10.26. Перепишем данное уравнение в виде

$$1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}.$$

При $x > 0$ функция $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ монотонно убывает, поэтому она не может принимать значение 1 при двух различных положительных значениях x.

10.27. Функция $f_1(x)$ монотонно убывает от 2 до -2 на отрезке $[-2, 0]$ и монотонно возрастает от -2 до 2 на отрезке $[0, 2]$. Поэтому уравнение $f_1(x) = x$ имеет корень $x_1 \in (-2, 0)$ и корень $x_2 = 2$. Кроме того, уравнение $f_1(x) = 0$ имеет два корня $\pm x_1'$. Функция $f_2(x)$ поочерёдно монотонно возрастает в пределах от -2 до 2 на следующих четырёх отрезках: $[-2, -x_1']$, $[-x_1', 0]$, $[0, x_1']$, $[x_1', 2]$. Поэтому на каждом из этих отрезков по крайней мере одно решение имеет уравнение $f_2(x) = x$ и ровно одно решение имеет уравнение $f_2(x) = 0$. Значит, для функции $f_3(x)$ получаем 2^3 интервалов монотонности и т.д. В результате получаем, что уравнение $f_n(x)$ имеет по крайней мере 2^n решений. Но больше 2^n решений оно не может иметь, потому что степень многочлена $f_n(x)$ равна 2^n.

10.28. Рассматриваемое произведение является многочленом $P(x)$, обладающим следующим свойством: $P(-x) = P(x)$.

10.29. Ответ: 6. Пусть $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = P(x)(x-1) + r$. Положив $x = 1$, получим $r = 6$.

10.30. Ответ: в выражении $(1+x^2-x^3)^{1000}$. Пусть $P(x) = (1-x^2+x^3)^{1000}$ и $Q(x) = (1+x^2-x^3)^{1000}$. Коэффициент при x^{20} у многочлена $P(x)$ такой же, как у многочлена $P(-x) = (1-x^2-x^3)^{1000}$, а у многочлена $Q(x)$ такой же, как у многочлена $Q(-x) = (1+x^2+x^3)^{1000}$. Ясно, что у многочлена $(1+x^2+x^3)^{1000}$ коэффициент при x^{20} больше, чем у многочлена $(1-x^2-x^3)^{1000}$.

Действительно, у первого многочлена член $p_{20}x^{20}$ равен сумме нескольких членов вида $(x^2)^n(x^3)^m$, где $2n+3m=20$, а у второго многочлена член $q_{20}x^{20}$ равен сумме тех же самых членов, но со знаком $(-1)^{n+m}$. Во втором случае встречаются члены со знаком минус, например, при $m=2$ и $n=7$.

10.31. а) Пусть $(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)$. Положив $x=-b$, получим $(b+a)(b+10)=-1$. Числа a и b целые, поэтому числа $b+a$ и $b+10$ тоже целые. Число -1 представляется в виде произведения двух множителей двумя способами. Соответственно получаем два варианта: 1) $b+10=1$ и $b+a=-1$; 2) $b+10=-1$ и $b+a=1$. Поэтому $a=8$ или $a=12$. В первом случае $(x-8)(x-10)+1=(x-9)^2$, а во втором случае $(x-12)(x-10)+1=(x-11)^2$.

б) Пусть $x(x-a)(x-b)(x-c)+1=P(x)Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Ясно, что $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены со старшим коэффициентом 1. При $x=0$, $x=a$, $x=b$ и $x=c$ имеет место равенство $P(x)Q(x)=1$, т.е. либо $P(x)=1$ и $Q(x)=1$, либо $P(x)=-1$ и $Q(x)=-1$. В обоих случаях $P(x)-Q(x)=0$. Степень многочлена $P(x)-Q(x)$ строго меньше четырёх, поэтому $P(x)=Q(x)$ для всех x. Таким образом, $x(x-a)(x-b)(x-c)=P^2(x)-1=\big(P(x)+1\big)\big(P(x)-1\big)$. Поэтому $P(x)\pm 1=x(x-a)$ и $P(x)\mp 1=(x-b)(x-c)$, т.е. $x(x-a)-(x-b)(x-c)=\pm 2$ (мы не различаем решения, отличающиеся лишь перестановкой чисел a, b, c). Следовательно, $a=b+c$ и $bc=\mp 2$. В результате получаем следующие наборы значений (a,b,c): $(1,2,3)$, $(-1,-2,-3)$, $(1,-2,-1)$, $(2,-1,1)$. Им соответствуют следующие разложения многочлена $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$: $(x^2-3x+1)^2$, $(x^2+3x+1)^2$, $(x^2+x-1)^2$, $(x^2-x-1)^2$.

10.32. Единственность многочлена P следует из того, что разность двух таких многочленов обращается в нуль в точках $x_1,\ldots,x_{n+1}$ и имеет при этом степень не выше n. Ясно также, что следующий многочлен обладает всеми требуемыми свойствами:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}, \end{aligned}$$

где $\omega(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_{n+1})$.

10.33. Пусть $P(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $\leqslant n$, принимающий значения x^m при $x=0,1,2,\ldots,n$. Тогда

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} k^m \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)(x-k-1)\ldots(x-n)}{k(k-1)\ldots 1(-1)(-2)\ldots(k-n)}.$$

Коэффициент при x^n у этого многочлена равен

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-n}\frac{k^m}{k!(n-k)!}=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m\binom{n}{k}.$$

С другой стороны, если $m \leqslant n$, то $P(x) = x^m$. Поэтому $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \binom{n}{k} = 0$ при $m < n$ и $\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \binom{n}{k} = 1$.

10.34. Пусть $P_i(t) = p_{0i}+p_{1i}t+p_{2i}t^2+\ldots+p_{n-1,i}t^{n-1}$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, принимающий значение 1 при $t = a_i$ и значение 0 при $t = a_j$, где $j \neq i$. Умножим данные уравнения на p_{0i}, p_{1i}, …, $p_{n-1,i}$ и сложим их. В результате получим $P_i(a_1)x_1 + \ldots + P_i(a_n)x_n = p_{0i}b_0 + \ldots + p_{n-1,i}b_{n-1}$, т.е. $x_i = p_{0i}b_0 + \ldots + p_{n-1,i}b_{n-1}$. Единственность решения доказана. Остаётся проверить, что так мы действительно получаем решение, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k p_{0i}b_0 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_i^k p_{n-1,i}b_{n-1} = b_k$$

при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Для этого достаточно доказать, что $\sum_{i=1}^{n} a_i^k P_i(t) = t^k$ при указанных k. Но это очевидно: при $k \leqslant n-1$ выражение $\sum_{i=1}^{n} a_i^k P_i(t) - t^k$ представляет собой многочлен степени не выше $n-1$, обращающийся в нуль при $t = a_1, \ldots, a_n$.

10.35. Должны выполняться следующие равенства:

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0; x_1),$$
$$f(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0)f(x_0; x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)f(x_0; x_1; x_2)$$

и т.д. Из этих равенств немедленно получаем выражения для $f(x_0; x_1)$, $f(x_0; x_1; x_2)$ и т.д.

10.36. Поделив P на Q с остатком, можно перейти к дроби S/Q, где степень S меньше степени Q. Пусть $Q = Q_1Q_2$, где Q_1 и Q_2 — взаимно простые многочлены. Тогда можно выбрать многочлены $a(x)$ и $b(x)$ так, что $a(x)Q_1(x) + b(x)Q_2(x) = 1$. Поэтому

$$\frac{S}{Q_1Q_2} = \frac{aSQ_1 + bSQ_2}{Q_1Q_2} = \frac{aS}{Q_2} + \frac{bS}{Q_1}.$$

В полученных дробях нужно снова поделить с остатком числитель на знаменатель и т.д. После нескольких таких операций придём к сумме многочлена $A(x)$ и нескольких дробей вида $p(x)/(x-a)^n$, где $p(x)$ — многочлен степени меньше n. Остаётся записать многочлен $p(x)$ в виде

$$p(x) = b_1(x-a)^{n-1} + b_2(x-a)^{n-2} + \ldots + b_n.$$

10.37. Для данного a_i выберем наибольшее k, для которого встречается дробь $\frac{c_{ik}}{(x-a_i)^k}$, $c_{ik} \neq 0$. Покажем, что число c_{ik} определено однозначно. Действительно, после умножения на $(x-a_i)^k$ получаем равенство вида

$$R(x)(x-a_i)^k = c_{ik} + (x-a_i)f(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ — рациональная функция, в знаменателе которой нет множителей $x - a_i$, т.е. значение $f(a_i)$ определено. Подставив в равенство (1) $x = a_i$,

получим, что c_{ik} равно значению рациональной функции $R(x)(x-a_i)^k$ при $x = a_i$.

Аналогично, рассмотрев $R(x) - \dfrac{c_{ik}}{(x-a_i)^k}$, найдём $c_{i,k-1}$ и т.д.

10.38. При $k = 1$ это очевидно. Предположим теперь, что многочлен $\binom{x}{k}$ целозначный. Легко проверить, что

$$\binom{x+1}{k+1} - \binom{x}{k+1} = \binom{x}{k}.$$

Следовательно, при всех целых m, n разность

$$\binom{m}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

является целым числом. Остаётся заметить, что $\binom{0}{k+1} = 0$.

10.39. Индукцией по k легко доказать, что любой многочлен $p_k(x)$ степени k можно представить в виде

$$p_k(x) = c_0\binom{x}{k} + c_1\binom{x}{k-1} + c_2\binom{x}{k-2} + \ldots + c_k,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_k$ — некоторые числа. Действительно,

$$\binom{x}{0} = 1,\ \binom{x}{1} = x,\ \binom{x}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},\ \ldots,\ \binom{x}{k} = \frac{x^k}{k!} + \ldots.$$

Поэтому если $p_k(x) = ax^k + \ldots$, то многочлен $p_k(x) - ak!\binom{x}{k}$ имеет степень не выше $k-1$, и к нему можно применить предположение индукции. Таким образом, нужно лишь доказать, что числа $c_0, c_1, \ldots, c_k$ целые. Докажем это индукцией по k. База индукции: $k = 0$. По условию многочлен $p_0(x) = c_0$ принимает целое значение при $x = n$, поэтому число c_0 целое. Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для многочленов степени не выше k. Пусть многочлен

$$p_{k+1}(x) = c_0\binom{x}{k+1} + \ldots + c_{k+1}$$

принимает целые значения при $x = n, n+1, \ldots, n+k+1$. Рассмотрим многочлен

$$\Delta p_{k+1}(x) = p_{k+1}(x+1) - p_{k+1}(x) = c_0\binom{x}{k} + c_1\binom{x}{k-1} + \ldots + c_k.$$

Он принимает целые значения при $x = n, n+1, \ldots, n+k$. Поэтому числа $c_0, c_1, \ldots, c_k$ целые, а значит, число

$$c_{k+1} = p_{k+1}(n) - c_0\binom{n}{k+1} - c_1\binom{n}{k} - \ldots - c_k\binom{n}{1}$$

тоже целое.

10.40. Предположим, что существуют многочлены $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ и $g(y) = b_0y^m + b_1y^{m-1} + \ldots + b_m$, для которых $f(x)g(y) = x^{200}y^{200} + 1$. Положив $x = 0$, получим $a_ng(y) = 1$, т.е. $g(y) = 1/a_n$ при всех y. Положив $y = 0$, аналогично получим, что $f(x) = 1/b_m$ при всех x. Таким образом, $f(x)g(y) = \dfrac{1}{a_nb_m}$ — константа, а функция $x^{200}y^{200} + 1$, очевидно, не является константой.

10.41. а) Система уравнений $x - y + 1 = 0$, $y - z - 1 = 0$, $z - 2x + 1 = 0$ имеет решение $(x, y, z) = (1, 2, 1)$. При таких значениях переменных левая часть рассматриваемого выражения обращается в нуль. Поэтому таких многочленов P, Q, R не существует.

б) Пусть $f = x-y+1$, $g = y-z-1$, $h = z-x+1$. Тогда $f+g+h = 1$, поэтому $(f+g+h)^7 = 1$. Выражение в левой части этого равенства представляет собой сумму слагаемых вида $f^a g^b h^c$, где $a+b+c = 7$; в частности, одно из чисел a, b, c не меньше 3. Сгруппируем те слагаемые, для которых $a \geqslant 3$. В результате получим выражение вида f^3P. Среди оставшихся слагаемых сгруппируем те, для которых $b \geqslant 3$. Получим выражение вида g^3Q. Для оставшихся слагаемых $c \geqslant 3$, т.е. их сумма имеет вид h^3R. В результате мы получили требуемое тождество $f^3P + g^3Q + h^3R = 1$.

Глава 11.

Тригонометрия

11.1. Неравенства и сравнение чисел

11.1. Докажите, что $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ для $0 < \alpha < \pi/2$.

11.2. Докажите, что если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \pi/2$ и $n \geqslant 2$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

11.3. Сравните числа $\operatorname{tg} 55^\circ$ и 1,4.

11.4. Докажите, что если $0 < \alpha, \beta \leqslant \pi/4$, то

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}.$$

11.5. Докажите, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_1\cos x$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

11.6. Докажите, что если для любого угла φ выполняется неравенство

$$a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi \geqslant -1,$$

то $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n$.

11.7. Докажите, что если α и β — острые углы и $\alpha < \beta$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

11.8. Пусть A — произвольный угол, B и C — острые углы. Всегда ли существует такой угол X, что

$$\sin X = \frac{\sin B \sin C}{1 - \cos A \cos B \cos C}?$$

11.2. Тригонометрические тождества

11.9. Упростите выражение

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ.$$

11.10. Докажите, что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

11.11. Докажите, что

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

11.12. Найдите соотношение между

$$\arcsin \cos \arcsin x \text{ и } \arccos \sin \arccos x.$$

11.3. Уравнения

11.13. Решите уравнение

$$3 - 7 \cos^2 x \sin x - 3 \sin^3 x = 0.$$

11.14. Решите уравнение

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x.$$

11.15. Найдите все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

11.16. Решите уравнение

$$3 \sin\varphi \cos\varphi + 4 \sin\varphi + 3 \sin^2\varphi = 4 + \cos\varphi.$$

11.17. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \dfrac{x}{100}$?

11.4. Суммы синусов и косинусов, связанные с правильными многоугольниками

При решении задач этого параграфа полезна следующая геометрическая задача.

11.18. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулевому вектору.

11.19. Докажите следующие равенства:

а) $\sin\dfrac{2\pi}{n} + \sin\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0;$

б) $\cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = -1;$

в) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\alpha + \dfrac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$

11.20. Докажите следующие равенства:

а) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 1/2;$

б) $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}.$

11.21. Докажите, что

$$\cos\frac{2\pi}{2m+1} + \cos\frac{4\pi}{2m+1} + \cos\frac{6\pi}{2m+1} + \ldots + \cos\frac{2m\pi}{2m+1} = -\frac{1}{2}.$$

11.5. Вычисление сумм и произведений

11.22. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=0$, то
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

11.23. Докажите, что если $\sin\alpha\neq 0$, то
$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

11.24. Докажите, что:
а) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$;
б) $\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{8\pi}{9}=-\dfrac{1}{8}$.

11.25. а) Докажите, что $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$.
б) Докажите, что
$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+\ldots+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha.$$

11.26. Докажите, что
$$\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\ldots+\frac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha}=\frac{\operatorname{tg}n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}.$$

11.27. Докажите, что
$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}.$$

11.28. Докажите, что

а) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

б) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{1}{2}$.

11.29. Докажите, что $\cos\alpha+\cos(\alpha+x)+\cos(\alpha+2x)+\ldots+\cos(\alpha+$ $+nx)=\dfrac{\sin\left(\alpha+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\alpha-\dfrac{1}{2}x\right)}{2\sin\dfrac{1}{2}x}$.

11.6. Выражения для $\cos n\varphi$ и т.п.

11.30. а) Докажите, что $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$ и $\sin(n+1)\varphi = U_n(\cos\varphi)\sin\varphi$, где T_n и U_n — многочлены степени n.

б) Докажите, что $\sin(2k+1)\varphi = \sin\varphi P_k(\sin^2\varphi)$, где P_k — многочлен степени k.

11.31. Докажите, что

$$\frac{\sin(2k+1)\varphi}{\sin\varphi} = (-4)^k\left(\sin^2\varphi - \sin^2\frac{\pi}{2k+1}\right)\left(\sin^2\varphi - \sin^2\frac{2\pi}{2k+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\sin^2\varphi - \sin^2\frac{k\pi}{2k+1}\right).$$

11.7. Вспомогательные тригонометрические функции

11.32. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + x^2y &= y,\\ 2y + y^2z &= z,\\ 2z + z^2x &= x. \end{cases}$$

11.33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y+\dfrac{1}{y}\right) &= 5\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx &= 1. \end{cases}$$

11.34. а) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные положительные числа, $n \geqslant 3$. Докажите, что среди них можно выбрать два числа x_i и x_j, для которых

$$0 < \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n-1)}.$$

б) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные числа, $n \geqslant 3$. Докажите, что среди них можно выбрать два числа x_i и x_j, для которых

$$0 < \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

11.35. Докажите, что для любого положительного числа x и любого натурального числа n имеет место неравенство

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{2^2+x^2}+\ldots+\frac{x}{n^2+x^2}<\frac{\pi}{2}.$$

11.8. Тригонометрические многочлены

Тригонометрическим многочленом n-й степени называют функцию $f(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+a_2\cos 2\varphi+a_3\cos 3\varphi+\ldots+a_n\cos n\varphi$, где a_0, a_1, …, a_n — некоторые числа, причём $a_n\neq 0$.

11.36. Докажите, что для любого тригонометрического многочлена $f(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+\ldots+a_n\cos n\varphi$ существует многочлен $P(x)$ степени n со старшим коэффициентом $2^{n-1}a_n$, для которого $P(\cos\varphi)=f(\varphi)$. И наоборот, любому многочлену соответствует тригонометрический многочлен.

11.37. Пусть f — тригонометрический многочлен степени n со старшим коэффициентом a_n.

а) Докажите, что $\frac{1}{2n}\sum_{m=0}^{2n-1}(-1)^m f\left(\frac{m\pi}{n}\right)=a_n$.

б) Докажите, что $\left|f\left(\frac{m\pi}{n}\right)\right|\geqslant|a_n|$ для некоторого целого числа m.

11.38. Докажите, что если $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$, то $|P(x_0)|\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ для некоторого x_0, где $-1\leqslant x_0\leqslant 1$.

11.39. Пусть $0<a_0<a_1<\ldots<a_n$. Докажите, что тригонометрический многочлен $f(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+\ldots+a_n\cos n\varphi$ имеет на отрезке $[0,\pi]$ ровно n корней.

Решения

11.1. Пусть O — центр окружности радиуса 1, A и B — точки этой окружности, для которых $\angle AOB=\alpha$. Рассмотрим также точку C, в которой касательная к окружности в точке B пересекает луч OA. Пусть S_{AOB} — площадь треугольника AOB, S — площадь сектора, высекаемого радиусами AO и OB, S_{BOC} — площадь треугольника BOC. Тогда $S_{AOB}<S<S_{BOC}$. Но $S_{AOB}=\frac{1}{2}\sin\alpha$, $S=\frac{1}{2}\alpha$ и $S_{BOC}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

11.2. Прежде всего заметим, что $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$. Поэтому согласно задаче 8.24

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2} < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3.$$

Ещё раз воспользовавшись задачей 8.24, получим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3} < \operatorname{tg}\alpha_3$$

и т.д.

11.3. Ясно, что

$$\operatorname{tg}55^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 10^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}10^\circ} = \frac{1 + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \operatorname{tg}10^\circ}.$$

Далее, $\operatorname{tg}10^\circ = \operatorname{tg}\frac{\pi}{18} > \frac{\pi}{18} > \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$. Поэтому $\frac{1 + \operatorname{tg}10^\circ}{1 - \operatorname{tg}10^\circ} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}10^\circ} - 1 > \frac{7}{5} = 1,4$.

11.4. Из формулы для тангенса разности двух углов следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Поэтому $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \geqslant 0$ при $0 < \alpha, \beta < \pi/2$.

Ясно, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{1 - \cos(\alpha+\beta)}{1 + \cos(\alpha+\beta)} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

После приведения этих дробей к общему знаменателю, получим дробь, числитель которой равен $\cos(\alpha+\beta)\big(1 + \cos(\alpha-\beta)\big) \geqslant 0$ при $0 < \alpha, \beta \leqslant \pi/4$. Знаменатель дроби при таких α, β положителен.

11.5. Предположим, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_1\cos x$$

принимает только положительные значения при всех x. Заменив x на $x + \pi$, получим, что выражение

$$\cos 32x - a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x - \ldots + a_2\cos 2x - a_1\cos x$$

принимает положительные значения при всех x. Сложив эти выражения, получим, что сумма

$$\cos 32x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_4\cos 4x + a_2\cos 2x$$

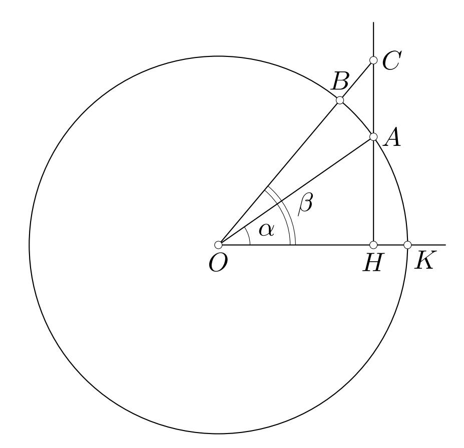


Рис. 11.1.

принимает положительные значения при всех x. Затем повторим те же самые рассуждения, последовательно заменяя x на $x+\frac{\pi}{2}$, $x+\frac{\pi}{4}$, $x+\frac{\pi}{8}$, $x+\frac{\pi}{16}$. В результате получим, что $\cos 32x$ принимает положительные значения при всех x. Но при $x=\pi/32$ выражение $\cos 32x$ принимает значение -1. Получено противоречие.

11.6. Согласно задаче 11.29 $\cos\varphi_k+\cos 2\varphi_k+\ldots+\cos n\varphi_k=-1$ для $\varphi_k=\frac{2k\pi}{n+1}$, где $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Поэтому, сложив n неравенств

$$a_1\cos\varphi_k+a_2\cos 2\varphi_k+\ldots+a_n\cos n\varphi_k\geqslant -1,$$

получим $-a_1-a_2-\ldots-a_n\geqslant -n$.

11.7. Возьмём на окружности радиуса 1 с центром O точки K, A и B так, что $\angle AOK=\alpha$ и $\angle BOK=\beta$ (рис. 11.1). Опустим из точки A перпендикуляр AH на прямую OK. Пусть C — точка пересечения этого перпендикуляра и прямой OB. Сравнение площадей сектора OAB и треугольника OAC показывает, что $(\beta-\alpha)<OH\cdot(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)$. Сравнение площадей сектора OAK и треугольника OAH показывает, что $\alpha>OH\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Из двух полученных неравенств следует, что

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha},\ \text{т.е.}\ \frac{\beta}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

11.8. Ответ: да, всегда. По условию $\cos B\cos C>0$. Кроме того, $\sin B\sin C+\cos B\cos C=\cos(B-C)\leqslant 1$ и $\cos A\leqslant 1$. Поэтому $\sin B\sin C\leqslant 1-\cos B\cos C\leqslant 1-\cos A\cos B\cos C$ и

$$0<\frac{\sin B\sin C}{1-\cos A\cos B\cos C}\leqslant 1.$$

11.9. Покажем, что $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3}\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}$, т.е. $\sqrt{3} = \dfrac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ}$. Действительно, $\dfrac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

11.10. Применяя формулу $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{15}} = \frac{4}{7},$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = \frac{\frac{4}{7} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{4}{49}} = \frac{7}{9},$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{72}} = 1.$$

Каждый из рассматриваемых арктангенсов меньше $\pi/4$, поэтому их сумма меньше π. Если угол заключён между 0 и π и его тангенс равен 1, то этот угол равен $\pi/4$.

11.11. Пусть $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{5}$. Дважды воспользовавшись равенством $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}$, получим сначала $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{5}{12}$, а затем $\operatorname{tg} 4\varphi = \dfrac{120}{119}$. Поэтому $\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{120}{119}$, а значит,

$$\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}\right) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} = \frac{28561}{28561} = 1.$$

11.12. О т в е т: $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Пусть $\arcsin\cos\arcsin x = \alpha$ и $\arccos\sin\arccos x = \beta$. Тогда $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$. Действительно, $0 \leqslant \cos\arcsin x \leqslant 1$, поскольку $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, и $0 \leqslant \sin\arccos x \leqslant 1$, поскольку $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Далее, $\sin\alpha = \cos\arcsin x$, поэтому $\arcsin x = \pm\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $\sin\left[\pm\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm\cos\alpha$; $\cos\beta = \sin\arccos x$, поэтому $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} \mp \beta$ и $x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm\sin\beta$. Из того, что $\cos\alpha = \sin\beta (= \pm x)$, следует, что $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

11.13. О т в е т: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Положим $t = \sin x$. Учитывая, что $\cos^2 x = 1 - t^2$, получаем уравнение $4t^3 - 7t + 3 = 0$. Это уравнение имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$ и $t_3 = -\dfrac{3}{2}$. Последний корень нам не подходит.

11.14. Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ и $x = k\pi$.

Положим $t = \operatorname{tg} x$. Учитывая, что $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, получаем уравнение

$$\frac{1+t}{1-t} = 1 + \frac{2t}{1+t^2},$$

т.е. $2(1+t)t^2 = 0$ (по условию $t \neq 1$). Это уравнение имеет корни $t_1 = -1$ и $t_2 = 0$.

11.15. Ответ: $x = \pm 1$, $y = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Если мы рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x, то его дискриминант будет равен $4\big(\sin^2(xy) - 1\big)$. Дискриминант должен быть неотрицательным, поэтому $\sin^2(xy) \geqslant 1$, т.е. $\sin(xy) = \pm 1$. Решения уравнения $x^2 \pm 2x + 1 = 0$ имеют вид $x = \mp 1$. Далее, если $\sin(\mp y) = \pm 1$, то $\sin y = -1$.

11.16. Положим $x = \sin\varphi$ и $y = \cos\varphi$. Рассматриваемое уравнение эквивалентно системе уравнений

$$3xy + 4x + 3y^2 - y - 4 = 0, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

При условии $x^2 + y^2 = 1$ первое уравнение эквивалентно уравнению

$$3xy + 4x + 3y^2 - y - 4 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Подберём λ так, чтобы левую часть можно было представить в виде произведения двух линейных множителей. Согласно задаче 5.25 для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda(\lambda+3)(-4-\lambda) + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 4(\lambda+3) + \frac{1}{4}\lambda + \frac{9}{4}(-4-\lambda).$$

Несложно проверить, что это уравнение имеет корень $\lambda = -3$.

Чтобы получить разложение выражения $3xy - 3x^2 + 4x - y - 1$, прежде всего заметим, что $3xy - 3x^2 = 3x(y-x)$. Далее,

$$(3x+a)(y-x+b) = 3xy - 3x^2 + (3b-a)x + ay + ab.$$

Поэтому нужно положить $a = -1$ и $b = 1$. В итоге получаем, что исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$(3\sin\varphi - 1)(\cos\varphi - \sin\varphi + 1) = 0.$$

11.17. Ответ: 63. Прежде всего отметим, что число положительных корней равно числу отрицательных корней, а ещё есть корень 0. Поэтому достаточно убедиться, что число положительных корней равно 31. Если $\sin x = \dfrac{x}{100}$, то $|x| = 100|\sin x| \leqslant 100$. Рассмотрим графики функций $y = x/100$ и $y = \sin x$. Участок оси Ox от 0 до 100 содержит 15 отрезков длиной 2π и один отрезок длиной меньше 2π. Рассматривая указанные графики, легко убедиться, что на первом отрезке длиной 2π есть один корень данного уравнения, а на

каждом из остальных 14 отрезков длиной 2π есть два корня. Вычисления показывают, что длина последнего отрезка больше π, поэтому на нём тоже есть два корня. Всего получаем 31 положительный корень.

11.18. Сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, переходит в себя при повороте на угол $2\pi/n$. А единственный вектор, который переходит в себя при повороте на угол $2\pi/n$, — это нулевой вектор.

11.19. Возьмём правильный n-угольник, вписанный в окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Повернём его так, чтобы одна его вершина попала в точку $(1, 0)$. Рассмотрев проекции суммы векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, на оси x и y, получим равенства а) и б); нужно только учесть, что $\sin 0 = 0$ и $\cos 0 = 1$. Если же этот n-угольник повернуть на угол α, то получим равенство в).

11.20. Согласно задаче 11.19 б) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=1$. При этом $\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ$ и $\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{6\pi}{5}=-\cos 36^\circ$.

б) Возьмём правильный 7-угольник с центром в начале координат, одна из вершин которого расположена в точке $(-1, 0)$. Рассмотрев проекцию на ось x суммы векторов, идущих из начала координат в вершины 7-угольника, получим требуемое.

11.21. При $n = 2m+1$ сумма из задачи 11.19 б) состоит из чётного числа слагаемых. Эти слагаемые разбиваются на пары $\cos\frac{2k\pi}{n}=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}$.

11.22. Нужно доказать, что

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Заменим в левой части $\sin(\alpha+\beta)$ на $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$. Далее,

$$\begin{aligned}4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} &= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\\ &=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta+2\sin^2\frac{\beta}{2}\sin\alpha=\\ &=(1-\cos\alpha)\sin\beta+(1-\cos\beta)\sin\alpha.\end{aligned}$$

11.23. Прежде всего заметим, что $\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$. Поэтому $\cos\alpha\cos 2\alpha = =\frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}$ и т.д.

11.24. а) Применим формулу из задачи 11.23 для $n = 2$ и $\alpha = 2\pi/7$. В результате получим, что требуемое произведение равно $\frac{\sin(16\pi/7)}{8\sin(2\pi/7)}$. Но $\sin(16\pi/7) = \sin(2\pi/7)$.

б) Решается аналогично а). Нужно лишь заметить, что $\sin(16\pi/9) = -\sin(2\pi/9)$.

11.25. а) Ясно, что $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

б) Согласно задаче а)

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha,\\ 2\operatorname{tg}2\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha - 4\operatorname{ctg}4\alpha,\\ \ldots\\ 2^n\operatorname{tg}2^n\alpha = 2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha.\end{gathered}$$

Сложив эти равенства, получим требуемое.

11.26. Ясно, что $\operatorname{tg}(k+1)\alpha - \operatorname{tg}k\alpha = \dfrac{\sin(k+1)\alpha}{\cos(k+1)\alpha} - \dfrac{\sin k\alpha}{\cos k\alpha} = \dfrac{\sin((k+1)\alpha - k\alpha)}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}$. Поэтому

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos2\alpha\cos3\alpha} + \ldots + \frac{\sin\alpha}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha} = \operatorname{tg}n\alpha - \operatorname{tg}\alpha.$$

11.27. Докажем сначала, что

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{2n\pi}{2n+1} = \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}. \qquad (1)$$

Разберём отдельно случай чётного и нечётного n. Если $n = 2k$, то нужно воспользоваться тем, что $\sin\dfrac{(2k+2)\pi}{2n+1} = \sin\dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $\sin\dfrac{(2k+4)\pi}{2n+1} = \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n+1}$, …, $\sin\dfrac{4k\pi}{2n+1} = \sin\dfrac{\pi}{2n+1}$. После сокращения этих равных множителей остаётся произведение одинаковых множителей. Если $n = 2k+1$, то нужно воспользоваться тем, что $\sin\dfrac{(2k+2)\pi}{2n+1} = \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1}$, …, $\sin\dfrac{(4k+2)\pi}{2n+1} = \sin\dfrac{\pi}{2n+1}$.

Заменим в левой части равенства (1) каждый множитель $\sin 2\alpha$ на $2\cos\alpha\sin\alpha$. После сокращения на $\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\dfrac{n\pi}{2n+1} \neq 0$ получим требуемое.

11.28. а) Пусть S — искомая сумма синусов. Воспользовавшись тожде-

ством $2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$, получим

$$2S\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=$$
$$=\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)+\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)=$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}.$$

Затем воспользуемся тождеством $\cos x-\cos y=2\sin\dfrac{y-x}{2}\sin\dfrac{y+x}{2}$. В результате получим $2S\sin\dfrac{\alpha}{2}=2\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}$.

б) Пусть S — искомая сумма косинусов. Воспользовавшись тождеством $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$, получим

$$2S\sin\frac{\alpha}{2}=2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\cos 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=$$
$$=\left(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right)=$$
$$=\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}.$$

11.29. Сложим тождества

$$\sin\left(\alpha+\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\alpha+\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)=2\sin\frac{1}{2}x\cos(\alpha+kx)$$

для $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. В результате получим требуемое.

11.30. а) Ясно, что $U_0(x)=1$, $U_1(x)=2x$ и $T_1(x)=x$. Кроме того, формулы

$$\sin(n+1)\varphi=\sin n\varphi\cos\varphi+\cos n\varphi\sin\varphi,$$
$$\cos(n+1)\varphi=\cos n\varphi\cos\varphi-\sin n\varphi\sin\varphi$$

показывают, что $U_n(x)=xU_{n-1}(x)+T_n(x)$ и $T_{n+1}(x)=$ $=xT_n(x)-U_{n-1}(x)(1-x^2)$.

б) Используя полученные рекуррентные соотношения, легко проверить, что $T_{2k+1}(x)=xa_k(x^2)$, $T_{2k}(x)=b_k(x^2)$, $U_{2k+1}(x)=xc_k(x^2)$, $U_{2k}(x)=d_k(x^2)$, где a_k, b_k, c_k, d_k — многочлены степени k. Поэтому $U_{2k}(\cos x)=d_k(\cos^2 x)=$ $=d_k(1-\sin^2 x)=P_k(\sin^2 x)$.

11.31. Согласно задаче 11.30 б) $\dfrac{\sin(2k+1)\varphi}{\sin\varphi}=P_k(\sin^2\varphi)$, где P_k — многочлен степени k. Далее, если $\varphi=\dfrac{l\pi}{2k+1}$, то $\sin(2k+1)\varphi=0$. поэтому

$$P_k(x)=\lambda\left(x-\sin^2\frac{\pi}{2k+1}\right)\left(x-\sin^2\frac{2\pi}{2k+1}\right)\ldots\left(x-\sin^2\frac{k\pi}{2k+1}\right),$$

где λ — некоторое число. Чтобы вычислить λ, положим $x = 0$. Ясно, что $P(0) = \lim_{\varphi\to 0} \dfrac{\sin(2k+1)\varphi}{\sin\varphi} = 2k+1$. Кроме того, согласно задаче 23.7 в)

$$\sin^2\frac{\pi}{2k+1}\sin^2\frac{2\pi}{2k+1}\ldots\sin^2\frac{k\pi}{2k+1} = \frac{2k+1}{4^k}.$$

Значит, $\lambda = (-4)^k$.

11.32. Первое уравнение можно переписать в виде $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ (ясно, что $x \neq \pm 1$). Пусть $x = \operatorname{tg}\varphi$. Тогда $y = \operatorname{tg}2\varphi$. Аналогично $z = \operatorname{tg}4\varphi$ и $x = \operatorname{tg}8\varphi$. Таким образом, $\operatorname{tg}8\varphi = \operatorname{tg}\varphi$. Поэтому

$$\operatorname{tg}7\varphi = \frac{\operatorname{tg}8\varphi - \operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}8\varphi\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = 0,$$

т.е. $7\varphi = k\pi$, где k — целое число. Наоборот, если $7\varphi = k\pi$, то $\operatorname{tg}8\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ и мы получаем решение данной системы уравнений. Всего получаем 7 различных решений, соответствующих углам $\varphi = 0,\ \dfrac{\pi}{7},\ \ldots,\ \dfrac{6\pi}{7}$.

11.33. Равенства $\dfrac{x}{3(1+x^2)} = \dfrac{y}{4(1+y^2)} = \dfrac{z}{5(1+z^2)}$ показывают, что числа x, y, z имеют одинаковые знаки, причём если (x,y,z) — решение системы, то $(-x,-y,-z)$ — тоже решение. Поэтому достаточно найти положительные решения.

Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{2}{\sin 2\varphi}$. Выберем углы α, β, γ, заключённые между 0 и π, так, что $\operatorname{tg}(\alpha/2) = x$, $\operatorname{tg}(\beta/2) = y$, $\operatorname{tg}(\gamma/2) = z$. Тогда

$$\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\sin\beta}{4} = \frac{\sin\gamma}{5}$$

и $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x+y}{1-xy}$, т.е. $\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Если $0 < \alpha,\beta,\gamma < \pi$, то равенство $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ выполняется лишь в том случае, когда $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, т.е. $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Таким образом, α, β и γ — углы треугольника, стороны которого относятся как $3:4:5$. Значит, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = 1$ (можно воспользоваться, например, формулой $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sin\alpha} - \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ и $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

11.34. а) Положим $x_i = \operatorname{tg}\varphi_i$, где $0 < \varphi_i < \pi/2$. Тогда $\dfrac{x_i - x_j}{1+x_ix_j} = \operatorname{tg}(\varphi_i - \varphi_j)$. Будем считать, что $x_1 < \ldots < x_n$. Тогда числа $\varphi_2 - \varphi_1,\ \varphi_3 - \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n - \varphi_{n-1}$, положительны и их сумма меньше $\pi/2$. Значит, среди них есть

положительное число, меньшее $\frac{\pi}{2(n-1)}$. Соответствующая ему пара чисел x_i и x_j обладает требуемым свойством.

б) Положим $x_i = \operatorname{tg}\varphi_i$, где $-\pi/2 < \varphi_i < \pi/2$. Тогда $\frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} = \operatorname{tg}(\varphi_i - \varphi_j)$. Будем считать, что $x_1 < \ldots < x_n$. Тогда числа $\varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_2, \ldots, \varphi_n - \varphi_{n-1}$, $\pi + \varphi_1 - \varphi_n$ положительны и их сумма равна π. Значит, среди них есть положительное число, не превосходящее π/n. Соответствующая ему пара чисел x_i и x_j обладает требуемым свойством.

11.35. Выберем на оси Ox точку $A = (x, 0)$, а на оси Oy выберем точки $B_k = (0, k)$, $k = 0, 1, \ldots$ Рассмотрим треугольник $B_{k-1}AB_k$. Пусть $\varphi = \angle B_{k-1}AB_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Вычислив площадь треугольника $B_{k-1}AB_k$ двумя способами, получим $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}B_{k-1}A \cdot AB_k \sin\varphi_k$, т.е. $x = \sqrt{(k-1)^2 + x^2}\sqrt{k^2 + x^2}(\sin\varphi_k)$. Поэтому

$$\sin\varphi_k = \frac{x}{\sqrt{(k-1)^2 + x^2}\sqrt{k^2 + x^2}} > \frac{x}{k^2 + x^2}.$$

Учитывая, что $\varphi_k \leqslant \sin\varphi_k$, получаем $\frac{x}{k^2 + x^2} < \varphi_k$. Остаётся заметить, что $\varphi_1 + \ldots + \varphi_n < \pi/2$.

11.36. Согласно определению многочлена Чебышёва $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$, причём $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$. Поэтому $f(\varphi) = a_0 + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \ldots + a_nT_n(x)$, где $x = \cos\varphi$.

Наоборот, пусть задан многочлен $P(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$. Равенства $\cos\varphi = \cos\varphi$, $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \ldots$ позволяют получить выражения $\cos\varphi = \cos\varphi$, $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1)$, $\cos^3\varphi = \frac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi), \ldots$ Если при этом в выражении для $\cos^m\varphi$ встречается выражение $\cos^k\varphi$, где $k < m$, то мы записываем для $\cos^k\varphi$ то выражение, которое уже было получено ранее. Так мы получим выражения

$$\cos^m\varphi = \frac{1}{2^{m-1}}\cos m\varphi + c_1\cos(m-1)\varphi + \ldots + c_{m-1}\cos\varphi + c_m.$$

Заменив в многочлене $P(x)$ каждый моном x^m на

$$\frac{1}{2^{m-1}}\cos m\varphi + c_1\cos(m-1)\varphi + \ldots + c_{m-1}\cos\varphi + c_m,$$

получим соответствующий тригонометрический многочлен.

11.37. а) Тригонометрический многочлен n-й степени представляет собой сумму слагаемых вида $\cos k\varphi$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\frac{1}{2n}\sum_{m=0}^{2n-1}(-1)^m\cos\frac{km\pi}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant n-1; \\ 2n & \text{при } k = n. \end{cases}$$

При $k = 0$ и $k = n$ это очевидно. Покажем, что если $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то

$$\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cos\frac{2km\pi}{n} = 0, \quad \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cos\frac{k(2m+1)\pi}{n} = 0.$$

Действительно, согласно задаче 11.29

$$\frac{1}{2n}\sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m \cos\left(\alpha + \frac{km\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{(2n-1)k\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

б) Согласно задаче а) среднее арифметическое чисел $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{n}\right)$, ..., $f\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)$ равно a_n, поэтому среднее арифметическое их модулей не меньше $|a_n|$. Но если среднее арифметическое чисел не меньше $|a_n|$, то одно из них не меньше $|a_n|$.

11.38. Согласно задаче 11.36 многочлену $P(x)$ соответствует тригонометрический многочлен $f(\varphi)$ со старшим коэффициентом $1/2^{n-1}$, для которого $f(\varphi) = P(\cos\varphi)$. Согласно задаче 11.37 $|f(\varphi_0)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ для некоторого φ_0. Положим $x = \cos\varphi_0$. Тогда $|P(x_0)| = |f(\varphi_0)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

11.39. Рассмотрим функцию $g(\varphi) = 2\sin\frac{\varphi}{2} f(x)$. Воспользовавшись тождеством

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cos k\varphi = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\varphi,$$

получим $g(\varphi) = a_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - h(\varphi)$, где

$$h(\varphi) = (a_n - a_{n-1})\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + \ldots + (a_1 - a_0)\sin\frac{\varphi}{2} + a_0\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right).$$

При этом $|h(\varphi)| \leqslant (a_n - a_{n-1}) + \ldots + (a_1 - a_0) + a_0 = a_n$. Более того, числа $\sin\frac{\varphi}{2}$ и $\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$ не могут быть одновременно равны $+1$, поэтому $|h(\varphi)| < a_n$. Таким образом, если $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = 1$, то $g(\varphi) > 0$, а если $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = -1$, то $g(\varphi) < 0$.

Ясно, что $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = \pm 1$ при $\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi = \frac{\pi}{2} + l\pi$, т.е. при $\varphi = \frac{1+2l}{1+2n}\pi$. Между каждой парой соседних точек $\frac{1+2l}{1+2n}\pi$, где $l = 0, 1, \ldots, n$, лежит ровно один корень уравнения $g(\varphi) = 0$. Всего получаем n корней, причём $\varphi = 0$ не корень. Значит, для всех этих точек функция $\sin\frac{\varphi}{2}$ не обращается в нуль, т.е. они являются также и корнями тригонометрического многочлена $f(\varphi)$.

Глава 12.

Уравнения в целых числах

12.1. Пифагоровы тройки

Натуральные числа a, b, c называют *пифагоровой тройкой*, если $a^2 + b^2 = c^2$. Пифагорову тройку называют *примитивной*, если у чисел a, b, c нет общего делителя.

12.1. Докажите, что если a, b, c — пифагорова тройка, то одно из этих чисел делится на 3, другое (или то же самое) делится на 4, третье — на 5.

12.2. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка. Докажите, что одно из чисел a и b чётно, а другое нечётно.

12.3. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка, причём число a чётно. Докажите, что существуют взаимно простые числа m и n, для которых $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$.

12.4. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка. Докажите, что ab делится на 12.

12.5. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка. Докажите, что число $ab/2$ (площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b) не может быть полным квадратом.

12.2. Нахождение всех решений

12.6. Решите в целых числах уравнение $2xy + 3x + y = 0$.

12.7. Решите в целых числах уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3$$

12.8. Решите в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

12.9. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7 = y^2$.

12.10. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что число $2/p$ можно единственным способом представить в виде $1/x + 1/y$, где x и y — различные натуральные числа.

12.11. Пусть n — натуральное число. Докажите, что количество решений уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ в натуральных числах равно количеству делителей числа n^2.

12.12. а) Найдите все натуральные числа x, y, z, для которых

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

б) Найдите все натуральные числа x, y, $z > 1$, для которых

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1.$$

12.13. а) Найдите все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ в натуральных числах.

б) Найдите все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$ в натуральных числах.

12.14. Решите в целых числах уравнение

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

12.15. Решите в натуральных числах уравнение $2^n + 1 = 3^m$.

12.16. Найдите все решения уравнения $x^y = y^x$ а) в натуральных числах; б) в рациональных числах.

12.3. Нахождение некоторых решений

12.17. а) Докажите, что для любого натурального n уравнение $a^n + b^n = c^{n+1}$ имеет бесконечно много различных решений в натуральных числах.

б) Докажите, что если m и n — взаимно простые натуральные числа, то уравнение $a^n + b^n = c^m$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

12.4. Доказательство конечности числа решений

12.18. Докажите, что для любого натурального числа n уравнение $x^3 + y^3 = n$ имеет конечное число целочисленных решений.

12.5. Уравнение Пелля

Уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d — натуральное число, *свободное от квадратов* (т.е. число, не делящееся на квадрат натурального числа, отличного от 1), называют *уравнением Пелля.*

12.19. Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

12.20. Пусть d — натуральное число, свободное от квадратов. Докажите, что существует константа C, для которой неравенство $|x^2 - dy^2| < C$ имеет бесконечно много целочисленных решений.

Решение уравнения Пелля в натуральных числах с минимальным y_1 будем называть *фундаментальным решением.*

12.21. Докажите, что уравнение Пелля для любого натурального d (свободного от квадратов) имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Более того, если (x_1, y_1) — фундаментальное решение, то любое решение (x_n, y_n) имеет вид

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

12.22. Докажите, что если $d \equiv 3 \pmod 4$, то уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений в натуральных числах.

12.23. Докажите, что если d — простое число, причём $d \equiv 1 \pmod 4$, то уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение в натуральных числах.

12.24. Докажите, что если уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$ имеет решение с нечётными x и y, то уравнение $X^2 - dY^2 = \pm 1$ имеет решение в натуральных числах.

См. также задачи 31.37 и 35.11–35.13.

12.6. Уравнение Маркова

Уравнением Маркова называют уравнение

$$m^2 + n^2 + p^2 = 3mnp, \qquad (12.1)$$

где числа m, n и p натуральные.

12.25. Докажите, что уравнение Маркова имеет бесконечно много решений.

12.26. Докажите, что все решения уравнения $m^2 + n^2 + p^2 = mnp$ в натуральных числах имеют вид $3m_1$, $3n_1$, $3p_1$, где m_1, n_1, p_1 — решение уравнения Маркова.

12.27. Докажите, что если $k \neq 1$ или 3, то уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = k\,xyz$ не имеет решений в натуральных числах.

12.28. Докажите, что если m, n, p — решение уравнения Маркова, то числа m, n и p взаимно просты.

Решения

12.1. Согласно задаче 4.42 остаток от деления квадрата целого числа на 3 и на 4 равен 0 или 1, а остаток от деления на 5 равен 0, 1 или 4. Используя только остатки 1 и 4, нельзя добиться выполнения равенства $a^2 + b^2 = c^2$. В случае делимости на 3 и на 5 это завершает доказательство. В случае делимости на 4 мы получаем, что либо все три числа a, b, c чётны, любо одно из чисел a и b чётно, а другое нечётно. Первый случай можно не разбирать, поскольку доказательство достаточно провести для примитивных прифагоровых троек. Таким образом, остаётся доказать, что если для целых чисел a_1, b_1, c_1 выполняется равенство

$$(2a_1)^2 + (2b_1 + 1)^2 = (2c_1 + 1)^2, \qquad (1)$$

то число a_1 чётно. Равенство (1) можно переписать в виде

$$a_1^2 = c_1(c_1+1) - b_1(b_1+1).$$

Числа $c_1(c_1+1)$ и $b_1(b_1+1)$ чётны, поэтому число a_1 тоже чётно.

12.2. Числа a и b не могут быть оба чётными, потому что иначе число c тоже было бы чётным. Числа a и b не могут быть оба нечётными, потому что иначе число a^2+b^2 делилось бы на 2, но не делилось бы на 4.

12.3. Числа $\frac{c-b}{2}$ и $\frac{c+b}{2}$ взаимно простые, поэтому из равенства $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c-b}{2}\cdot\frac{c+b}{2}$ следует, что $\frac{c-b}{2} = n^2$ и $\frac{c+b}{2} = m^2$, где m и n — взаимно простые числа. При этом $c = m^2+n^2$ и $b = m^2-n^2$.

12.4. Нужно доказать, что для любых взаимно простых натуральных чисел m и n число $mn(m+n)(m-n)$ делится на 6. Если m и n нечётны, то $m+n$ чётно. Если m и n не делятся на 3, то либо числа m и n дают одинаковые остатки при делении на 3 (тогда $m-n$ делится на 3), либо одно из них при делении на 3 даёт остаток 1, а другое даёт остаток 2 (тогда $m+n$ делится на 3).

12.5. Предположим, что существуют взаимно простые натуральные числа m и n, для которых $mn(m+n)(m-n) = s^2$, где s — натуральное число. Будем считать, что s — наименьшее из всех чисел, для которых имеет место равенство такого вида. Числа m, n, $m+n$, $m-n$ попарно взаимно простые, поэтому $m = x^2$, $n = y^2$, $m+n = z^2$ и $m-n = t^2$, где x, y, z и t — натуральные числа. Числа m и n разной чётности, поэтому числа z и t нечётные. Положим $A = \frac{z+t}{2}$ и $B = \frac{z-t}{2}$. Тогда $A^2+B^2 = \frac{z^2+t^2}{2} = m = x^2$ и $AB = \frac{z^2-t^2}{8} = \frac{n}{4} = \frac{y^2}{4}$. Таким образом, для числа $y/2$ тоже имеет место равенство указанного вида. Поэтому $y^2 \geqslant 4s^2$, т.е. $y^2 \geqslant 4x^2y^2(x^2-y^2)(x^2+y^2)$. Получено противоречие.

12.6. Ответ: $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-3)$, $(-2,-2)$. Данное уравнение можно переписать следующим образом: $(2x+1)(2y+3) = 3$. Остаётся решить 4 системы уравнений $2x+1 = 1$, $2y+3 = 3$; $2x+1 = 3$, $2y+3 = 1$; $2x+1 = -1$, $2y+3 = -3$; $2x+1 = -3$, $2y+3 = -1$.

12.7. Рассматриваемое уравнение можно переписать в виде $(x-5)(y+3) = -18$. Его решения в целых числах соответствуют представлениям числа -18 в виде произведения двух целых чисел.

12.8. Ответ: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$. Рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2+6y+1$. Он отрицателен при $y \geqslant 3$ и при $y \leqslant -1$. Поэтому для y получаем три возможных значения: 0, 1, 2. Для каждого из этих значений получаем уравнение, которое легко решается.

12.9. Ответ: $x = 1, y = 3$. Проверим, что других решений нет. Ясно, что $2^2 + 7 = 11$ — не квадрат, поэтому можно считать, что $x \geqslant 3$. Тогда 2^x делится на 8, а значит, $y^2 \equiv 7 \pmod 8$. Но, как легко проверить, квадрат целого числа при делении на 8 может давать только остатки 0, 1 и 4.

12.10. Равенство $1/x + 1/y = 2/p$ можно переписать в виде $p(x + y) = 2xy$. Значит, одно из чисел x и y делится на p. Например, $x = px'$. Тогда $px' + y = 2y$, т.е. $(2x' - 1)y = px'$. Если $x' = 1$, то $y = p$ и $x = p$, а по условию числа y и p различны. Если же $x' > 1$, то $2x' - 1 > x'$, поэтому $y < p$. Кроме того, числа $2x' - 1$ и x' взаимно просты. Значит, $2x' - 1 = p$ и $y = x'$. В итоге получаем $y = x' = \dfrac{p+1}{2}$ и $x = p\dfrac{p+1}{2}$.

12.11. Данное уравнение можно записать в виде $n^2 = (x - n)(y - n)$. Каждому делителю d числа n^2 соответствует решение $x = n + d,\ \ y = n + \dfrac{n^2}{d}$.

12.12. а) Будем считать, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда $1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leqslant \dfrac{3}{z}$, поэтому $z \leqslant 3$. Ясно также, что $z \neq 1$.

Если $z = 3$, то $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3}$ и при этом $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{2}{y}$, значит, $y \leqslant 3$. Но $y \geqslant z = 3$, поэтому $y = 3$ и $x = 3$.

Если $z = 2$, то $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ и при этом $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{2}{y}$, значит, $2 \leqslant y \leqslant 4$. Ясно, что $y \neq 2$. При $y = 3$ получаем $x = 6$, а при $y = 4$ получаем $x = 4$.

б) Снова будем считать, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда $z < 3$, т.е. $z = 2$. Поэтому $\dfrac{2}{y} > \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{2}$, значит, $y < 4$. Если $y = 2$, то число x может быть произвольным. Если $y = 3$, то $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{6}$, т.е. $x = 3$, 4 или 5.

12.13. а) Пусть $x = 2^m x_1,\ \ y = 2^n y_1,\ \ z = 2^k z_1$, где числа $x_1,\ \ y_1,\ \ z_1$ нечётны. Можно считать, что $m \leqslant n \leqslant k$. Тогда обе части уравнения можно сократить на $(2^m)^2$. В результате получим

$$x_1^2 + 2^{(n-m)}y_1^2 + 2^{(k-m)}z_1^2 = 2^{n+k-m+1}x_1y_1z_1,$$

где $n + k - m + 1 \geqslant 1$.

Если $n = m = k$, то согласно задаче 4.42 при делении на 4 число в правой части этого равенства даёт остаток 3, а число в левой части даёт остаток 0 или 2. Если же $k > n$, то число в правой части даёт остаток 1 или 2, а число в левой части — остаток 0. Значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.

б) Число $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ чётно, поэтому среди чисел x, y, z, u чётное число нечётных чисел.

Если все числа x, y, z, u нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \equiv 0 \pmod 4$, но при этом $2xyzu$ не делится на 4.

Если ровно два из чисел x, y, z, u нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ не делится на 4, а $2xyzu$ делится на 4.

Поэтому все числа x, y, z, u чётны, т.е. $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $u = 2u_1$. Мы получаем уравнение $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1$. Теперь заметим, что $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$. Поэтому если все числа x_1, y_1, z_1, u_1 нечётны, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится на 8. А если ровно два из этих чисел нечётно, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится даже на 4. Значит, $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $u_1 = 2u_2$, и мы получаем уравнение $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2$. Снова повторив те же самые рассуждения, получим, что x, y, z, u делятся на 2^n при всех n, чего не может быть.

12.14. Ответ: $x = y = z = 0$.

Пусть $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$, где x, y, z — целые числа. Тогда число x чётно. После замены $x = 2x_1$ получаем уравнение $8x_1^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$. Сократим на 2: $4x_1^3 - y^3 - 2z^3 = 0$. Значит, число y чётно. После замены $y = 2y_1$ получаем уравнение $4x_1^3 - 8y_1^3 - 2z^3 = 0$. Снова сократим на 2: $2x_1^3 - 4y_1^3 - z^3 = 0$. Значит, число z чётно. После замены $z = 2z_1$ получаем уравнение $x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0$, которое имеет такой же вид, как и исходное уравнение. Поэтому снова можно доказать, что числа x_1, y_1, z_1 чётны и т.д. Но это возможно лишь в том случае, когда $x = y = z = 0$.

12.15. Ответ: $n = 1$, $m = 1$ или $n = 3$, $m = 2$.

Если $n = 1$, то $m = 1$. Рассмотрим теперь случай, когда $n > 1$. В этом случае $3^m \equiv 1 \pmod 4$. Отметим, что $3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k \equiv 3 \pmod 4$. Поэтому $m = 2k$, а значит, $(3^k - 1)(3^k + 1) = 2^n$. Таким образом, числа $3^k - 1$ и $3^k + 1$ — степени двойки, которые отличаются друг от друга на 2. Это возможно лишь в том случае, когда $k = 1$, т.е. $m = 2$ и $n = 3$.

12.16. Всегда есть очевидное решение $x = y$, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $x > y$ (случай $x < y$ рассматривается аналогично). Пусть $x = ky$, где $k > 1$ — рациональное число. Тогда $(ky)^y = (y^k)^y$, поэтому $ky = y^k$, а значит, $y = k^{\frac{1}{k-1}}$. Пусть $\dfrac{1}{k-1} = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда $y = \left(\dfrac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}$ и $x = \left(\dfrac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}$. Числа p и $p+q$ взаимно простые, поэтому число y может быть рациональным лишь в том случае, когда $p = a^q$ и $p + q = b^q$ для некоторых натуральных a и b. Предположим, что $q \geqslant 2$. Тогда $a^q < p + q \leqslant a^q + qa^{q-1} < (a+1)^q$. Поэтому $q = 1$. Для любого натурального p числа $x = \left(1 + \dfrac{1}{p}\right)^{p+1}$ и $y = \left(1 + \dfrac{1}{p}\right)^{p}$ рациональны и являются решениями уравнения $x^y = y^x$. Эти числа будут целыми лишь при $p = 1$. В этом случае $x = 4$ и $y = 2$.

12.17. а) Перепишем уравнение в виде $c = \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{a}{c}\right)^n$. Будем искать решения вида $a = a_1c$ и $b = b_1c$, где a_1 и b_1 — натуральные числа. Тогда $c = a_1^n + b_1^n$, $a = a_1(a_1^n + b_1^n)$ и $b = b_1(a_1^n + b_1^n)$. Легко проверить, что мы действительно получили решение.

б) Выберем натуральные числа p и q так, что $pm - qn = 1$ (это можно сделать с помощью алгоритма Евклида). Положим $c = (a_1^n + b_1^n)^p$, $a = a_1(a_1^n + b_1^n)^q$ и $b = b_1(a_1^n + b_1^n)^q$, где a_1 и b_1 — произвольные натуральные числа. Тогда $a^n + b^n = (a_1^n + b_1^n)(a_1^n + b_1^n)^{qn} = (a_1^n + b_1^n)^{pm} = c^m$.

12.18. Пусть $x + y = a$ и $x^2 - xy + y^2 = b$. Тогда $ab = n$. Число n можно лишь конечным числом способов разложить на множители a и b, поэтому получаем конечное число систем уравнений $x + y = a$, $x^2 - xy + y^2 = b$. Выразим y из первого уравнения и подставим во второе. В результате получим уравнение $x^2 - x(a - x) + (a - x)^2 = b$, которое имеет не более двух решений. Каждому целочисленному решению x этого уравнения соответствует одно целочисленное решение исходной системы, а именно $(x, a - x)$.

12.19. Нетрудно найти одно решение этого уравнения, например, $x_1 = 3$ и $y_1 = 2$. Равенство $x_1^2 - 2y_1^2 = 1$ можно записать в виде

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}) = 1.$$

Ясно, что тогда

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})^n(x_1 + y_1\sqrt{2})^n = 1.$$

Кроме того, согласно задаче 6.22 $(x_1 \pm y_1\sqrt{2})^n = x_n \pm y_n\sqrt{2}$. Поэтому

$$x_n^2 - 2y_n^2 = 1,$$

т. е. (x_n, y_n) — тоже решение, причём $x_{n+1} > x_n$, $y_{n+1} > y_n$.

12.20. Применим задачу 17.11 для $\alpha = \sqrt{d}$. В результате получим, что существует бесконечно много пар взаимно простых чисел x, y, для которых $|x - y\sqrt{d}| < 1/y$. В таком случае

$$|x + y\sqrt{d}| < |x - y\sqrt{d}| + 2\sqrt{d}|y| < \frac{1}{y} + 2\sqrt{d}\,y,$$

а значит,

$$|x^2 - dy^2| = |x + y\sqrt{d}| \cdot |x - y\sqrt{d}| < \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 2\sqrt{d}\,y\right) \leqslant 2\sqrt{d} + 1.$$

Таким образом, в качестве константы C можно взять число $2\sqrt{d} + 1$.

12.21. Согласно задаче 12.20 для некоторого целого k уравнение $x^2 - dy^2 = k$ имеет бесконечно много натуральных решений. Выберем два различных решения $x_1^2 - dy_1^2 = k$ и $x_2^2 - dy_2^2 = k$, для которых $y_1 \equiv y_2 \pmod{k}$. Тогда $x_1 \equiv \pm x_2 \pmod{k}$, поэтому решения можно выбрать так, что $x_1 \equiv x_2 \pmod{k}$. В таком случае

$$(x_1x_2 - dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = k^2$$

и $x_1x_2 - dy_1y_2 \equiv x_1^2 - dy_1^2 \equiv 0 \pmod{k}$, $x_1y_2 - x_2y_1 \equiv 0 \pmod{k}$. При этом $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$, поскольку иначе

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{k + dy_1^2}{k + dy_2^2} \quad \Longrightarrow \quad y_1^2 = y_2^2.$$

Положим $X = k^{-1}(x_1x_2 - dy_1y_2)$ и $Y = k^{-1}(x_1y_2 - x_2y_1) \neq 0$. Тогда $X^2 - dY^2 = 1$, т.е. пара X, Y — решение уравнения Пелля.

Пусть (x_1, y_1) — фундаментальное решение уравнения Пелля. Тогда $(x_1 + y_1\sqrt{d})^n(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = 1$, поэтому пара (x_n, y_n), где $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, тоже является решением уравнения Пелля. Ясно также, что $x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n}$. Поэтому остаётся проверить, что любое натуральное решение (x, y) представляется в виде $x + y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, где n — натуральное число. Предположим, что натуральное решение (x, y) не представляется в таком виде. Тогда можно выбрать натуральное число n так, что

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n < x + y\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}.$$

После умножения на $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n} = x_n - y_n\sqrt{d}$ получим

$$1 < (x + y\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) < x_1 + y_1\sqrt{d}.$$

Положим $(x + y\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = X + Y\sqrt{d}$. Чтобы прийти к противоречию, достаточно показать, что $X^2 - dY^2 = 1$ и $X > 0$, $Y > 0$. По условию $(x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = 1$ и $(x_n - y_n\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = 1$, поэтому $(X + Y\sqrt{d})(X - Y\sqrt{d}) = 1$, т.е. $X^2 - dY^2 = 1$. Кроме того, $X + Y\sqrt{d} > 1$, а значит, $0 < X - Y\sqrt{d} < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 2X &= (X + Y\sqrt{d}) + (X - Y\sqrt{d}) > 1 + 0 > 0, \\ 2Y\sqrt{d} &= (X + Y\sqrt{d}) - (X - Y\sqrt{d}) > 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

12.22. Ясно, что d имеет простой делитель $p = 4k + 3$. Предположим, что $x^2 - dy^2 = -1$. Тогда $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$, поэтому число -1 является квадратичным вычетом по модулю p. С другой стороны, если $p = 4k + 3$ — простое число, то согласно задаче 31.36 число -1 не является квадратичным вычетом по модулю p.

12.23. Пусть (x_1, y_1) — фундаментальное решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Из условия $d \equiv 1 \pmod{4}$ вытекает, что $x_1^2 - y_1^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Следовательно, $x_1 \equiv 1 \pmod{2}$ и $y_1 \equiv 0 \pmod{2}$. Перепишем равенство $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ в виде

$$\frac{x_1 + 1}{2} \cdot \frac{x_1 - 1}{2} = d\left(\frac{y_1}{2}\right)^2.$$

По условию число d простое, поэтому либо

$$\frac{x_1 + 1}{2} = da^2, \quad \frac{x_1 - 1}{2} = b^2,$$

либо

$$\frac{x_1+1}{2}=a^2, \quad \frac{x_1-1}{2}=db^2.$$

В первом случае получаем $b^2-da^2=-1$. Во втором случае получаем $a^2-db^2=$ $=1$, что противоречит минимальности решения (x_1, y_1).

12.24. Положим

$$X+Y\sqrt{d}=\left(\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\right)^3, \text{ т.е. } X=\frac{x(x^2+3dy^2)}{8},\ Y=\frac{y(3x^2+dy^2)}{8}.$$

Тогда $x^2+3dy^2\equiv 1+15\equiv 0 \pmod 8$ и $3x^2+dy^2\equiv 3+5\equiv 0 \pmod 8$, поэтому числа X и Y целые. Кроме того,

$$X+Y\sqrt{d}=\left(\frac{x+y\sqrt{d}}{2}\right)^3\left(\frac{x-y\sqrt{d}}{2}\right)^3=\pm 1.$$

12.25. Предположим сначала, что среди чисел m, n и p есть равные, например, $n=p$. Тогда $m^2+2n^2=3mn^2$, т. е. $3m=\left(\frac{m}{n}\right)^2+2$. Следовательно, $m=dn$, где d — целое число. При этом $d^2+2=3nd$, т. е. $d(3n-d)=2$. Поэтому $d=1$ или 2. В обоих случаях $n=1$. В результате получаем решения $(1,1,1)$ и $(2,1,1)$. Назовём их *особыми*.

Возьмём теперь неособое решение (m,n,p), для которого числа m,n,p попарно различны, и рассмотрим квадратный трёхчлен

$$f(x)=x^2-3xnp+n^2+p^2$$

Ясно, что $f(m)=0$, т. е. один корень квадратного трёхчлена f равен m. Второй его корень m' можно найти по теореме Виета: $m'=3np-m$. Ясно, что при этом (m',n,p) — решение уравнения (12.1). Покажем, что наибольшее из чисел n и p заключено между m и m'. Пусть для определённости $n>p$. Тогда

$$(n-m)(n-m')=f(n)=2n^2+p^2-3n^2p<0.$$

Это как раз и означает, что n заключено между m и m'.

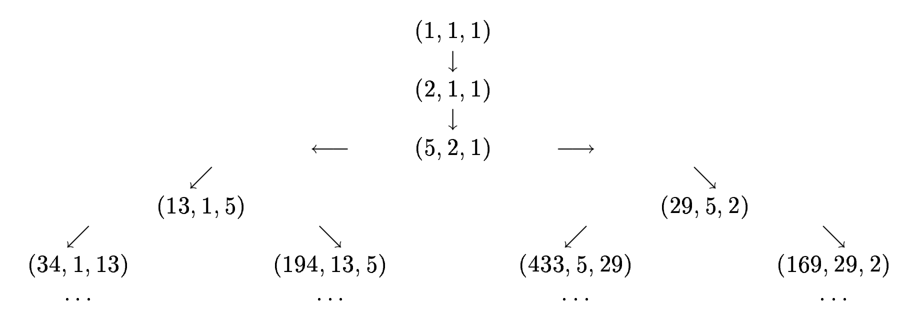
Аналогичным образом по решению (m,n,p) можно построить решения (m,n',p) и (m,n,p').

Предположим, что m — наибольшее из чисел m, n, p. Тогда

$$m>\max(n,p)>m', \quad n<m=\max(m,p)<n'.$$

Таким образом, при переходе от решения (m,n,p) к решению (m',n,p) наибольшее из трёх чисел уменьшается, а при переходе к решениям (m,n',p) и (m,n,p') увеличивается.

Если начинать с решения (1,1,1), то получим следующее дерево решений:



Это дерево содержит все решения, поскольку от произвольного решения после нескольких уменьшений максимума мы перейдём к особому решению. Под уменьшением максимума мы подразумеваем переход от решения (m, n, p), где $m > \max(n, p)$, к решению (m', n, p).

12.26. Достаточно доказать, что если $m^2 + n^2 + p^2 = mnp$, то числа m, n и p делятся на 3. Если целое число не делится на 3, то его квадрат при делении на 3 даёт остаток 1. Поэтому если $m^2 + n^2 + p^2$ не делится на 3, то среди чисел m, n и p есть как делящиеся на 3, так и не делящиеся на 3. Но тогда $m^2 + n^2 + p^2 = mnp$ делится на 3, чего не может быть. Значит, $m^2 + n^2 + p^2$ делится на 3, причём числа m, n и p одновременно либо все делятся на 3, либо все не делятся на 3. Второй вариант невозможен, потому что $mnp = m^2 + n^2 + p^2$ делится на 3.

12.27. Случай $k = 2$ — это задача 12.13 а). Поэтому будем предполагать, что $k > 3$. Предположим, что $x^2 + y^2 + z^2 = k\,xyz$, где x, y, z — натуральные числа. Прежде всего покажем, что эти числа попарно различны. Пусть $y = z$. Тогда $x^2 = kxy^2 - 2y^2 = (kx - 2)y^2$, поэтому $x = \lambda y$, где λ — натуральное число. При этом $\lambda^2 = k\lambda y - 2$, т.е. $2 = \lambda(ky - \lambda)$. Значит, $\lambda = 1$ или 2. В обоих случаях $ky = 3$, что противоречит неравенству $k > 3$.

Пусть для определённости $x > y > z$. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(t) = t^2 - kyz\,t + y^2 + z^2$. Один его корень равен x, а второй корень x' по теореме Виета равен $kyz - x$. Ясно, что $(y - x)(y - x') = f(y) = 2y^2 + z^2 - ky^2 z < 0$, т.е. $x > y > x'$. Таким образом, по решению x, y, z мы построили новое решение x', y, z, для которого $x', y, z < x$. Повторяя эту конструкцию x раз, приходим к противоречию. (Решающее отличие от уравнения Маркова состоит в том, что здесь нет решения с двумя одинаковыми числами, поэтому операцию уменьшения решения можно применять бесконечно много раз.)

12.28. Предположим, что $m = dm_1$, $n = dn_1$ и $p = dp_1$, где $d > 1$. Тогда $m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 3d\,m_1 n_1 p_1$. Но согласно задаче 12.27 уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = k\,xyz$ не имеет решений в натуральных числах при $k > 3$.

Глава 13.

Индукция

13.1. Вычисление сумм

13.1. Вычислите сумму

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}.$$

13.2. Вычислите сумму

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!.$$

13.3. Докажите, что $1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$.

13.4. Докажите, что

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

13.2. Неравенства

13.5. Докажите неравенство

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k!<(k+1)!.$$

13.6. Докажите, что если $0 < x_1, \ldots, x_n < 1$ и $n \geqslant 2$, то $(1-x_1)\ldots(1-x_n) > 1-(x_1+\ldots+x_n)$.

13.7. Докажите, что при целом $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$

$$2^n > (1-x)^n + (1+x)^n.$$

13.8. Докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

13.9. а) Докажите, что для любого $\alpha > 0$ и любого натурального $n > 1$ выполняется неравенство $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$.

б) Докажите, что если $0 < \alpha \leqslant 1/n$ и n — натуральное число, то выполняется неравенство $(1+\alpha)^n < 1+n\alpha+n^2\alpha^2$.

13.10. Докажите *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для n положительных чисел*: $(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} \leq (a_1+\ldots+a_n)/n$, причём равенство достигается, только если $a_1 = \ldots = a_n$.

13.11. Докажите, что $3^n > n^3$ для любого натурального $n \neq 3$.

13.12. Докажите неравенство

$$\frac{2-\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}^{n \text{ раз}}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ раз}}} > \frac{1}{4}.$$

13.3. Доказательство тождеств

13.13. Некоторые из чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равны $+1$, остальные равны -1. Докажите, что

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} =$$
$$= a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}}.$$

13.4. Разные задачи

13.14. На кольцевой автомобильной дороге стоит несколько одинаковых автомобилей. Известно, что если весь бензин, находящийся в автомобилях, слить в один из них, то этот автомобиль сможет проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы один из этих автомобилей сможет проехать по всей кольцевой дороге в заданном направлении, забирая по пути бензин у остальных автомобилей.

13.15. Докажите, что любую дробь m/n, где $0 < m/n < 1$, можно представить в виде

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots + \frac{1}{q_r},$$

где $0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_r$, причём число q_k делится на q_{k-1} при $k = 2$, $3, \ldots, r$.

См. также задачу 20.11.

Решения

13.1. Докажем индукцией по n, что рассматриваемая сумма равна $1 - \frac{1}{n!}$. При $n = 2$ получаем очевидное равенство $\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2!}$. Предположим, что требуемое равенство доказано для некоторого n. Тогда

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} =$$
$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

13.2. Докажем индукцией по n, что рассматриваемая сумма равна $(n+1)!-1$. При $n = 1$ получаем очевидное равенство $1\cdot 1! = 2!-1$. Предположим, что требуемое равенство доказано для некоторого n. Тогда

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! =$$
$$= (n+2)! - 1.$$

13.3. База индукции очевидна, поэтому нужно лишь проверить равенство

$$\frac{m^2(m+1)^2}{2} + (m+1)^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{2}.$$

После сокращения на $m+1$ и умножения на 4 получаем очевидное равенство $m^2 + 4(m+1) = (m+2)^2$.

13.4. Пусть $A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}$ и $B_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Тогда $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$ и $B_{n+1} = B_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$. Значит, $A_{n+1} - B_{n+1} = A_n - B_n + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+2} = A_n - B_n$. Равенство $A_1 = B_1$ очевидно, поэтому $A_n = B_n$ для всех n.

13.5. Применим индукцию по k. При $k = 1$ требуемое неравенство очевидно: $1 \cdot 1! < 2!$. Предположим, что для некоторого k требуемое неравенство выполняется. Тогда $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! < (k+1)! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)!$.

13.6. Применим индукцию по n. Сначала заметим, что $(1 - x_1)(1 - x_2) = 1 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 > 1 - (x_1 + x_2)$. Предположим, что $(1 - x_1)\ldots(1 - x_{n-1}) > 1 - (x_1 + \ldots + x_{n-1})$. Тогда $(1-x_1)\ldots(1-x_n) > 1 - x_n - (x_1 + \ldots + x_{n-1}) + x_n(x_1 + \ldots + x_{n-1}) > 1 - (x_1 + \ldots + x_n)$.

13.7. Применим индукцию по n. При $n = 2$ получаем $(1-x)^2 + (1+x)^2 = 2(1+x^2) < 4$. Предположим теперь, что $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$. Тогда

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} < ((1-x)^n + (1+x)^n)((1-x) + (1+x)) < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

13.8. Требуемое неравенство эквивалентно неравенству

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Если $0 < x < 1$, то $0 < 1 - x^2 < 1$, поэтому $1 + x < \frac{1}{1-x}$. Значит, $\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) < \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{-1}$. Воспользовавшись неравенством из задачи 13.6, получаем

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{8}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{2^n} > 2.$$

13.9. а) Покажем, что если $\alpha > 0$ и $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, то $(1+\alpha)^{n+1} > 1 + (n+1)\alpha$. Действительно, $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n > (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 > 1 + (n+1)\alpha$.

б) Для $n = 1$ требуемое неравенство выполняется. Предположим, что если $0 < \alpha \leqslant 1/n$, то выполняется неравенство $(1+\alpha)^n < 1 + n\alpha + n^2\alpha^2$. Пусть число β таково, что $0 < \beta \leqslant 1/(n+1)$. Тогда $\beta \leqslant 1/n$, поэтому $(1+\beta)^{n+1} < (1 + n\beta + n^2\beta^2)(1+\beta) = 1 + (n+1)\beta + (n^2 + n + n^2\beta)\beta^2$. Остаётся проверить, что $n^2 + n + n^2\beta \leqslant (n+1)^2$, т.е. $n^2\beta \leqslant n + 1$. Это неравенство следует из того, что $\beta \leqslant 1/(n+1)$ и $n^2 < (n+1)^2$.

13.10. Докажем сначала требуемое неравенство для чисел вида $n = 2^m$ индукцией по m. Для $m = 1$ оно следует из того, что $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$; равенство достигается, только если $a = b$. Предположим,

что требуемое неравенство доказано для m, и докажем его для $m+1$. Ясно, что $a_k a_{k+2^m} \le ((a_k + a_{k+2^m})/2)^2$. Поэтому

$$(a_1 a_2 \dots a_{2^{m+1}})^{1/2^{m+1}} \le (b_1 b_2 \dots b_{2^m})^{1/2^m},$$

где $b_k = (a_k + a_{k+2^m})/2$, а по предположению индукции

$$(b_1 \dots b_{2^m})^{1/2^m} \le \frac{1}{2^m}(b_1 + \dots + b_{2^m}) = \frac{1}{2^{m+1}}(a_1 + \dots + a_{2^{m+1}}).$$

Пусть теперь n любое. Тогда $n < 2^m$ для некоторого m. Положим $a_{n+1} = \dots = a_{2^m} = (a_1 + \dots + a_n)/n = A$. Ясно, что $(a_1 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + \dots + a_{2^m}) = nA + (2^m - n)A = 2^m A$ и $a_1 \dots a_{2^m} = a_1 \dots a_n \cdot A^{2^m - n}$. Поэтому $a_1 \dots a_n \cdot A^{2^m-n} \le (2^m A/2^m)^{2^m} = A^{2^m}$, т. е. $a_1 \dots a_n \le A^n$; равенство достигается, только если $a_1 = \dots = a_n$.

13.11. Для $n = 2$, 4 и 5 требуемое неравенство несложно проверить. Покажем, что при $n \geqslant 5$ из неравенства $3^n > n^3$ следует неравенство $3^{n+1} > (n+1)^3$. По предположению индукции $3^{n+1} > 3n^3$, поэтому нужно лишь проверить неравенство $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. При $n \geqslant 5$ выполняются неравенства $1 < 3n < 3n^2 < 2n^3/3$, поэтому $3n^2 + 3n + 1 < 3(2n^3/3) = 2n^3$.

13.12. Пусть $a = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1}$. Тогда $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n} = \sqrt{2+a}$.

Таким образом, требуется доказать, что

$$\frac{2 - \sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}.$$

Индукцией по n легко доказать, что $a < 2$. Поэтому следующие неравенства эквивалентны требуемому:

$$\begin{array}{lcl} 8 - 4\sqrt{2+a} & > & 2 - a, \\ 6 + a & > & 4\sqrt{2+a}. \end{array}$$

После возведения в квадрат получаем неравенство $36 + 12a + a^2 > 32 + 16a$, т.е. $(a-2)^2 > 0$.

13.13. Применим индукцию по n. При $n = 1$ получаем очевидное тождество. Равенство

$$2\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = a_1 \frac{\pi}{2} + a_1\left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + + \frac{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}$$

показывает, что

$$\cos 2\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \dots + \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = -\sin\left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + + \frac{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}.$$

Воспользовавшись этой формулой и тождеством $2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{2-2\cos\alpha}$, получим

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} =$$
$$= \pm a_1\sqrt{2 + 2\sin\left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{2} + \ldots + \frac{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}}.$$

Нетрудно также убедиться, что в действительности всегда берётся знак плюс, поскольку знак числа $a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}}{2^n}$ совпадает со знаком числа a_1. Теперь, воспользовавшись предположением индукции, получаем требуемое тождество.

13.14. Применим индукцию по числу автомобилей n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для n автомобилей. Рассмотрим теперь $n+1$ автомобиль. Ясно, что среди них обязательно найдётся автомобиль A, который может доехать до следующего за ним автомобиля B, поскольку иначе бензина во всех автомобилях не хватило бы для того, чтобы проехать один раз по всей кольцевой дороге. Выльем бензин из B в A и уберём B. Среди оставшихся n автомобилей по предположению индукции найдётся автомобиль, который может проехать по всей кольцевой дороге, забирая по пути бензин у остальных автомобилей. Тогда тот же самый автомобиль сможет проехать по всей кольцевой дороге и в исходной ситуации, до переливания бензина из B в A. Действительно, доехать от A до B он сможет, а на всех остальных участках дороги бензина у него будет ровно столько же, сколько и в ситуации с n автомобилями.

13.15. Будем считать, что дробь m/n несократимая. Применим индукцию по m. При $m = 1$ доказывать нечего. Пусть $m > 1$. Разделим n на m с остатком, причём частное запишем в виде $d_0 - 1$, а остаток запишем в виде $m-k$, т.е. $n = m(d_0-1)+(m-k) = md_0-k$, где $d_0 > 1$ и $0 < k < m$. Тогда $\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. По предположению индукции дробь k/n можно представить в требуемом виде:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_r}.$$

Поэтому дробь

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0 d_1} + \frac{1}{d_0 d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_0 d_1 d_2 \ldots d_r}$$

тоже можно представить в требуемом виде.

Глава 14.

Комбинаторика

14.1. Элементы комбинаторики

14.1. Сколькими способами можно выбрать k предметов из n различных предметов, если порядок, в котором выбираются предметы: а) учитывается; б) не учитывается.

14.2. Сколько ожерелий можно составить из пяти белых бусинок и двух чёрных?

14.3. а) Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

б) Сколько ожерелий можно составить из семи различных бусин?

14.4. Сколько существует различных путей на плоскости, ведущих из точки с координатами $(0, n)$ в точку с координатами (m, m), если двигаться разрешено каждый раз либо на 1 вверх (координата y увеличивается на 1), либо на 1 влево (координата x уменьшается на 1)?

14.5. а) Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы m целых неотрицательных чисел, если представления $n = x_1 + \ldots + x_m$ и $n = y_1 + \ldots + y_m$ считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m$? б) Тот же вопрос для представлений в виде суммы натуральных чисел.

14.2. Тождества для биномиальных коэффициентов

14.6. Докажите, что:
а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.
б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$.

14.7. Докажите, что $\binom{n+m}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$ (*Вандермонд*).

14.8. Докажите, что $\binom{2n}{n} = (\binom{n}{0})^2 + (\binom{n}{1})^2 + \ldots + (\binom{n}{n})^2$.

14.9. Докажите, что $\binom{2n}{n+k} = \sum_i 2^{n-k-2i}\binom{n}{k}\binom{n-i}{i+k}$.

14.10. Докажите, что $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

14.11. Докажите, что если $p+q = 1$, то $\sum_{0\leqslant r\leqslant n/2}(-1)^r\binom{n-r}{r}p^rq^r = \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$.

14.12. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n, причём $P(x) = 2^x$ для $x = 1, 2, \ldots, n+1$. Вычислите $P(n+2)$.

14.13. Докажите, что

$$\sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m} = n2^{n-1} \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{n} m^2\binom{n}{m} = n(n+1)2^{n-2}.$$

14.14. Докажите, что

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m+1}\binom{n}{m} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m+1}\binom{n}{m} = \frac{1}{n+1}.$$

14.3. Формулы с биномиальными коэффициентами

14.15. Докажите, что если $|x| < 1$, то

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

14.4. Бином Ньютона в арифметике

14.16. Докажите, что числа $(a+1)^{a^n} - 1$ и $(a-1)^{a^n} + 1$ делятся на a^{n+1} и не делятся на a^{n+2}.

14.17. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$ — последовательные простые числа. Докажите, что $p_1 \ldots p_k \leqslant 4^{p_k}$.

14.5. Комбинаторика в арифметике

14.18. Сколько существует четырёхзначных номеров (от 0001 до 9999), у которых сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

14.19. Сколько существует пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 7?

14.20. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

14.21. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x| + |y| < 100$?

14.22. Сколько существует положительных целых чисел x, меньших 10 000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7?

14.23. Докажите, что НОД$(a_1, \ldots, a_n) = P_{\text{нечёт}}/P_{\text{чёт}}$, где $P_{\text{нечёт}}$ — произведение НОК всех наборов, состоящих из нечётного числа различных чисел $a_1, \ldots, a_n$, а $P_{\text{чёт}}$ — произведение НОК всех наборов, состоящих из чётного числа различных чисел $a_1, \ldots, a_n$. (Предполагается, что числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно различны.)

14.24. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдите сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

14.25. Сколькими различными способами можно представить 1 000 000 в виде произведения трёх натуральных чисел? Произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются тождественными.

14.6. Неравенства для биномиальных коэффициентов

14.26. Докажите, что $2^n \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.

14.7. Арифметика биномиальных коэффициентов

14.27. Пусть p — простое число и $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Докажите, что $\binom{p}{k}$ делится на p.

14.28. Пусть p — простое число. Докажите, что для всех натуральных $m \leqslant p-1$ число $(-1)^m\binom{p-1}{m} - 1$ делится на p.

14.29. Докажите, что если p — простое число, то $\binom{np}{n} \equiv n \pmod{p^2}$.

14.30. Пусть p — нечётное простое число, $n = p^{\alpha-2}$, где $\alpha \geqslant 2$. Докажите, что если $m \geqslant 2$, то $\binom{n}{m}$ делится на $p^{\alpha-m}$.

14.31. Пусть p — простое число. Докажите, что если p^α делит $\binom{n}{k}$, то $p^\alpha \leqslant n$.

14.8. Формула включений и исключений

14.32. Дано N предметов и некоторый набор свойств $P_1, \ldots, P_n$. Пусть N_i — количество предметов, обладающих свойством P_i, N_{ij} —

количество предметов, обладающих свойствами P_i и P_j, и т.д. Докажите, что количество предметов, не обладающих ни одним из данных свойств, равно

$$N - \sum N_i + \sum_{i_1<i_2} N_{i_1 i_2} - \sum_{i_1<i_2<i_3} N_{i_1 i_2 i_3} + \ldots + (-1)^n N_{123\ldots n}$$

(*формула включений и исключений*).

14.33. Пусть $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ — разложение числа на различные простые множители, $\varphi(n)$ количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

14.34. а) Докажите, что количество перестановок $a_1, \ldots, a_n$ чисел $1, \ldots, n$, для которых $a_i \neq i$ при всех i, равно

$$n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

б) Докажите, что доля таких перестановок среди всех перестановок стремится к $1/e$ при $n \to \infty$.

14.9. Аналоги биномиальных коэффициентов

14.35. Пусть m и n — целые неотрицательные числа. Докажите, что число $\dfrac{m!(2n+2m)!}{(2m)!n!(n+m)!}$ целое.

14.10. Числа Каталана

Пусть $c_0 = 1$, $c_1 = c_0c_0 = 1$, $c_2 = c_0c_1 + c_1c_0 = 2$, $c_3 = c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0 = 5$ и вообще $c_k = c_0c_{k-1} + c_1c_{k-2} + \ldots + c_{k-1}c_0$. Числа c_k, заданные таким рекуррентным соотношением, называют *числами Каталана*.

14.36. Докажите, что количество различных способов разрезать выпуклый n-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями равно c_{n-2}. (*Эйлер*)

14.37. В строку записана $n+1$ буква. Требуется расставить n пар круглых скобок так, чтобы внутри каждой пары скобок стояли либо две соседние буквы, либо буква и соседнее выражение в скобках, либо два соседних выражения в скобках[1]. Докажите, что количество различных расстановок скобок равно c_n. (*Каталан*)

14.38. В расстановке скобок из задачи 14.37 сотрём все буквы и две крайние скобки (правую и левую). То, что получится, назовём *правильной скобочной структурой*. Докажите, что количество правильных скобочных структур из n пар скобок равно c_n.

Путём Дика из $2n$ звеньев называют ломаную на плоскости, которая соединяет точки с координатами $(0,0)$ и $(0,2n)$, имеет векторы звеньев $(1,\pm 1)$ и целиком лежит в верхней полуплоскости $x \geqslant 0$. (Векторы последовательных звеньев могут быть одинаковыми.)

14.39. а) Докажите, что число различных путей Дика из $2n$ звеньев равно c_n.

б) Докажите, что число различных путей Дика из $2n$ звеньев равно $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

14.40. а) Докажите, что количество различных последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, для которых $a_i = \pm 1$, $a_1 \geqslant 0$, $a_1 + a_2 \geqslant 0, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} \geqslant 0$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 0$, равно c_n.

б) Кассир, у которого в начальный момент времени денег нет, продаёт билеты по 50 рублей. Очередь состоит из $2n$ человек, у половины из которых есть только одна купюра 100 рублей, а у другой половины — 50 рублей. Докажите, что количество различных порядков очереди, для которых кассир сможет всем дать сдачу, равно c_n.

14.41. Шахматная ладья движется из левого нижнего угла доски $n \times n$ в правый верхний угол. При этом она делает ходы только вправо и вверх. Докажите, что количество различных путей, при которых ладья никогда не попадает на главную диагональ, за исключением исходного и конечного положения, равно c_{n-2}.

14.42. *Плоским бинарным деревом* называют граф на плоскости, у которого нет циклов и из каждой вершины выходят либо три ребра, либо одно ребро. Фиксируем одну вершину, из которой выходит одно ребро, и будем называть её *корнем*. Все остальные вершины, из которых выходит ровно одно ребро, будем называть *листьями*. Докажите, что

---

[1] Вот пример такой расстановки скобок: $((a((bc)d))(ef))$.

количество различных плоских бинарных деревьев с одним корнем и n листьями равно c_{n-1}. (*Кэли*)

14.43. Вершины правильного $(2n+1)$-угольника помечены нулями и единицами. Всего есть $n+1$ нуль и n единиц. Будем считать два таких набора пометок одинаковыми, если они получаются друг из друга поворотом многоугольника.

а) Докажите, что количество различных наборов пометок равно $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

б) Докажите, что количество различных наборов пометок равно c_n.

14.44. Пусть $\frac{1}{1-x-y-xy} = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_{p,q}x^py^q$. Докажите, что $(-1)^n a_{2n,2n+2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ — число Каталана c_n.

14.11. Элементы теории вероятностей

14.45. Какая сумма выпавших чисел более вероятна при бросании двух игральных костей: 9 или 10?

14.46. Мальчик должен сыграть в теннис три матча со своими родителями. Он будет считаться победителем, если выиграет подряд два матча. Отец играет лучше, чем мать. Какой порядок матчей предпочтительнее для мальчика: «отец–мать–отец» или «мать–отец–мать»?

14.47. Силы двух игроков равны, т.е. они имеют равные шансы на победу в каждой партии. Они договорились, что приз получит тот, кто первым выиграет 6 партий. Им пришлось прервать игру после того, как первый игрок выиграл 5 партий, а второй — 3. В каком отношении справедливо разделить приз?

14.48. В ящике лежат красные и чёрные носки. Если из ящика наугад вытащить два носка, то вероятность того, что они оба красные, равна 1/2.

а) Какое наименьшее число носков может быть в ящике?

б) Какое наименьшее число носков может быть в ящике, если известно, что число чёрных носков чётно?

14.49. На каждой грани игральной доски написано одно из чисел от 1 до 6, но некоторые числа могут быть написаны несколько раз. Будем говорить, что кость X *выигрывает* у Y, если при одновременном

бросании этих костей на X выпадает большее число, чем на Y, с вероятностью больше $1/2$. Могут ли три кости A, B, C обладать следующими свойствами: B выигрывает у A, C выигрывает у B, A выигрывает у C?

Решения

14.1. а) Первый предмет можно выбрать n способами, второй предмет $n-1$ способами, ..., k-й предмет $n-k+1$ способами. Всего получаем $n(n-1)\dots(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ способов.

б) Каждому набору из k предметов, в котором порядок предметов не учитывается, соответствует $k!$ наборов, которых порядок предметов учитывается (это соответствует выбору k предметов из k различных предметов). Всего получаем $\dfrac{1}{k!}\cdot\dfrac{n!}{(n-k)!}=\dbinom{n}{k}$ способов.

14.2. Ответ: 3. Чёрные бусинки разбивают белые бусинки на две группы (одна из этих групп может содержать 0 бусинок). Вид ожерелья полностью определяется количеством бусинок в меньшей группе. Это количество может быть равно 0, 1 или 2.

14.3. Ответ: 720. Семь девушек на семь разных мест в хороводе можно расставить $7! = 540$ способами. Но в хороводе расположения, которые получаются при движении хоровода, не различаются. Поворотами хоровода из одного расположения можно получить 7 других расположений. Поэтому всего получается $7!/7 = 6! = 720$ способов.

Ответ: 360. Ожерелье, в отличие от хоровода, можно не только вращать по кругу, но и перевернуть. В результате получаем $720/2 = 360$ различных ожерелий.

14.4. Ответ: $\dbinom{n}{m}$. Всего мы должны сделать m шагов вверх и $n-m$ шагов влево. Поэтому из n шагов нужно выбрать m шагов вверх.

14.5. а) Ответ: $\dbinom{n+m-1}{n}$ способами. Сопоставим разложению $n = x_1+\dots+x_m$ последовательность нулей и единиц, в которой сначала идёт x_1 единиц, потом один нуль, потом x_2 единиц, потом один нуль и т.д; в конце идёт x_m единиц. Всего в этой последовательности $n+m-1$ цифр, среди которых n единиц. Поэтому мы должны выбрать n предметов из $n+m-1$ занумерованных (т.е. различных) предметов.

б) Ответ: $\dbinom{n-1}{n-m}$. Каждому разложению $n = x_1+\dots+x_m$, где $x_1,\dots,x_m$ — натуральные числа, соответствует разложение $n-m = y_1 + \dots + y_m$, где $y_1 = x_1-1,\dots,y_m = x_m-1$.

14.6. а) $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$.

б) $0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots$.

14.7. Сравните коэффициенты при x^k в обеих частях равенства $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m(x+1)^n$.

14.8. Примените тождество из задачи 14.7 при $n = m = k$ и воспользуйтесь тем, что $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.

14.9. Коэффициент при x^{n-k} в разложении $(1+x)^{2n}$ равен $\binom{2n}{n-k} = \binom{2n}{n+k}$. С другой стороны, $(1+x)^{2n} = \big(x^2 + (1+2x)\big)^n = \sum_i \binom{n}{i} x^{2i}(1+2x)^{n-i} = \sum_i \binom{n}{i} x^{2i} \sum_j \binom{n-i}{j} 2^j x^j$. В последнем выражении коэффициент при x^{n-k} равен $\sum_i 2^{n-k-2i}\binom{n}{k}\binom{n-i}{n-k-2i} = \sum_i 2^{n-k-2i}\binom{n}{k}\binom{n-i}{i+k}$.

14.10. Требуется доказать, что

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}.$$

Это равенство очевидно.

14.11. Пусть $S_n = \sum_{0 \leqslant r \leqslant n/2} \binom{n-r}{r} p^r q^r$. Тогда $S_{n+1} - S_n = \sum (-1)^r \left(\binom{n+1-r}{r} - \binom{n-r}{r} \right) p^r q^r = \sum (-1)^r \binom{n-r}{r-1} p^r q^r = -pqS_{n-1}$. Ясно также, что $S_0 = S_1 = 1$. С другой стороны, $\frac{p-q}{p-q} = 1$ и $\frac{p^2-q^2}{p-q} = p + q = 1$. Поэтому при $n = 0$ и при $n = 1$ требуемое утверждение верно. Если равенство $S_k = \frac{p^{k+1} - q^{k+1}}{p-q}$ доказано для всех $k \leqslant n$, то $S_{n+1} = S_n - pqS_{n-1} = \frac{p^{n+1} - q^{n+1} - pq(p^n - q^n)}{p-q} = \frac{p^{n+1}(1-q) - q^{n+1}(1-p)}{p-q} = \frac{p^{n+2} - q^{n+2}}{p-q}$.

14.12. О т в е т: $P(n+2) = 2^{n+2} - 2$.

Выражение $\binom{n}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}$ можно рассматривать как многочлен степени n от переменной x. Пусть $f(x) = 2\left(\binom{0}{x-1} + \binom{1}{x-1} + \ldots + \binom{n}{x-1}\right)$. Ясно, что $\binom{0}{x-1} + \binom{1}{x-1} + \ldots + \binom{n}{x-1} = (1+1)^{x-1} = 2^{x-1}$ при $x = 1, 2, \ldots, n+1$. Поэтому $P(x) = f(x)$, поскольку эти многочлены

степени n совпадают при $n+1$ различных значениях x. Следовательно,

$$P(n+2) = 2(\binom{0}{n+1} + \binom{1}{n+1} + \ldots + \binom{n}{n+1}) =$$
$$= 2(\binom{0}{n+1} + \binom{1}{n+1} + \ldots + \binom{n}{n+1} + \binom{n+1}{n+1} - \binom{n+1}{n+1}) =$$
$$= 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2.$$

14.13. Продифференцируем тождество $(1+x)^n = \sum_{m=0}^n x^m \binom{n}{m}$ и домножим полученное равенство на x. В результате получим $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{m=1}^n mx^m \binom{n}{m}$; при $x=1$ получаем первое из требуемых тождеств. Ещё раз повторив дифференцирование по x и домножение на x, получим

$$nx(nx+1)(1+x)^{n-2} = \sum_{m=1}^n m^2 x^m \binom{n}{m};$$

при $x=1$ получаем второе из требуемых равенств.

14.14. Запишем тождество $(1+t)^n = \sum_{m=0}^n t^m \binom{n}{m}$ и проинтегрируем его:

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \sum_{m=0}^n \int_0^x t^m \binom{n}{m} dt,$$

т.е.

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{m=0}^n \frac{x^{m+1}}{m+1} \binom{n}{m}.$$

При $x=1$ получаем первое требуемое тождество, а при $x=-1$ — второе.

14.15. Применим индукцию по n. При $n=1$ получаем обычную формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии. Чтобы перейти от n к $n+1$, нужно доказать тождество

$$\left(1 + \sum_{k=1}^\infty \binom{n+k}{n} x^k\right)(1-x) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

Коэффициенты при x^k в левой и правой частях равны $\binom{n+k}{n} - \binom{n+k-1}{n}$ и $\binom{n+k-1}{n-1}$. Эти числа равны.

14.16. Мы приведём доказательство лишь для первого числа (для второго числа рассуждения аналогичны). При $n=0$ утверждение очевидно. При $n=1$ получаем $(1+a)^a \equiv a \cdot a + \binom{a}{2} a^2 \pmod{a^3}$. Число $a^2 + \binom{a}{2} a^2 = a^2 \left(\frac{a^2+a+1}{2}\right)$ делится на a^2 и не делится на a^3.

Предположим теперь, что $(a+1)^{a^n}-1$ делится на a^{n+1} и не делится на a^{n+2} для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда $(a+1)^{a^{n+1}}-1 = \left((a+1)^{a^n}-1\right)^n = (1+ba^{n+1})^a - 1 = a \cdot ba^{n+1} + \binom{a}{2}b^2a^{2n+2} + \binom{a}{3}b^3a^{3n+3} + \ldots$ (здесь b — целое число, которое не делится на a). Если $n \geqslant 1$, то $2n+2 > n+2$, поэтому $(a+1)^{a^{n+1}}-1 \equiv ba^{n+2} \pmod{a^{n+3}}$; число ba^{n+2} делится на a^{n+2} и не делится на a^{n+3}.

14.17. Докажем индукцией по n, что если $p_k \leqslant n$, где $n \geqslant 2$, то $p_1 \ldots p_k \leqslant 4^n$. При $n=2$ требуемое утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для всех чисел, не превосходящих $n-1$. Чтобы сделать шаг индукции, разберём отдельно два случая.

Пусть $n=2m$. Согласно предположению индукции произведение всех простых чисел, не превосходящих m, не превосходит 4^m. Кроме того, все простые числа p_i, для которых $m+1 \leqslant p_i \leqslant 2m$, делят число $\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m!m!}$, а это число не превосходит $2^{2m}=4^m$. В результате получаем, что произведение простых чисел, не превосходящих $n=2m$, не превосходит $4^m \cdot 4^m = 4^{2m} = 4^n$.

Пусть $n=2m+1$. Согласно предположению индукции произведение всех простых чисел, не превосходящих $m+1$, не превосходит 4^{m+1}. Кроме того, все простые числа p_i, для которых $m+2 \leqslant p_i \leqslant 2m+1$, делят число $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$. Ясно также, что $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ и $\binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leqslant 2^{2m+1}$, поэтому $\binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m}$. В результате получаем, что произведение простых чисел, не превосходящих $n=2m+1$, не превосходит $4^{m+1} \cdot 2^{2m} = 4^{2m+1} = 4^n$.

14.18. Ответ: 669. Пусть сумма первых двух цифр равна n, и сумма двух последних цифр тоже равна n. Число n принимает значение от 1 до 18. Если количество двузначных номеров, у которых сумма цифр равна n, равно a_n, то искомое число равно $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{18}^2$. Двузначный номер, у которого сумма цифр равна n, состоит из цифр a и $n-a$, где $0 \leqslant a \leqslant 9$ и $0 \leqslant n-a \leqslant 9$. Таким образом, $0 \leqslant a \leqslant 9$ и $n-9 \leqslant a \leqslant n$. Если $n \leqslant 9$, то остаётся неравенство $0 \leqslant a \leqslant n$, а если $n \geqslant 9$, то остаётся неравенство $n-9 \leqslant a \leqslant 9$. В итоге получаем $a_1=2$, $a_2=3$, $\ldots$, $a_8=9$, $a_9=10$, $a_{10}=9$, $\ldots$, $a_{17}=2$, $a_{18}=1$.

14.19. Ответ: $142^2 = 20164$. Число x^2+y^2 делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 7. Действительно, квадрат целого числа при делении на 7 даёт остатки 0, 2 и 4. Количество целых чисел, заключённых между 1 и 1000 и делящихся на 7, равно 142. Поэтому искомое число равно $142^2 = 20164$.

14.20. Ответ: 686 чисел. Сначала вычеркнем из набора чисел 1, 2, ..., 999 числа, кратные 5; их количество равно $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$. Затем из того же

набора чисел 1, 2, ..., 999 вычеркнем числа, кратные 7; их количество равно $\left[\frac{999}{7}\right] = 142$. При этом числа, кратные 35, будут вычеркнуты дважды. Их количество равно $\left[\frac{999}{35}\right] = 28$. Значит, всего мы вычеркнули $199 + 142 - 28 = 313$ чисел, а осталось $999 - 313 = 686$ чисел.

14.21. Ответ: 338 350. Уравнения $|x| + |y| = 0$, $|x| + |y| = 1$, $|x| + |y| = 2$, ..., $|x| + |y| = 99$ имеют, соответственно, 1, 2^2, 3^2, ..., 100^2 целочисленных решений. Поэтому искомое число равно $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6}$.

14.22. Ответ: 2857. Остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 повторяются с периодами 3 и 7, поэтому остатки от деления на 7 числа $2^x - x^2$ повторяются с периодом 21. Среди чисел x от 1 до 21 равные остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 дают ровно 6 чисел. Поэтому среди чисел от 1 до $9996 = 7 \cdot 476$ есть $476 \cdot 6 = 2856$ требуемых чисел. Непосредственная проверка с использованием полученной последовательности остатков показывает, что из оставшихся чисел 9997, 9998 и 9999 только число 9998 обладает требуемым свойством.

14.23. Эта задача — обобщение задачи 4.19, при решении которой показано, что достаточно рассмотреть случай, когда $a_1 = p^{\alpha_1}$, ..., $a_n = p^{\alpha_n}$ и $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$.

Множитель p^{α_1} входит только в $P_{\text{нечёт}}$, причём ровно один раз (когда мы берём набор, состоящий из одного числа a_1). Покажем, что все остальные множители, входящие в $P_{\text{нечёт}}$ и в $P_{\text{чёт}}$, взаимно сокращаются. НОК набора чисел равно $p^{\alpha_{k+1}}$, если одно из этих чисел равно a_{k+1}, а все остальные числа выбраны из $a_1, \ldots, a_k$. Поэтому в $P_{\text{нечёт}}$ множитель $p^{\alpha_{k+1}}$ входит $\binom{k}{0} + \binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \ldots$ раз, в $P_{\text{нечёт}}$ этот множитель входит $\binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \binom{k}{5} + \ldots$ раз. Согласно задаче 14.6 б) каждая из этих сумм равна 2^{k-1}.

14.24. Ответ: 1 769 580. Будем отдельно подсчитывать сумму тысяч, сотен, десятков и единиц для рассматриваемых чисел. На первом месте может стоять любая из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Количество всех чисел с фиксированной первой цифрой равно $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$, поскольку на втором и третьем месте может стоять любая из шести цифр, а на четвёртом месте может стоять любая из трёх цифр 0, 2, 4 (мы рассматриваем только чётные числа). Поэтому сумма тысяч равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 108 \cdot 1000 = 1\,620\,000$. Количество чисел с фиксированной второй цифрой равно $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ (на первом месте стоит любая из пяти цифр). Поэтому сумма сотен равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 90 \cdot 100 = 135\,000$. Аналогично сумма десятков равна $(1+2+3+4+5) \cdot 90 \cdot 10 = 13\,500$, а сумма единиц равна $(2 + 4) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,080$.

14.25. Пусть множители имеют вид $2^{a_1}5^{b_1}$, $2^{a_2}5^{b_2}$ и $2^{a_3}5^{b_3}$. Тогда $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ и $b_1 + b_2 + b_3 = 6$. При этом числа a_i и b_i могут быть равны нулю.

Если $a_1 = k$, то для разложения $a_2 + a_3 = 6 - k$ получаем $7 - k$ вариантов. Поэтому для разложения $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ получаем $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ вариантов. Всего получаем $(28)^2 = 784$ способа.

Но пока что мы не учли тождественность разложений, отличающихся лишь порядком множителей. Есть ровно одно разложение, не зависящее от порядка множителей, в котором все множители равны 100. Те разложения, в которых есть два равных множителя, мы посчитали трижды. В каждый из равных множителей 2 может входить в степени $0, 1, 2$ или 3, т.е. всего четырьмя различными способами; столькими же способами может входить 5. Всего получаем 16 разложений такого вида, но одно из них — рассмотренное выше разложение с тремя равными множителями. Остаётся 15 разложений, каждое из которых мы посчитали трижды. Количество разложений с попарно различными множителями равно $784 - 1 - 45 = 738$. Каждое из них мы посчитали 6 раз, поэтому среди них будет $738/6 = 123$ различных разложения. Всего получаем $1 + 15 + 123 = 139$ разложений.

14.26. С одной стороны, $2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots + \binom{2n}{2n} \geqslant \binom{2n}{n}$. С другой стороны,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{1} \geqslant 2^n,$$

поскольку $\dfrac{2n-k}{k} \geqslant 2$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

14.27. По определению $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}$. Числитель делится на p, а знаменатель не делится на p. Поэтому целое число, которое получается в результате деления числителя на знаменатель, делится на p.

14.28. Тождество $\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k}$ показывает, что $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{p}{k} = (-1)^m\binom{p-1}{m}$, т.е. $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{p}{k} = (-1)^m\binom{p-1}{m} - 1$. Если $1 \leqslant m \leqslant p-1$, то согласно задаче 14.27 каждое слагаемое $(-1)^k\binom{p}{k}$ делится на p.

14.29. Тождество $(1+x)^{np} = \left((1+x)^n\right)^p$ показывает, что

$$\binom{np}{n} = \sum_{k_1+\ldots+k_n=p} \binom{p}{k_1} \cdots \binom{p}{k_n}.$$

Согласно задаче 14.27 число $\binom{p}{k}$ делится на p, если $0 < k < p$. Поэтому в указанной сумме на p^2 делятся все слагаемые, за исключением тех, для которых $k_i = p$ для некоторого i. Каждое из таких слагаемых равно 1, а их количество равно n.

14.30. При $m = 2$ нужно доказать, что $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)}{2}$ делится на n; это очевидно.

Пусть $m \geqslant 3$. В выражении $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$ числитель делится на $n = p^{\alpha-2}$, а наивысшая степень p, на которую делится знаменатель, равна $\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \ldots \leqslant \frac{m}{p} + \frac{m}{p^2} + \ldots = \frac{m}{p-1}$.

Если $m = 3$, то $\binom{n}{m}$ делится на p в степени $\alpha - 2 - \left[\frac{3}{p}\right] + \left[\frac{3}{p^2}\right] + \ldots = \alpha - 2 - \left[\frac{3}{p}\right] \geqslant \alpha - 3 = \alpha - m$.

Если $m \geqslant 4$, то $\binom{n}{m}$ делится на p в степени $\alpha - 2 - \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \ldots \geqslant \alpha - 2 - \frac{m}{p-1} \geqslant \alpha - 2 - \frac{m}{2} \geqslant \alpha - m$.

14.31. Ясно, что $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$. Рассматриваемое простое число p делит числитель этой дроби. Пусть p^r — наибольшая степень p, которая делит хотя бы одно из чисел от $n-k+1$ до n включительно; пусть это будет число m (если таких чисел несколько, то мы выбираем любое из них). Сосредоточим внимание на числе m и в соответствии с этим запишем числитель рассматриваемой дроби в виде

$$(m+a)(m+a-1)\dots(m+1)m(m-1)\dots(m-b);$$

здесь $m + a = n$ и $m - b = n - k + 1$, поэтому $k = a + b + 1$. Множители знаменателя переставим в соответствии с записью числителя:

$$k! = a(a-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot(a+1)(a+2)\dots(a+b+1).$$

Число $\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+b+1)}{b!} = \binom{a+b+1}{b}$ целое; обозначим его l. Итак,

$$\binom{n}{k} = \frac{m+a}{a}\cdot\frac{m+a-1}{a-1}\cdot\ldots\cdot\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{m-b}{b}\cdot\frac{m}{l};$$

множитель $\frac{m}{l}$ мы переставили в конец.

Пусть x — некоторое целое число, причём $-b \leqslant x \leqslant a$, а p^{r_1} — наибольшая степень p, делящая x. Если $r_1 < r$, то наибольшая степень p, которая делит числитель дроби $\frac{m+x}{x}$, равна p^{r_1}. Степени p в числителе и в знаменателе сокращаются. Предположим теперь, что $r_1 \geqslant r$. Из неравенств для x следует, что $n - k + 1 \leqslant m + x \leqslant n$. Поэтому согласно выбору числа m наибольшая степень p, которая делит числитель дроби $\frac{m+x}{x}$, не превосходит p^r. В этом случае после сокращения степень p может остаться только в знаменателе. Таким образом, наибольшая степень p, делящая $\binom{n}{k}$, не превосходит наибольшей степени p, делящей m. Значит, $p^\alpha \leqslant p^r \leqslant m \leqslant n$.

14.32. Первое решение. Элемент, не обладающий ни одним из данных свойств, даёт вклад только в первый член N. Элемент, обладающий ровно одним свойством, даёт вклад в первые два члена; его общий вклад равен $1-1=0$. Элемент, обладающий ровно $k \geqslant 2$ свойствами, даёт вклад в первые $k+1$ членов. В член $\sum_{i_1<\ldots<i_l} N_{i_1\ldots i_l}$ он даёт вклад $\binom{k}{l}$, поэтому его общий вклад равен

$$1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\ldots+(-1)^l\binom{k}{l}+\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}=(1-1)^k=0.$$

Второе решение. Положим

$$C(K,i)=\begin{cases}1, & \text{если } K\text{-й предмет обладает свойством } P_i;\\ 0, & \text{если не обладает.}\end{cases}$$

Тогда искомое число равно

$$\sum_{K=1}^{N}\bigl(1-C(K,1)\bigr)\bigl(1-C(K,2)\bigr)\ldots\bigl(1-C(K,n)\bigr)=$$

$$=N-\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{N}C(K,i)+\sum_{i_1<i_2}\sum_{K=1}^{N}C(K,i)-\ldots$$

Остаётся заметить, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{N}C(K,i)=N_i$, $\sum_{i_1<i_2}\sum_{K=1}^{N}C(K,i)=$ $=N_{i_1i_2}$ и т.д.

14.33. Пусть данные предметы — числа от 1 до n, а свойство P_i заключается в том, что данное число не делится на p_i. Количество чисел от 1 до n, делящихся на p_i, равно n/p_i, делящихся на p_i и на p_j, равно $\frac{n}{p_ip_j}$, и т.д. Поэтому по формуле включений и исключений

$$\varphi(n)=n-n\left(\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_k}\right)+n\left(\frac{1}{p_1p_2}+\ldots+\right)-\ldots+(-1)^k\frac{n}{p_1\ldots p_k}=$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

14.34. а) Воспользуемся формулой включений и исключений. А именно, пусть предметы — это перестановки чисел 1, …, n; их количество равно $n!$. Свойство P_i заключается в том, что $a_i \neq i$. Тогда $N_{i_1\ldots i_k}=(n-k)!$ — количество перестановок, оставляющих на месте k чисел $i_1, \ldots, i_k$. Количество слагаемых в сумме $\sum_{i_1<\ldots<i_k} N_{i_1\ldots i_k}$ равно $\binom{n}{k}$ — это количество способов выбрать k элементов $i_1, \ldots, i_k$ среди n элементов. Остаётся заметить, что $(n-k)!\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!}$.

б) Доля таких перестановок равна

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

При $n \to \infty$ это число стремится к e^{-1} (задача 29.47).

14.35. Положим $A(m,n) = \dfrac{m!(2n+2m)!}{(2m)!n!(n+m)!}$. Тогда $A(m,0) = 1$ и $A(0,n) = \binom{2n}{n}$. Кроме того,

$$4A(m,n-1) + A(m-1,n) = \frac{(m-1)!(2n+2m-2)!}{(2m-2)!(n-1)!(n+m-1)!}\left(\frac{4m}{2m(2m-1)} + \frac{1}{n}\right).$$

Заметив, что $\dfrac{2n+2m-1}{n(2m-1)} = \dfrac{(2n+2m-1)(2n+2m)m}{n(2m-1)2m(n+m)}$, получим $4A(m,n-1) + A(m-1,n) = A(m,n)$.

14.36. Пусть искомое число равно d_n. Ясно, что $d_3 = 1$ и $d_4 = 2$. Для удобства положим $d_2 = 1$. Проверим, что $d_5 = d_2d_4 + d_3d_3 + d_4d_2$. Фиксируем одну из сторон пятиугольника. Пусть этот пятиугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. К фиксированной стороне прилегает ровно один из этих треугольников. Возможны три варианта: слева от этого треугольника расположен четырёхугольник, по обе стороны расположены треугольники, справа расположен четырёхугольник. Каждый из этих многоугольников нужно разрезать диагоналями на треугольники, а затем подсчитать общее число вариантов. В результате получим $d_4 + d_3d_3 + d_4 = d_2d_4 + d_3d_3 + d_4d_2$.

Аналогично для любого n получаем $d_n = d_2d_{n-1} + d_3d_{n-2} + \ldots + d_{n-1}d_2$. Значит, $d_n = c_{n-1}$.

14.37. Между расстановками скобок для $n+1$ букв и разрезаниями $(n+2)$-угольника на треугольник непересекающимися диагоналями можно установить взаимно однозначное соответствие. На рис. 14.1 показано, как это делается в конкретном случае. В общем случае буквы последовательно записываются на сторонах $(n+2)$-угольник по часовой стрелке. Одна фиксированная сторона остаётся свободной. Если заданы диагонали $(n+2)$-угольника, то каждой диагонали сопоставляем пару скобок, заключающих выражения на сторонах прилегающего к ней треугольника. Так последовательно будут записаны выражения в скобках на каждой диагонали, и в конце на свободной стороне будет записана требуемая расстановка скобок. Наоборот, если задана расстановка пар скобок, то её можно сопоставить набор диагоналей, сопоставляя каждой паре скобок диагональ, начиная со скобок, заключающих пару соседних букв.

14.38. Правильная скобочная структура из n скобок характеризуется тем, что в ней n левых скобок, n правых скобок, и в любом её начальном участке количество правых скобок не превосходит количества левых скобок. Ясно, что при $n = 1$ и 2 количество правильных скобочных структур равно 1 и 2 соответственно. Требуемое рекуррентное соотношение доказывается следующим образом. Сопоставим крайней левой скобке первую правую скобку

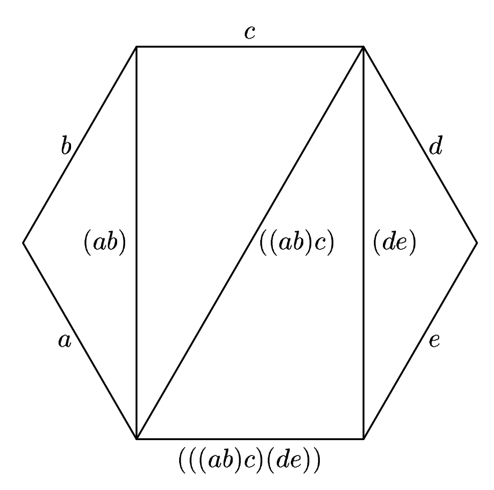


Рис. 14.1.

так, чтобы между этими двумя скобками была расположена правильная скобочная структура из k пар скобок для некоторого k (возможно, $k = 0$). Тогда вне этих скобок расположена правильная скобочная структура из $n-k-1$ пар скобок. Ясно также, что обе эти правильные скобочные структуры могут быть произвольными.

14.39. а) Взаимно однозначное соответствие между путями Дика и правильными скобочными структурами из задачи 14.38 можно установить, сопоставив звену $(1,1)$ левую скобку, а звену $(1,-1)$ — правую скобку.

б) Дополним путь Дика одним звеном $(1,-1)$. Фиксируем в полученном пути одно из $n+1$ звеньев $(1,-1)$ и сопоставим ему путь из точки $(1,-1)$ в точку $(2n+1,-1)$ следующим образом. Перенесём параллельно в начало координат путь, который состоит из фиксированного звена и следующего за ним участка пути Дика, включая добавленное звено. В конец полученного пути перенесём начальный участок пути Дика от начала координат до фиксированного звена. Теперь фиксированное звено всегда ведёт в точку $(1,-1)$, поэтому мы получаем путь из точки $(1,-1)$ в точку $(2n+1,-1)$. По этому пути мы можем восстановить исходный путь Дика. А именно, рассмотрим все нижние точки пути и выберем среди них крайнюю справа. Эта точка разбивает путь на два участка. Перенесём первый участок так, чтобы он заканчивался в точке $(2n+1,-1)$, а второй участок — так, чтобы он начинался в точке $(0,0)$. В результате после отбрасывания последнего звена получим путь Дика: это очевидно для первого участка полученного пути и легко проверяется для второго. Если мы возьмём какую-нибудь другую ниж-

нюю точку пути и попробуем применить ту же самую конструкцию, то для первого участка полученного пути требуемое свойство будет выполняться, а для второго — нет.

Количество всех путей из точки $(-1, 1)$ в точку $(2n+1, -1)$ равно $\binom{2n}{n}$. Действительно, из $2n$ звеньев мы должны выбрать n звеньев $(1, 1)$. Каждому пути Дика соответствует ровно $n+1$ таких путей, поэтому количество путей Дика равно $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

14.40. а) Между такими последовательностями и путями Дика можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставив числу a_i звено $(1, a_i)$.

б) Положим $a_i = 1$, если у i-го человека в очереди 50 рублей, и $a_i = -1$, если 100. Кассир сможет всем дать сдачу тогда и только тогда, когда на каждом шаге количество полученных им 50-рублёвых купюр не меньше количества 100-рублёвых, т.е. $a_1 \geqslant 0$, $a_1 + a_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} \geqslant 0$ (по условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 0$). Таким образом, мы приходим к задаче а).

14.41. Первый и последний ходы ладьи определены однозначно. Поэтому можно рассматривать пути ладьи без первого и последнего хода. Взаимно однозначное соответствие между такими путями и путями Дика из $2(n-2)$ звеньев устанавливается очевидным образом.

14.42. На рис. 14.2 показано, как плоскому бинарному дереву с одним корнем и n листьями можно сопоставить разбиение $(n+1)$-угольника на треугольники и расстановку скобок для n букв. В многоугольнике выделяется одна сторона, которая соответствует корню. Остальные стороны соответствуют листьям.

14.43. а) Количество всех способов пометить n вершин $(2n+1)$-угольника единицами (а на остальные места поставить нули) равно $\binom{2n+1}{n}$. Число $2n+1$ не делится на n, поэтому никакой набор пометок не может перейти сам в себя при повороте $(2n+1)$-угольника. Количество поворотов $(2n+1)$-угольника, переводящих его в себя, равно $2n+1$. Поэтому количество различных наборов пометок равно $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$.

б) Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между наборами пометок и расстановками n пар скобок для $n+1$ букв. Сопоставим расстановке скобок последовательность из нулей и единиц, заменив каждую левую скобку единицей, а каждую букву нулём; правые скобки при этом игнорируются. Обратная операция для последовательностей определена не всегда, потому что расстановке скобок не может соответствовать последовательность, начинающаяся с нуля. Поэтому запишем полученную последовательность в вершинах правильного $(2n+1)$-угольника по часовой стрелке.

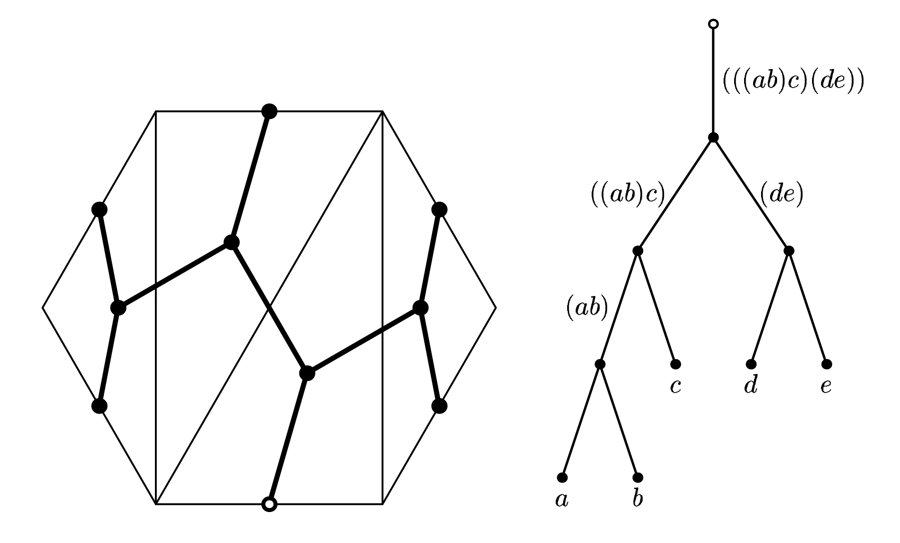


Рис. 14.2.

Для такого набора пометок обратная операция определена однозначно. Действительно, нулей больше, чем единиц, поэтому обязательно найдётся тройка последовательных чисел 100. Для такой тройки расстановка скобок определена однозначно: правая скобка стоит сразу же за соответствующими двумя буквами. Выражение в скобках играет такую же роль, как буква. Поэтому последовательность 100 можно заменить на 0, перейдя к $(2n-1)$-угольнику, и т.д.

14.44. Воспользовавшись формулой из задачи 14.15, получим

$$\frac{1}{1-x-y-xy} = \frac{1}{(1-x)(1-y)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{xy}{(1-x)(1-y)}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k y^k}{(1-x)^{k+1}(1-y)^{k+1}} =$$

$$= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+i}{k}\binom{k+j}{k} x^{k+i} y^{k+j} =$$

$$= \sum_{p,q=0}^{\infty} x^p y^q \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{q}{k}.$$

Значит, $a_{p,q} = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{q}{k}$ — коэффициент при x^p в выражении $(1+$

$+x)^p(1-x)^q$. Нас интересует случай, когда $p = 2n$ и $q = 2n+2$. В этом случае $(1+x)^p(1-x)^q = (1-x^2)^n(1-x)^2$; коэффициент при x^{2n} равен $(-1)^n\binom{2n}{n} +$ $+ (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1} = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!n!}\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = (-1)^n\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

14.45. Ответ: 9. Числа 9 и 10 можно получить двумя разными способами: $9 = 3+6 = 4+5$ и $10 = 4+6 = 5+5$. Но нам необходимо учитывать порядок, в котором выпадают числа на костях. Поэтому число 9 получается четырьмя разными способами, а число 10 лишь тремя: $9 = 3+6 = 6+3 = 4+5 = 5+4$, $10 = 4+6 = 6+4 = 5+5$.

14.46. Ответ: «отец–мать–отец». (Такой ответ представляется на первый взгляд странным, потому что приходится дважды играть с сильным игроком. Но при другом порядке матчей нужно обязательно выиграть единственный матч с сильным игроком, а не один из двух матчей.)

Пусть вероятность выиграть матч у отца равна p, а у матери — q. По условию $p < q$. Победу мальчику приносят следующие исходы турнира: ВВП, ВВВ, ПВВ (здесь В означает выигрыш, а П проигрыш). Для турнира «отец–мать–отец» вероятности таких исходов равны $pq(1-p)$, pqp, $(1-p)qp$. Поэтому вероятность выигрыша в таком турнире равна $2pq - pqp$. Аналогично вероятность выигрыша в турнире «мать–отец–мать» равна $2pq - qpq$. Ясно, что $pqp < qpq$, поэтому $2pq - pqp > 2pq - qpq$.

14.47. Ответ: 7: 1. Пусть игроки сыграют ещё три партии, т.е. игра фиктивно продолжается даже после того, как первый игрок получил приз. Второй игрок получит приз тогда и только тогда, когда он выиграет все три партии. Поскольку все $2^3 = 8$ исходов этих трёх партий равновероятны, второй игрок получит приз с вероятностью $1/8$. Соответственно, первый игрок получит приз с вероятностью $7/8$.

14.48. а) Ответ: 4. Пусть в ящике лежит m красных носков и n чёрных. Вероятность того, что первый выбранный носок красный, равна $\frac{m}{n+m}$. При условии, что первый выбранный носок красный, вероятность того, что второй выбранный носок тоже красный, равна $\frac{m-1}{n+m-1}$. Поэтому вероятность того, что оба носка красные, равна $\frac{m}{n+m}\cdot\frac{m-1}{n+m-1}$. Таким образом, требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{m}{n+m}\cdot\frac{m-1}{n+m-1} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

При $n = 1$ получаем $m = 3$. Такой набор носков нам подходит.

б) Ответ: 21. Ясно, что $n > 0$. Тогда, как легко проверить, $\frac{m}{n+m} > \frac{m-1}{n+m-1}$. Поэтому должны выполняться неравенства

$$\left(\frac{m}{n+m}\right)^2 > \frac{1}{2} > \left(\frac{m-1}{n+m-1}\right)^2,$$

т.е. $(\sqrt{2}+1)n < m < (\sqrt{2}+1)n+1$. По условию число n чётно. Для $n = 2$, 4, 6 получаем $m = 5$, 10, 15. В первых двух случаях равенство (1) не выполняется, а в третьем выполняется. При этом $n + m = 6 + 15 = 21$.

Замечание. *Равенство (1) можно переписать в виде* $(2x-1)^2 - 2(2y)^2 = 1$, *где* $x = m - n$ *и* $y = n$. *Поэтому в общем случае мы имеем дело с уравнением Пелля.*

14.49. Ответ: да, могут. Пусть, например, на гранях костей написаны следующие числа:

на кости A 1,4,4,4,4,4;
на кости B 2,2,2,5,5,5;
на кости C 3,3,3,3,3,6.

B выигрывает у A, если на B выпадает 5 или на B выпадает 2, а на A выпадает 1. Вероятность этого равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$.

C выигрывает у B, если на C выпадает 6 или на C выпадает 3, а на B выпадает 2. Вероятность этого равна $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$.

A выигрывает у C, если на A выпадает 4, а на C выпадает 3. Вероятность этого равна $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}$.

Глава 15.

Рекуррентные последовательности

Рекуррентной последовательностью порядка k называют последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots$, где числа $u_1, u_2, \ldots, u_k$ произвольные, а при всех $n \geqslant 1$ выполняется соотношение $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые фиксированные числа.

15.1. Общие свойства

15.1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — фиксированные числа и $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n$. Докажите, что

$$u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + u_4 x^3 + \ldots = \frac{P_{k-1}(x)}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k},$$

где $P_{k-1}(x)$ — многочлен степени не выше $k-1$.

15.2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — фиксированные числа и $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n$. Предположим, что $x_1, \ldots, x_k$ — попарно различные корни уравнения $x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k$. Докажите, что тогда $u_n = c_1 x_1^{n-1} + \ldots + c_k x_k^{n-1}$ для некоторых фиксированных $c_1, \ldots, c_k$.

15.2. Числа Фибоначчи

Числами Фибоначчи называют последовательность чисел $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. Начало этой последовательности имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

15.3. Докажите, что $F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$.

15.4. а) Докажите, что числа F_n и F_{n+1} взаимно просты.

б) Докажите, что НОД$(F_m, F_n) = F_d$, где $d =$ НОД(m, n).

15.5. Докажите, что если $m > 2$, то F_n делится на F_m тогда и только тогда, когда n делится на m.

15.6. Докажите, что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

(*Бине*).

15.7. Докажите, что для любого натурального n число

$$\binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 25\binom{n}{5} + 125\binom{n}{7} + \ldots$$

делится на 2^{n-1}.

15.8. а) Рассмотрим последовательность многочленов $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$ при $n \geqslant 3$. Докажите, что

$$f_{n+1}(x) = x^n + \binom{n-1}{1}x^{n-2} + \binom{n-2}{2}x^{n-4} + \binom{n-3}{3}x^{n-6} + \ldots$$

б) Докажите, что

$$F_{n+1} = 1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \ldots$$

15.9. Докажите, что

$$\frac{1}{1-x-x^2} = F_1 + F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \ldots$$

15.10. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся число Фибоначчи, делящееся на n.

15.11. Докажите, что сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи не может быть равна числу Фибоначчи.

15.12. Докажите, что если $a^2-ab-b^2=\pm 1$, где a и b — натуральные числа, то $a=F_{n+1}$ и $b=F_n$ для некоторого n.

15.13. Найдите все решения в натуральных числах уравнения $\binom{n}{m-1}=\binom{n-1}{m}$, где $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент.

15.14. а) Докажите, что $F_{2n+1}F_{2n-1}=F_{2n}^2+1$.

б) Докажите, что $F_{2n+1}^2+F_{2n-1}^2+1=3F_{2n+1}F_{2n-1}$.

15.15. При каких натуральных a и b число a^2+b^2+1 делится на ab?

15.16. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых a^2+1 делится на b, а b^2+1 делится на a.

15.17. Докажите, что любое натуральное число n единственным образом можно представить в виде $n=F_{k_1}+F_{k_2}+\ldots+F_{k_m}$, где $k_1>k_2+1$, $k_2>k_3+1$, $\ldots$, $k_{m-1}>k_m+1$, $k_m>1$.

15.18. Докажите, что число Фибоначчи с нечётным номером не может делиться на простое число вида $4k+3$.

15.3. Числа Фибоначчи и алгоритм Евклида

15.19. Пусть a и b — натуральные числа, причём $a>b$ и НОД$(a,b)=d$. Докажите, что если алгоритм Евклида, применённый к a и b, останавливается после n шагов, то $a\geqslant dF_{n+2}$ и $b\geqslant dF_{n+1}$.

15.20. а) Докажите, что $F_{n+5}\geqslant 10F_n$.

б) Докажите, что если $F_{n+1}<10^k$, то $n\leqslant 5k$.

15.21. Докажите, что количество шагов алгоритма Евклида, применённого к паре натуральных чисел $a>b$, не превосходит количества цифр десятичной записи числа b, умноженного на 5.

15.4. Числа Фибоначчи в комбинаторике

15.22. Чему равно количество подмножеств множества $\{1,2,3,\ldots,n\}$, не содержащих двух последовательных чисел?

15.23. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы нескольких слагаемых, равных 1 или 2? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

15.24. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы нескольких целых слагаемых $a_i \geqslant 2$? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

15.25. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы положительных нечётных слагаемых? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

15.5. Специальные рекуррентные последовательности

15.26. Пусть $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1$ и

$$a_{n+3} = \frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}a_{n+2} + (n^2+n+1)a_{n+1} - \frac{n+1}{n}a_n$$

при $n \geqslant 1$. Докажите, что a_n — квадрат целого числа для любого $n \geqslant 1$.

15.27. Пусть $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ и $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$ при $n \geqslant 4$. Докажите, что $u_{2n} - u_{n-1}^2$ и $u_{2n+1} - u_{n+1}^2$ делятся на u_n.

Решения

15.1. В произведении $(u_1+u_2x+u_3x^2+u_4x^3+\ldots)(1-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_kx^k)$ коэффициент при x^{n+k-1}, $n \geqslant 1$, равен $u_{n+k} - a_1u_{n+k-1} - \ldots - a_ku_n = 0$. Значит, это произведение представляет собой многочлен $P_{k-1}(x)$ степени не выше $k-1$.

15.2. Согласно задаче 10.34 можно выбрать числа $c_1, \ldots, c_k$ так, что

$$\begin{aligned} &u_1 = c_1 + \ldots + c_k,\\ &u_2 = c_1x_1 + \ldots + c_kx_k,\\ &\ldots\ldots\\ &u_k = c_1x_1^{k-1} + \ldots + c_kx_k^{k-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$c_1x_1^k + \ldots + c_kx_k^k = c_1(a_1x_1^{k-1} + \ldots + a_k) + \ldots + c_k(a_1x_k^{k-1} + \ldots + a_k) = \\ = a_1u_k + \ldots + a_ku_1 = u_{k+1}.$$

Аналогично $c_1x_1^{k+1} + \ldots + c_kx_k^{k+1} = u_{k+2}$ и т.д.

15.3. Применим индукцию по k. При $k = 1$ получаем $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, а при $k = 2$ получаем $F_{n+2} = F_{n-1} + 2F_n = F_{n-1} + F_n + F_n = F_{n+1} + F_n$. База индукции доказана. Предположим теперь, что $F_{n+k-2} = F_{n-1}F_{k-2} + F_nF_{k-1}$ и $F_{n+k-1} = F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k$. Тогда $F_{n+k} = F_{n-1}(F_{k-2} + F_{k-1}) + F_n(F_{k-1} + F_k) = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$.

15.4. а) Предположим, что числа F_n и F_{n+1} делятся на целое число $d > 1$. Тогда $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ тоже делится на d и т.д. В итоге получим, что $F_2 = 1$ делится на d.

б) Воспользуемся формулой $F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$ (задача 15.3). Положим $m = n + k$. При $m \geqslant k$ получаем НОД(F_m, F_k) = НОД$(F_{m-k-1}F_k + F_{m-k}F_{k+1}, F_k)$ = НОД$(F_{m-k}F_{k+1}, F_k)$ = НОД(F_{m-k}, F_k), поскольку числа F_k и F_{k+1} взаимно простые. Теперь можно воспользоваться результатом задачи 4.11.

15.5. Число F_n делится на F_m тогда и только тогда, когда НОД$(F_n, F_m) = F_m$. С другой стороны, согласно задаче 15.4 НОД$(F_n, F_m) = F_{\text{НОД}(n,m)}$. Таким образом, получаем следующее условие: НОД$(n, m) = m$ (здесь мы пользуемся тем, что $m > 2$). Полученное равенство, в свою очередь, эквивалентно тому, что n делится на m.

15.6. Согласно задаче 15.2 $F_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = x + 1$, а c_1 и c_2 — некоторые константы. Решая квадратное уравнение, получаем $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Константы c_1 и c_2 мы находим, воспользовавшись тем, что $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$.

15.7. Формула Бине (задача 15.6) показывает, что

$$2^{n-1}F_n = \binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 25\binom{n}{5} + 125\binom{n}{7} + \ldots$$

15.8. а) Многочлены $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют указанный вид. Поэтому достаточно проверить, что многочлены указанного вида удовлетворяют указанному рекуррентному соотношению. Но если посмотреть на коэффициенты при степенях x по отдельности, то это рекуррентное соотношение сводится к основному тождеству для биномиальных коэффициентов: $\binom{n-k}{k} = \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$.

б) Непосредственно следует из а), поскольку $F_n = f_n(1)$.

15.9. Ясно, что $(1-x-x^2)(F_1+F_2x+F_3x^2+F_4x^3+\ldots) = F_1+(F_2-F_1)x + (F_3-F_2-F_1)x^2 + (F_4-F_3-F_2)x^3 + \ldots$ При этом $F_1 = 1$, $F_2 - F_1 = 0$, $F_3 - F_2 - F_1 = 0$, $F_4 - F_3 - F_2 = 0$, ...

15.10. Рассмотрим пары остатков от деления на n соседних чисел Фибоначчи F_k и F_{k+1} для $k = 1, 2, \ldots, n^2+1$. Количество различных пар остатков

равно n^2, поэтому среди рассматриваемых пар остатков найдутся две одинаковые пары, т.е. числа $F_k - F_l$ и $F_{k+1} - F_{l+1}$ делятся на n для некоторых чисел $1 \leqslant k < l \leqslant n^2 + 1$. Тогда число $F_{k-1} - F_{l-1} = F_{k+1} - F_{l+1} - (F_k - F_l)$ тоже делится на n и т.д. В конце концов получаем, что числа $F_2 - F_{l-k+2}$ и $F_1 - F_{l-k+1}$ делятся на n. Поэтому $F_{l-k} = F_{l-k+2} - F_{l-k+1} \equiv F_2 - F_1 \equiv 0 \pmod{n}$.

15.11. Пусть $S = F_{k+1} + F_{k+2} + \ldots + F_{k+8}$ — сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи. Достаточно доказать, что $F_{k+9} < S < F_{k+10}$. Первое неравенство очевидно: $S > F_{k+7} + F_{k+8} = F_{k+9}$. Докажем теперь второе неравенство. Ясно, что

$$\begin{aligned} F_{k+10} &= F_{k+8} + F_{k+9} = \\ &= F_{k+8} + F_{k+7} + F_{k+8} = \\ &= F_{k+6} + F_{k+7} + F_{k+7} + F_{k+8} = \\ &= F_{k+5} + F_{k+6} + F_{k+6} + F_{k+7} + F_{k+8} = \\ \ldots\ldots \\ &= F_{k+1} + 2F_{k+2} + F_{k+3} + \ldots + F_{k+8}. \end{aligned}$$

Последнее выражение, очевидно, больше S.

15.12. Равенство $a^2 = b^2 + ab \pm 1$ показывает, что $a \geqslant b$, причём $a = b$ лишь в том случае, когда оба эти числа равны 1. Поэтому будем считать, что $a > b$. Для пары b, $a - b$ тоже выполняется требуемое равенство, поскольку $b^2 - (a-b)b - (a-b)^2 = -(a^2 - ab - b^2)$. Поэтому после нескольких таких замен мы дойдём до пары $(1, 1)$. Обратное преобразование имеет вид $(x, y) \mapsto (x + y, x)$, поэтому из пары $(1, 1)$ мы будем последовательно получать пары (F_{n+1}, F_n) для $n = 2, 3, \ldots$

15.13. Рассматриваемое уравнение эквивалентно уравнению $mn = (n - m)(n - m + 1)$. Пусть $d = \text{НОД}(m, n)$, $n = da$ и $m = db$. После сокращения на d получаем уравнение $abd = (a - b)\big((a - b)d + 1\big)$. Число d взаимно просто с $(a-b)d+1$, а число ab взаимно просто с $a-b$, поэтому $ab = (a-b)d+1$ и $d = a-b$. Подставим в первое уравнение выражение $a = b+d$ и заменим $a - b$ на d. В результате получим $b^2 + bd = d^2 + 1$, т.е. $b^2 + bd - d^2 = 1$. В задаче 15.12 приведено решение уравнения чуть более общего вида, когда в правой части стоит ± 1. Отбросив те решения, которые соответствуют -1, получим $d = F_{2k}$, $b = F_{2k-1}$ и $a = b + d = F_{2k+1}$. Таким образом, $n = F_{2k}F_{2k+1}$ и $m = F_{2k}F_{2k-1}$.

Замечание. *Равенство* $\binom{n}{m-1} = \binom{n-1}{m}$ *эквивалентно равенству* $\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m-2} = \binom{n-1}{m}$.

15.14. а) Применим индукцию по n. При $n = 1$ равенство очевидно. Предположим, что доказано равенство $F_{2n+1}F_{2n-1} = F_{2n}^2 + 1$ для некоторого n. Тогда $F_{2n+2}^2 + 1 = (F_{2n+1} + F_{2n})^2 + 1 = F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n+1}F_{2n-1} = F_{2n+1}(F_{2n+1} + 2F_{2n} + F_{2n-1})$. Остаётся заметить, что $F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n+2} + F_{2n+1} = F_{2n+3}$.

б) Воспользовавшись задачей а), получаем $F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n-1} = (F_{2n+1} - F_{2n-1})^2 = F_{2n}^2 = F_{2n+1}F_{2n-1} - 1$, а значит, $F_{2n+1} + F_{2n-1} + 1 = 3F_{2n+1}F_{2n-1}$.

15.15. Можно считать, что $a \geqslant b$. Согласно задаче 15.14 числа $(a, b) = (F_{2n+1}, F_{2n-1})$, $n \geqslant 1$, обладают требуемым свойством; числа $(a, b) = (1, 1)$ тоже. Покажем, что никакие другие пары натуральных чисел (a, b), где $a \geqslant b$, этим свойством не обладают. Применим индукцию по a. Прежде всего отметим, что если $a = b$, то число $2a^2 + 1$ делится на a^2, поэтому $a = 1$. Предположим, что $a^2 + b^2 + 1 = kab$, где k — натуральное число и $a > 1$. Положим $a_1 = b$ и $b_1 = kb - a = \dfrac{b^2+1}{a}$. Тогда $a_1^2 + b_1^2 + 1 = b^2 + k^2b^2 - 2kab + a^2 + 1 = k^2b^2 - kab = kb(kb - 1) = ka_1b_1$, поэтому числа (a_1, b_1) обладают требуемым свойством. Проверим, что $1 \leqslant b_1 \leqslant a_1 < a$. Действительно, $b_1 = \dfrac{b^2+1}{a} < \dfrac{b^2+1}{b} < b + 1$. Число b_1 целое, поэтому $b_1 \leqslant b = a_1$. Кроме того, $a_1 = b < a$ по условию. Значит, по предположению индукции $b = a_1 = F_{2n+1}$ и $kb - a = b_1 = F_{2n-1}$ для некоторого $n \geqslant 0$ (мы считаем, что $F_{-1} = 1$). Но в таком случае $k = 3$, поэтому $a = kb - b_1 = 3F_{2n+1} - F_{2n-1} = 2F_{2n+1} + F_{2n+1} - F_{2n-1} = F_{2n+1} + F_{2n+1} + F_{2n} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+3}$.

15.16. Формула $F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2 + 1 = 3F_{2n+1}F_{2n-1}$ из задачи 15.14 показывает, что пара (F_{2n-1}, F_{2n+1}) обладает требуемым свойством. Покажем, что никакая другая пара натуральных чисел (a, b), где $a \leqslant b$, этим свойством не обладает. Применим индукцию по b. Прежде всего заметим, что если $a = b$, то a^2+1 делится на a, поэтому $a = b = 1$. Пусть $b > 1$, $a \leqslant b$, $a^2+1 = \lambda b$ и $b^2 + 1 = \mu a$, где λ и μ — целые числа. Тогда $(a^2+1)^2 = \lambda^2 b^2 = \lambda^2(\mu a - 1)$, поэтому $1 \equiv -\lambda^2 \pmod a$, т.е. $\lambda^2 + 1$ делится на a. Кроме того, $ab \geqslant a(a+1) \geqslant a^2 + 1$, поэтому $\lambda \leqslant a < b$. Воспользовавшись предположением индукции, получим $\lambda = F_{2n-1}$ и $a = F_{2n-1}$. Значит, $b = \dfrac{F_{2n+1}^2 + 1}{F_{2n-1}} = \dfrac{3F_{2n+1}F_{2n+1} - F_{2n-1}^2}{F_{2n-1}} = 3F_{2n+1} - F_{2n-1} = F_{2n+1}$.

15.17. В качестве F_{k_1} выберем наибольшее число Фибоначчи, не превосходящее n, т.е. $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$. Тогда $0 \leqslant n - F_{k_1} < F_{k_1+1} - F_{k_1} = F_{k_1-1}$. Поэтому если в качестве F_{k_2} мы выберем наибольшее число Фибоначчи, не превосходящее $n - F_{k_1}$, то $F_{k_2} < F_{k_1-1}$, т.е. $k_2 + 1 < k_1$. Затем выбираем наибольшее число Фибоначчи, не превосходящее $n - F_{k_1} - F_{k_2}$, и т.д.

Единственность представления следует из того, что $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$. Действительно, $F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_m} \leqslant F_{k_1} + F_{k_1-2} + F_{k_2-4} + \ldots$; последнее слагаемое в этой сумме равно F_3 при нечётном k_1 и F_2 при чётном k_1.

Заменим F_3 на $F_4 - 1$, а F_2 — на $F_3 - 1$. После этой замены сумма легко сворачивается и получается $F_{k_1+1} - 1$.

15.18. Положим в задаче 15.3 $k = n - 1$. В результате получим $F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2$. Поэтому если F_{2n-1} делится на простое число p вида $4k + 3$, то оба числа F_{n-1} и F_n делятся на p (задача 31.2). В таком случае число $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ тоже делится на p и т.д. Приходим к противоречию, поскольку $F_1 = 1$ не делится на p.

15.19. Применим индукцию по n. Если $n = 1$, то $b = d = dF_2$ и $a \geqslant 2d = dF_3$. Предположим, что требуемое утверждение доказано для некоторого $n \geqslant 1$. Рассмотрим числа $a > b$, для которых алгоритм Евклида останавливается после $n + 1$ шагов. На первом шаге пара (a, b) заменяется на пару (b, c), где $c = a - qb \leqslant a - b$. Для пары (b, c) алгоритм Евклида останавливается после n шагов, причём НОД$(b, c) =$ НОД$(a, b) = d$. Поэтому согласно предположению индукции $b \geqslant dF_{n+2}$ и $c \geqslant dF_{n+1}$. Следовательно, $a \geqslant b + c \geqslant d(F_{n+2} + F_{n+1}) = dF_{n+3}$.

15.20. а) Воспользуемся тождеством из задачи 15.3: $F_{n+5} = F_{(n-2)+7} = F_{n-3}F_7 + F_{n-2}F_8 = 13F_{n-3} + 21F_{n-2} > 10F_{n-3} + 20F_{n-2} = 10F_n$.

б) Применим индукцию по k. При $k = 1$ достаточно заметить, что $F_7 = 13 > 10$. Предположим, что для данного $k \geqslant 1$ мы уже доказали, что из неравенства $F_{n+1} < 10^k$ следует неравенство $n \leqslant 5k$. Пусть $F_{m+1} < 10^{k+1}$. Тогда согласно задаче а) $10F_{m-4} < F_{m+1} < 10^{k+1}$, поэтому $F_{(m-5)+1} < 10^k$. Следовательно, согласно предположению индукции $m - 5 \leqslant 5k$, т.е. $m \leqslant 5(k + 1)$, что и требовалось.

15.21. Пусть алгоритм Евклида, применённый к паре (a, b), останавливается после n шагов. Тогда согласно задаче 15.19 $b \geqslant F_{n+1}$.

Если количество цифр в десятичной записи числа b равно k, то $b < 10^k$, поэтому $F_{n+1} < 10^k$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 15.20.

15.22. Ответ: F_{n+2}. Пусть искомое число равно x_n. При $n = 1$ есть подмножества $\varnothing$ и $\{1\}$, поэтому $x_1 = 2$. При $n = 2$ есть подмножества $\varnothing$, $\{1\}$ и $\{2\}$, поэтому $x_1 = 2$. Легко проверить, что $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. Действительно, если рассматриваемое подмножество содержит n, то оно не содержит $n - 1$, и никаких других ограничений на него не накладывается. Количество таких подмножеств равно x_{n-2}. Ясно также, что количество рассматриваемых подмножеств, не содержащих n, равно x_{n-1}.

15.23. Ответ: F_{n+1}. Пусть искомое число равно x_n. Ясно, что $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Докажем, что $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. Действительно, количество представлений числа n с первым слагаемым 1 равно x_{n-1}, а с первым слагаемым 2 — x_{n-2}.

15.24. Ответ: F_{n-1}. Пусть искомое число равно x_n. Ясно, что $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$. Докажем, что $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. Первое слагаемое может быть равно 2; количество таких представлений равно x_{n-2}. Первое

слагаемое может быть больше 2. Тогда из него можно вычесть 1 и получить представление числа $n-1$. Поэтому количество таких представлений равно x_{n-1}.

15.25. Ответ: F_n. Пусть искомое число равно x_n. Ясно, что $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$. Докажем, что $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n \geqslant 3$. Действительно, количество представлений с первым слагаемым 1 равно x_{n-1}. Если же первое слагаемое не меньше 3, то из него можно вычесть 2 и получить представление числа $n-2$.

15.26. Рассмотрим последовательность b_n, для которой $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ и $b_{n+2} = nb_{n+1} + b_n$ при $n \geqslant 1$. Возведём в квадрат равенства $b_n = b_{n+2} - nb_{n+1}$ и $b_{n+3} = (n+1)b_{n+2} + b_{n+1}$. Затем, чтобы уничтожить член $b_{n+2}b_{n+1}$, умножим первое из полученных равенств на $n+1$, второе на n и сложим их. В результате получим

$$b_{n+3}^2 = \frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n} b_{n+2}^2 + (n^2+n+1)b_{n+1}^2 - \frac{n+1}{n} b_n^2.$$

Кроме того, $b_3 = 1$. Значит, $a_n = b_n^2$.

15.27. Проверим, что при $0 < k < m-2$ имеет место равенство

$$u_m = u_{k+1}u_{m-k} + u_{k+2}u_{m-k-1} + u_k u_{m-k-2}. \qquad (1)$$

При $k = 1$ это равенство очевидно. Поэтому достаточно доказать, что $u_{k+1}u_{m-k} + u_{k+2}u_{m-k-1} + u_k u_{m-k-2} = u_{k+2}u_{m-k-1} + u_{k+3}u_{m-k-2} + u_{k+1}u_{m-k-3}$. Сократим члены $u_{k+2}u_{m-k-1}$ в обеих частях этого равенства и воспользуемся тем, что $u_{k+1}u_{m-k} = u_{k+1}u_{m-k-2} + u_{k+1}u_{m-k-3}$. После сокращения членов $u_{k+1}u_{m-k-3}$, приходим к очевидному равенству $(u_{k+1} + u_k)u_{m-k-2} = u_{k+3}u_{m-k-2}$.

Положив в равенстве (1) $m = 2n$ и $k = n-1$, получим $u_{2n} - u_{n-1}^2 = 2u_n u_{n+1}$. Положив в равенстве (1) $m = 2n+1$ и $k = n-1$, получим $u_{2n+1} - u_{n+1}^2 = u_n(u_{n-1} + u_{n+2})$.

Глава 16.

Примеры и конструкции

16.1. Наборы чисел

16.1. Можно ли выбрать 10 натуральных чисел так, чтобы ни одно из них не делилось ни на какое другое, но квадрат любого числа делился бы на каждое из чисел?

16.2. а) Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел $k, l \geqslant 2$, для которых $k!l! = n!$ для некоторого натурального n.

б) Докажите, что для каждого натурального числа m существует бесконечно много наборов натуральных чисел $a_1, \ldots, a_m \geqslant 2$, для которых $a_1!a_2!\ldots a_m! = n!$ для некоторого n.

16.3. Докажите, что для любого натурального n существуют n различных натуральных чисел, сумма любых двух из которых делится на их разность.

16.4. а) Конечно или бесконечно множество пар натуральных чисел a, b, обладающих следующим свойством: простые делители чисел a и b одинаковые и простые делители чисел $a+1$ и $b+1$ тоже одинаковые (и при этом $a \neq b$)?

б) Конечно или бесконечно множество пар натуральных чисел a, b, обладающих следующим свойством: простые делители чисел a и $b+1$ одинаковые и простые делители чисел $a+1$ и b тоже одинаковые?

16.5. Укажите попарно различные натуральные числа p, q, r, p_1, q_1, r_1, для которых $p^2 + q^2 + r^2 = p_1^2 + q_1^2 + r_1^2$ и $p^4 + q^4 + r^4 = p_1^4 + q_1^4 + r_1^4$ (*Рамануджан*).

16.2. Бесконечные последовательности

16.6. Для любого ли натурального n из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... можно выделить арифметическую прогрессию длины n?

16.7. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., в которой нет степеней натуральных чисел и никакая сумма нескольких различных членов этой последовательности не является степенью натурального числа?

16.3. Последовательности операций

16.8. Карточки с числами 1, 2, 3, ..., 32 сложены в стопку по порядку. Разрешается снять сверху любое число карточек и вложить их между оставшимися карточками, не меняя порядка карточек в каждой из двух частей, а в остальном произвольно.

а) Докажите, что за 5 таких операций можно разложить карточки в произвольном порядке.

б) Докажите, что за 4 такие операции нельзя разложить карточки в обратном порядке.

16.4. Многочлены и рациональные функции

16.9. Приведите пример рациональной функции $R(x)$ (т.е. отношения двух многочленов), которая отлична от константы и $R(x) = R(1/x)$ и $R(x) = R(1-x)$.

16.10. Существует ли многочлен $f(x, y)$ от двух вещественных переменных, который всюду отличен от нуля, но принимает значения, сколь угодно близкие к нулю?

16.11. Существует ли многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, который при некоторых различных вещественных x принимает оди-

наковые значения, но при всех различных рациональных значениях x принимает различные значения?

16.5. Разные примеры и конструкции

16.12. Можно ли разбить на пары $2n$ человек $2n-1$ способами так, чтобы каждый человек был в паре с каждым другим ровно при одном разбиении?

16.13. а) Имеется кусок цепи из 60 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, …, 60 г (раскованное звено весит тоже 1 г)?

б) Тот же вопрос для цепи из 150 звеньев.

16.14. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдётся остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки.

16.15. Дано n целых чисел $a_1 = 1$, a_2, a_3, …, a_n, причём $a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и сумма всех чисел чётна. Можно ли эти числа разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

16.16. Радиолампа имеет семь контактов, расположенных по кругу и включаемых в штепсель, имеющий семь отверстий. Можно ли так занумеровать контакты лампы и отверстия штепселя, чтобы при любом включении лампы хотя бы один контакт попал на своё место (т.е. в отверстие с тем же номером)?

16.17. а) Имеется 555 гирь весом 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,… 555 г. Разложите их на три равные по весу кучи.

б) Имеется 81 гиря весом 1^2 г, 2^2 г, 3^2 г, …, 81^2 г. Разложите их на три равные по весу кучи.

16.18. Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, записываемые при помощи 2 и 1. Разбить их на два класса так, чтобы при сложении любых двух чисел каждого класса получилось число, в написании которого содержится не менее двух троек.

16.19. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратов со стороной 1. Можно ли в каждом из этих квадратов написать натуральное число так, чтобы в каждом ряду квадратов, параллельном одной

из сторон прямого угла, любое натуральное число встречалось ровно один раз?

Решения

16.1. Да, можно. Пусть $p_1, \ldots, p_{10}$ — различные простые числа, $N = p_1 \ldots p_{10}$. Тогда числа $N_1 = p_1N, \ldots, N_{10} = p_{10}N$ обладают требуемыми свойствами. Действительно, число N_i делится на p_i^2, а число N_j, где $j \neq i$, делится только на p_i, а на p_i^2 оно уже не делится. С другой стороны, N_i^2 делится на N^2, а N^2 делится на N_j.

16.2. а) Положим $k = l! - 1$. Тогда $k!l! = n!$, где $n = l!$.

б) Положим $a_1 = a_2! \ldots a_m! - 1$. Тогда $a_1!a_2! \ldots a_m! = n!$, где $n = a_2! \ldots a_m!$.

16.3. Для $n = 2$ можно взять числа 1 и 2. Пусть числа $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют требуемому условию. Покажем, что тогда числа A, $A + a_1, \ldots, A + a_n$, где $A = a_1 \ldots a_n$, тоже удовлетворяют требуемому условию. Ясно, что $A + a_k + A$ делится на $A + a_k - A = a_k$, поскольку A делится на a_k. Проверим, что $A + a_i + A + a_j$ делится на $A + a_i - (A + a_j) = a_i - a_j$. По условию $a_i + a_j$ делится на $a_i - a_j$. Кроме того, $2a_i = (a_i + a_j) + (a_i - a_j)$ делится на $a_i - a_j$, а значит, $2A$ делится на $a_i - a_j$.

16.4. а) Ответ: бесконечно. Пусть, например, $a = 2^n - 2$ и $b = 2^n(2^n - 2)$. Тогда $a + 1 = 2^n - 1$ и $b + 1 = 2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n - 1)^2$.

б) Ответ: бесконечно. Пусть, например, $a = 2^k + 1$ и $b = a^2 - 1 = 2^{k+1}(2^{k-1} + 1)$. Тогда у чисел a и $b + 1 = a^2$ одинаковые простые делители. У чисел $a + 1 = 2(2^{k-1} + 1)$ и $b = 2^{k+1}(2^{k-1} + 1)$ тоже одинаковые простые делители.

16.5. Воспользуемся тождеством Рамануджана $f_2 = f_4 = 0$ из задачи 32.23. Положив $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ и $d = 6$, получим требуемый набор чисел 11, 6, 5 и 10, 9, 1.

16.6. Ответ: для любого. Числа $\frac{1}{n!}, \frac{2}{n!}, \ldots, \frac{n}{n!}$ образуют арифметическую прогрессию длины n с разностью $\frac{1}{n!}$. Эти числа имеют вид $1/(n!/k)$, где $n!/k$.

16.7. Ответ: существует. Положим $a_1 = 2$, $a_2 = 2^2 3$, $a_3 = 2^2 3^2 5, \ldots, a_n = 2^2 3^2 \ldots p_{n-1}^2 p_n$, где p_n — n-е простое число. Число $a_k + a_{k+l} + \ldots + a_{k+r}$ делится на p_k и не делится на p_k^2, поэтому оно не может быть степенью натурального числа.

16.8. а) После перенумерации карточек можно считать, что карточки сложены в произвольном порядке, а сложить их нужно по порядку. Назовём *беспорядком* пару соседних карточек с номерами i и $i+1$, на которых написаны числа $a_i > a_{i+1}$. Разобьём карточки на блоки, в которых нет беспорядков

(блок может состоять из одной карточки). Любые два блока можно слить так, чтобы получился набор карточек без беспорядков и при этом в каждом блоке порядок карточек не изменился.

Первоначально количество блоков не превосходит 32. Снимем сверху первые 16 блоков и сольём блок с номером i с блоком с номером $i+16$. После этого получится не более 16 упорядоченных блоков. Снимем теперь сверху первые 8 блоков и сольём блок с номером i с блоком с номером $i+8$. После этой (второй) операции останется не более 8 блоков, после третьей операции на более 4 блоков, после четвёртой не более 2 блоков, а после пятой операции карточки будут упорядочены.

б) Если карточки расположены в обратном порядке, то количество беспорядков равно 31. Когда мы снимаем сверху часть карточек, один беспорядок пропадает и в двух наборах карточек вместе будет 30 беспорядков, поэтому в одной части будет не менее 15 беспорядков. Ясно также, что если между двумя карточками, образующими беспорядок, вставить любую карточку, то образуется по крайней мере один беспорядок. Значит, если между ними вставить несколько карточек, то всё равно образуется по крайней мере один беспорядок. Поэтому после первой операции останется не менее 15 беспорядков, после второй не менее 7, после третьей не менее 3, а после четвёртой операции останется не менее одного беспорядка.

16.9. При заменах x на $1-x$ и на $1/x$ из каждого числа можно получить всего шесть различных чисел: x, $1/x$, $1-x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{1-x}$, $\frac{x-1}{x}$. Поэтому функция

$$R(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + (1-x)^2 + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

обладает требуемыми свойствами.

16.10. Да, существует. Пусть, например, $f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$. Если $f(x,y)=0$, то $x=0$ и $xy-1=0$, чего не может быть. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ можно положить $x=\sqrt{\varepsilon}$ и $xy-1=\sqrt{\varepsilon}$, т.е. $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда $f(x,y) = 2\varepsilon$.

16.11. Ответ: существует. Пусть, например, $f(x) = x^3 - 2x$. Эта функция обращается в нуль при $x = 0, \pm\sqrt{2}$. Предположим, что $x = m/n$ и $y = p/q$ — несократимые дроби ($n > 0$ и $q > 0$), причём $f(x) = f(y)$. Тогда

$$q^3 m(m^2 - 2n^2) = n^3 p(p^2 - 2q^2). \qquad (1)$$

Числа p и q взаимно простые, поэтому числа $p^2 - 2q^2$ и q тоже взаимно простые. Следовательно, n^3 делится на q^3. Аналогично q^3 делится на n^3, поэтому $n = q$. В таком случае равенство (1) переписывается в виде $m^3 - 2mq^2 = p^3 - 2pq^2$, т.е. $m^3 - p^3 = 2q^2(m-p)$. При $m \neq p$ получаем $m^2 + pm + p^2 = 2q^2$.

Но в таком случае оба числа m и p чётные, а значит, число q тоже чётное. Это противоречит взаимной простоте чисел p и q.

16.12. Ответ: да, можно. Поместим одного человека в центр окружности, а всех остальных расставим по окружности через равные промежутки. Разбиения на пары будем строить следующим образом. Выберем одного человека, стоящего на окружности, и проведём через него диаметр. Одну пару составляет выбранный человек и человек, стоящий в центре. Остальные пары составляют люди, стоящие в концах хорд, перпендикулярных проведённому диаметру.

16.13. а) Ответ: 3 звена. Выясним, при каком наибольшем n достаточно расковать k звеньев n-звенной цепи, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до n. Если раскована k звеньев, то любое число звеньев от 1 до k можно набрать из них. Но $k+1$ звеньев мы не сможем набрать, если не будет части из $k+1$ или менее звеньев (мы здесь не учитываем раскованные звенья). Наиболее выгодно иметь часть из ровно $k+1$ звеньев. Тогда мы сможем получить любое число звеньев от 1 до $2k+1$. (Иначе мы сможем получить лишь число звеньев от 1 до l_1+k, где $l_1 \leqslant k$.) Затем наиболее выгодно иметь часть из $2(k+1)$ звеньев, затем из $4(k+1)$ звеньев и т.д. Итак, если мы расковали k звеньев, то наиболее выгодна ситуация, когда полученные при этом $k+1$ частей состоят из $k+1$, $2(k+1)$, $4(k+1)$, $8(k+1)$, $\ldots$, $2^k(k+1)$ звеньев (раскованные звенья мы здесь не учитываем). В таком случае можно составить любое число звеньев от 1 до $n = 2^{k+1}(k+1)-1$. Итак, если $2^k k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}(k+1)-1$, то можно обойтись k разрывами и нельзя обойтись $k-1$ разрывами. В частности, если $24 \leqslant n \leqslant 63$, то наименьшее число раскованных звеньев равно 3. Полученные при расковке четыре части цепи должны состоять при этом из 4, 8, 16, 29 звеньев.

б) Ответ: 4 звена. Согласно решению задачи а) для цепи, состоящей из n звеньев, где $64 \leqslant n \leqslant 159$, достаточно расковать 4 звена.

16.14. Ответ: да, можно. Проведём 10 попарно пересекающихся прямых. Пусть маршруты проходят по этим прямым, а остановками служат точки пересечения прямых. Любые 9 маршрутов проходят через все остановки, поскольку через каждую остановку, лежащую на оставшейся прямой, проходит одна из 9 прямых, соответствующих этим маршрутам. Любые 8 маршрутов не проходят через остановку, которая является точкой пересечения двух остальных маршрутов.

16.15. Отнесём к одной группе число a_n, а к другой — число a_{n-1}. Затем будем последовательно относить числа a_{n-2}, a_{n-3}, $\ldots$, a_1 к той группе, в которой сумма чисел меньше (если суммы равные, то число можно относить к любой группе). Пусть $\Delta_k \geqslant 0$ — разность между суммами чисел в группах, полученных после отнесения к ним a_k. Покажем, что $\Delta_k \leqslant a_k$. Действительно, $\Delta_{n-1} = a_n - a_{n-1} \leqslant 2a_{n-1} - a_{n-1} = a_{n-1}$. Ясно также, что если $\Delta_k \leqslant a_k$, то $\Delta_{k-1} = |\Delta_k - a_{k-1}|$ и $-a_{k-1} \leqslant \Delta_k - a_{k-1} \leqslant a_k - a_{k-1} \leqslant 2a_{k-1} - a_{k-1} = a_{k-1}$.

После того как мы распределим по двум группам все числа, получим группы с суммами S_1 и S_2, причём $|S_1 - S_2| \leqslant a_1 = 1$. По условию число $S_1 + S_2$ чётное, поэтому $S_1 = S_2$.

16.16. Ответ: да, можно. Занумеруем контакты лампы по порядку, а отверстия штепселя — в противоположном порядке. Тогда контакт с номером k попадает в отверстие с номером $a - k$, где a — фиксированное число. (Точнее говоря, речь идёт не о самих номерах, а об их остатках от деления на 7, но номера совпадают тогда и только тогда, когда совпадают остатки.) Нам нужно выбрать k так, чтобы числа k и $a - k$ давали одинаковые остатки при делении на 7, т.е. число $2k$ давало такой же остаток, как и a. Легко убедиться, что когда k пробегает все остатки при делении на 7, то $2k$ тоже пробегает все остатки.

16.17. а) Девять гирь весом n, $n+1$, $\ldots$, $n+8$ можно разложить на три равные по весу кучи: 1) n, $n+4$, $n+8$; 2) $n+1$, $n+5$, $n+6$; 3) $n+2$, $n+3$, $n+7$. Это позволяет разложить на три равные по весу кучи гири весом 1, 2, $\ldots$, $549 = 61 \cdot 9$. Оставшиеся шесть гирь весом 550, 551, $\ldots$, 555 можно разложить на три равные по весу кучи следующим образом: 1) 550 и 555; 2) 551 и 554; 3) 552 и 553.

б) Разложим девять гирь весом n^2, $(n+1)^2$, $\ldots$, $(n+8)^2$ на три кучи следующим образом: 1) n^2, $(n+5)^2$, $(n+7)^2$; 2) $(n+1)^2$, $(n+3)^2$, $(n+8)^2$; 3) $(n+2)^2$, $(n+4)^2$, $(n+6)^2$. Первые две кучи весят одинаково, а вес третьей кучи на 18 г меньше. Поэтому 27 гирь весом n^2, $(n+1)^2$, $\ldots$, $(n+26)^2$ можно разложить на 9 куч так, что 6 куч будут одного веса, а ещё 3 кучи будут весить каждая на 18 меньше, чем первые 6. Из этих девяти куч можно сложить 3 равные по весу кучи. Таким образом, $27k$ гирь весом 1^2, 2^2, 3^2, $\ldots$, $(27k)^2$ можно разложить на 3 равные по весу кучи. При $k = 3$ получаем требуемое утверждение.

16.18. Отнесём к первому классу все числа, в записи которых встречается чётное число двоек, а ко второму классу — все числа, в записи которых встречается нечётное число двоек. Два числа одного класса либо содержат одинаковое число двоек, либо в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом. Если два числа различны, то на каком-то месте в одном числе стоит 1, а в другом числе стоит 2; если же двоек у этих чисел одинаковое количество, то таких мест по крайней мере два. Если в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом, то по крайней мере двум двойкам в записи первого числа соответствуют единицы в записи второго числа.

16.19. Да, можно. Пусть A — квадрат со стороной 2^n, который разбит на квадраты со стороной 1, и в каждом из них написано натуральное число. Сопоставим ему квадрат

$A+2^n$	A
A	$A+2^n$

со стороной 2^{n+1}. Если мы

начнём с квадрата со стороной 1, в котором написано число 1, то последовательно заполним весь прямой угол. Ясно, что при этом в каждом квадрате со стороной 2^n в каждом ряду квадратов со стороной 1, параллельном одной из сторон прямого угла, любое число от 1 до 2^n встречается ровно один раз.

Глава 17.

Принцип Дирихле. Правило крайнего

17.1. Остатки от деления

17.1. Докажите, что десятичная запись рационального числа является периодической дробью.

По поводу обратного утверждения см. задачу 9.3.

17.2. Докажите, что если натуральные числа a и b взаимно простые, то $a^n - 1$ делится на b для некоторого натурального n.

17.3. Пусть $p < q$ — натуральные числа, причём q не делится на 2 и на 5. Согласно задаче 17.2 можно выбрать n так, что $10^n - 1$ делится на q. Докажите, что p/q — чисто периодическая дробь, длина периода которой делится на n.

* * *

17.4. Докажите, что из любых ста целых чисел можно выбрать одно или несколько чисел так, чтобы их сумма оканчивалась двумя нулями.

17.5. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ выбрано более $(n+1)/2$ различных чисел. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

17.6. Простые числа $a_1, a_2, \ldots, a_p$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию и $a_1 > p$. Докажите, что если p — простое число, то разность прогрессии делится на p.

17.7. Пусть $n > 1$ — натуральное число, e — наименьшее целое число, превосходящее $\sqrt{n}$. Докажите, что для любого натурального числа a, взаимно простого с n, можно выбрать натуральные числа x и y, не превосходящие $e - 1$, так, что $ay \equiv \pm x \pmod{n}$.

См. также задачу 15.10.

17.2. Последовательности

17.8. Докажите, что любая последовательность из $mn + 1$ попарно различных чисел содержит либо возрастающую последовательность из $m + 1$ чисел, либо убывающую последовательность из $n + 1$ чисел.

17.3. Разные задачи

17.9. Докажите, что среди любых $n \geqslant 2$ человек найдутся два человека, имеющих одинаковое число знакомых среди этих n человек.

17.10. Числа $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ различны между собой, и числа $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, ..., $\left[\frac{M}{a}\right]$ тоже различны между собой. Найдите все такие a.

17.4. Приближения иррациональных чисел рациональными

17.11. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что существует бесконечно много пар взаимно простых чисел x, y, для которых $|x/y - \alpha| < 1/y^2$.

17.12. Пусть α — положительное число. Докажите, что для любого числа $C > 1$ можно выбрать натуральное число x и целое число y так, что $x < C$ и $|x\alpha - y| \leqslant \frac{1}{C}$.

17.13. а) Пусть α — иррациональное число. Докажите, что для любых чисел $a < b$ можно выбрать целые числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$.

б) Докажите, что числа m и n можно выбрать натуральными.

17.5. Правило крайнего

Правило крайнего заключается в том, чтобы рассмотреть рассмотреть тот элемент, для которого некая величина имеет наибольшее или (наименьшее) значение. Правило крайнего помогает при решении многих задач.

17.14. а) На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырёх соседних чисел — верхнего, нижнего, левого и правого. Докажите, что все числа на доске равны между собой.

б) В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что найдётся клетка, в которой написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырёх из восьми граничащих с ней клеток.

17.15. На клетчатой бумаге написана таблица, причём в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырёх чисел, стоящих в соседних клетках. Все числа в таблице различны. Докажите, что наибольшее число стоит с края (т.е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

17.16. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на 2 чашки весов, по 6 гирь на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют один и тот же вес.

17.17. а) Из чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 199, 200$ произвольно выбрали 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

б) Из двухсот чисел: $1, 2, 3, \ldots, 199, 200$ выбрали одно число, меньшее 16, и ещё 99 чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдётся хотя бы 2 таких, что одно из них делится на другое.

17.18. Из одной бактерии получилось n бактерий следующим образом. Сначала бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и т.д. Докажите, что для любого натурального числа $a \leqslant n/2$ в некоторый момент существовала бактерия, число потомков которой среди получившихся в конце n бактерий не меньше a и не больше $2a - 1$.

17.19. Взяли три числа x, y, z. Вычислили абсолютные величины попарных разностей $x_1 = |x - y|$, $y_1 = |y - z|$, $z_1 = |z - x|$. Тем же спо-

собом по числам x_1, y_1, z_1 построили числа x_2, y_2, z_2 и т.д. Оказалось, что при некотором n $x_n = x$, $y_n = y$, $z_n = z$. Зная, что $x = 1$, найти y и z.

17.20. Набору чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n сопоставляется набор $b_1 = \dfrac{a_1+a_2}{2}$, $b_2 = \dfrac{a_2+a_3}{2}$, $\ldots$, $b_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}+a_n}{2}$, $b_n = \dfrac{a_n+a_1}{2}$. Затем с полученным набором чисел производится аналогичная операция и т.д. Докажите, что если при этом всегда будут получаться наборы целых чисел, то $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Решения

17.1. Достаточно рассмотреть рациональные числа вида p/q, где $1 \leqslant p < q$. В таком случае цифры десятичной записи $p/q = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ находятся следующим образом: $a_k = \left[\dfrac{10^k p}{q}\right] - 10\left[\dfrac{10^{k-1}p}{q}\right]$. Пусть $10^{k-1}p = Mq + r_k$, где r_k — остаток от деления $10^{k-1}p$ на q. Тогда $a_k = 10M + \left[\dfrac{10r_k}{q}\right] - 10M = \left[\dfrac{10r_k}{q}\right]$. Среди чисел r_1, $\ldots$, r_{q+1} есть два одинаковых: $r_i = r_{i+n}$. Но r_{k+1} — остаток от деления $10r_k$ на q. Поэтому $r_{i+1} = r_{i+n+1}$ и т.д. Значит, последовательность цифр a_k тоже периодически повторяется (после номера i).

17.2. Два из чисел a, a^2, $\ldots$, a^{b+1} дают одинаковые остатки при делении на b. Пусть это будут числа a^k и a^l, где $k > l$. Тогда $a^k - a^l = a^l(a^{k-l} - 1)$ делится на b. Числа a^l и b взаимно простые, поэтому $a^{k-l} - 1$ делится на b.

17.3. Пусть $10^n - 1 = rq$. Тогда $\dfrac{p}{q} = \dfrac{rp}{rq} = \dfrac{rp}{10^n - 1} = rp\cdot 10^{-n} + rp\cdot 10^{-2n} + rp\cdot 10^{-3n} + \ldots$. При этом $rp < rq = 10^{n-1}$.

17.4. Пусть a_1, $\ldots$, a_{100} — данные числа. Предположим, что ни одно из чисел $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ не делится на 100. Тогда при делении на 100 они могут давать только 99 разных остатков: 1, 2, $\ldots$, 99. Поэтому два числа S_n и S_m, $n > m$, дают одинаковые остатки при делении на 100. Значит, число $S_n - S_m = a_{m+1} + \ldots + a_n$ делится на 100.

17.5. Сопоставим каждому выбранному числу его наибольший нечётный делитель. Количество нечётных чисел, не превосходящих n, равно $n/2$ при чётном n и $(n+1)/2$ при нечётном n. Поэтому у двух из выбранных чисел наибольший нечётный делитель один и тот же. Большее из этих чисел делится на меньшее.

17.6. Рассмотрим остатки от деления чисел a_1, $\ldots$, a_p на p. Эти числа простые и все они строго больше p, поэтому ни одно из них не делится на p.

Таким образом, мы получили p различных остатков, отличных от p. Следовательно, если два числа a_i и a_j, дающие одинаковые остатки при делении на p. Поэтому их разность делится на p. Но $a_i - a_j = (i-j)d$, где d — разность прогрессии. Число $|i-j|$ строго меньше p, поэтому на p должно делиться число d.

17.7. Рассмотрим e^2 чисел $ay+x$, где $x, y = 0, 1, 2, \ldots, e-1$. Так как $e^2 > n$, среди этих чисел найдутся числа $ay_1 + x_1$ и $ay_2 + x_2$, дающие одинаковые остатки при делении на n. Следовательно, $a(y_1 - y_2) \equiv x_2 - x_1 \pmod{n}$. Числа $|y_1 - y_2|$ и $|x_1 - x_2|$ не превосходят $e-1$, поэтому они могут делиться на n лишь в том случае, когда они равны 0. По условию число a взаимно просто с n. Поэтому $x_1 = x_2$ тогда и только тогда, когда $y_1 = y_2$. Следовательно, $|y_1 - y_2| \neq 0$ и $|x_1 - x_2| \neq 0$. Поэтому числа $x = |x_1 - x_2|$ и $y = |y_1 - y_2|$ обладают требуемым свойством.

17.8. Сопоставим члену a_k данной последовательности два числа x_k и y_k, где x_k — наибольшая длина возрастающей последовательности, начинающейся с a_k, y_k — наибольшая длина убывающей последовательности, начинающейся с a_k. Предположим, что $x_k \leqslant m$ и $y_k \leqslant n$ для всех k. Тогда количество всех различных пар (x_k, y_k) не превосходит mn. Поэтому $x_k = x_l$ и $y_k = y_l$ для некоторых номеров $k \neq l$. Но этого не может быть. Действительно, пусть для определённости $k < l$. Тогда если $a_k < a_l$, то $x_k > x_l$, а если $a_k > a_l$, то $y_k > y_l$.

17.9. Сопоставим каждому из данных n человек число, равное количеству его знакомых среди этих n человек. Это число может принимать одно из n значений: $0, 1, \ldots, n-1$. Но если у кого-то вообще нет знакомых, то никто не может быть знаком со всеми. Наоборот, если кто-то знаком со всеми, то нет человека, который ни с кем не знаком. Таким образом, количество знакомых принимает одно из не более чем $n-1$ значений. Поэтому для каких-то двух человек эти значения одинаковы.

17.10. Ответ: $\dfrac{N-1}{N} \leqslant |a| \leqslant \dfrac{M}{M-1}$.

Числа $[x]$ и $[y]$ различны тогда и только тогда, когда числа $[-x]$ и $[-y]$ различны. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $a > 0$. Если $a < \dfrac{N-1}{N}$, то среди чисел $[a], [2a], \ldots, [Na]$ есть совпадающие, поскольку эти N чисел содержатся среди $N-1$ чисел $0, 1, \ldots, N-2$. Поэтому $a \geqslant \dfrac{N-1}{N}$. Те же самые рассуждения для числа $1/a$ показывают, что $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{M-1}{M}$, т.е. $a \leqslant \dfrac{M}{M-1}$.

Покажем, что если $\dfrac{N-1}{N} \leqslant a \leqslant \dfrac{M}{M-1}$, то все числа $[a]$, $[2a]$, $\ldots$, $[Na]$ различны. Действительно, если $a \geqslant 1$, то вообще все числа $[a]$, $[2a]$, $[3a]$,

... различны, а если $a < 1$, то $1-\frac{1}{N} \leqslant a < 1$, $2-\frac{2}{N} \leqslant a < 2, \ldots, N-1 \leqslant a < N$, поэтому $[ka] = k-1$ для $k = 1, 2, \ldots, N$. Для чисел $\left[\frac{1}{a}\right], \left[\frac{2}{a}\right], \ldots, \left[\frac{M}{a}\right]$ рассуждения аналогичны.

17.11. Фиксируем натуральное число n. Дробные части чисел $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$ лежат в полуоткрытом интервале $[0, 1)$, поэтому по крайней мере две из них попадают в один и тот же полуоткрытый интервал $[k/n, (k+1)/n)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Это означает, что

$$|p_1\alpha - [p_1\alpha] - (p_2\alpha - [p_2\alpha])| < 1/n$$

для некоторых $p_1, p_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_1 > p_2$. Положим $y = p_1 - p_2$ и $x = [p_2\alpha] - [p_1\alpha]$. Тогда $|y\alpha - x| < 1/n$. Числа x и y здесь можно считать взаимно простыми, поскольку после деления на НОД(x, y) неравенство сохранится. Ясно также, что $0 < y < n$, поэтому $|x/y - \alpha| < \frac{1}{ny} < \frac{1}{y^2}$.

Выберем теперь натуральное число n_1 так, что $|x/y - \alpha| > 1/n_1$. Описанная выше конструкция даёт пару целых чисел x_1, y_1, для которых $|x_1/y_1 - \alpha| < \frac{1}{n_1 y_1} < |x/y - \alpha|$. Так можно получить бесконечно много различных пар чисел x, y.

17.12. Предположим сначала, что число C целое. Рассмотрим число 1 и числа $k\alpha - [k\alpha]$ для $k = 0, 1, \ldots, C-1$. Эти $C+1$ чисел лежат на отрезке $[0, 1]$, поэтому расстояние между какими-то двумя из них не превосходит $1/C$. Если это окажутся числа $k_1\alpha - [k_1\alpha]$ и $k_2\alpha - [k_2\alpha]$, где $k_1 < k_2$, то положим $x = k_2 - k_1$ и $y = [k_2\alpha] - [k_1\alpha]$. Тогда $0 < x < C$ и

$$|x\alpha - y| = |k_1\alpha - [k_1\alpha] - (k_2\alpha - [k_2\alpha])| \leqslant \frac{1}{C}.$$

Если же это окажутся числа $k\alpha - [k\alpha]$ и 1, то положим $x = k$ и $y = [k\alpha] + 1$. Тогда

$$|x\alpha - y| = |k\alpha - [k\alpha] - 1| \leqslant \frac{1}{C}.$$

Из этого, в частности, следует, что $x \neq 0$.

Пусть теперь число C не целое. Рассмотрим целое число $C' = [C] + 1$. Как только что было доказано, можно выбрать натуральное число x и целое число y так, что $x < C'$ и $|x\alpha - y| \leqslant \frac{1}{C'} < \frac{1}{C}$. Число C не целое, поэтому любое целое число, не превосходящее C', не превосходит и C. Следовательно, $x < C$.

17.13. а) Пусть $\Delta = b - a$. Для каждого целого числа m_1 можно выбрать целое число n_1 так, что $0 \leqslant m_1\alpha - n_1 \leqslant 1$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше Δ. Пусть количество этих отрезков равно k. Тогда среди чисел $m_1\alpha - n_1, \ldots, m_{k+1}\alpha - n_{k+1}$ есть два числа, попадающих в один и тот же отрезок. Вычтем из большего числа меньшее:

$m_p\alpha - n_p - (m_q\alpha - n_q) = t$. Ясно, что $0 \leqslant t < \Delta$. Более того, $t \neq 0$, поскольку иначе $\alpha = \dfrac{n_p - n_q}{m_p - m_q}$ — рациональное число.

Рассмотрим числа вида Nt, где N — целое число. Каждое из этих чисел имеет вид $m\alpha - n$. А из того, что $0 < t < \Delta$, следует, что хотя бы одно из этих чисел расположено строго между a и b.

б) Нужно доказать, что число t можно выбрать как вида $M\alpha - N$, так и вида $-M\alpha + N$, где M и N — натуральные числа. Пусть $t = M\alpha - N$. Между 0 и t есть бесконечно много чисел вида $m\alpha - n$, m и n — целые. Предположим, что у всех этих чисел $m > 0$. Тогда для одного из них $m > M$, а в таком случае число $t = M\alpha - N - (m\alpha - n)$ искомое. Если же $t = -M\alpha + N$, то рассуждения аналогичны.

17.14. а) Среди написанных чисел можно выбрать наименьшее. Действительно, сначала возьмём произвольное написанное число n. Если есть число, которое меньше выбранного числа, то на следующем шаге выберем его и т.д. Этот процесс конечен, потому что всего мы можем выбрать не более n различных чисел.

Пусть m — наименьшее из написанных чисел, a, b, c, d — соседние с ним числа. Тогда $a \geqslant m$, $b \geqslant m$, $d \geqslant m$ и $a + b + c + d = 4m$. Поэтому $a = b = c = d = m$.

Из любого поля шахматной доски можно попасть в любое другое поле, перемещаясь сначала по горизонтали, а затем по вертикали. Поэтому на всех полях написано одно и то же число m.

б) Рассмотрим квадрат, состоящий из 16 клеток, и вырежем из него 4 угловые клетки. Среди оставшихся 12 клеток выберем ту, в которой стоит наименьшее число (если таких клеток несколько, то выбираем любую из них). Выбранная клетка обладает требуемым свойством.

17.15. Предположим, что наибольшее число a стоит не с края. Тогда у него в таблице есть все четыре соседних числа a_1, a_2, a_3, a_4 и при этом $a = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4$. Но $a > a_1$, $a > a_2$, $a > a_3$, $a > a_4$. Поэтому $a = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4$. Приходим к противоречию.

17.16. Сначала докажем, что все гири одновременно имеют либо чётный, либо нечётный вес. Пусть 12 гирь разложены на две чашки весов по 6 гирь так, что наступило равновесие. Предположим, что отложена гиря весом a г., а одна из гирь, лежащих на чашках, весит b г., причём числа a и b разной чётности. Заменим гирю a гирей b и снова разложим гири так, чтобы наступило равновесие. Вес гирь на каждой чашке весов изменился на $\frac{1}{2}|a - b|$, поэтому число $|a - b|$ чётно.

Предположим, что не все гири одинаковые. Вычтем из каждой гири вес наименьшей гири. В результате получим набор гирь, которые снова удовлетворяют условию задачи (по крайней мере одна из полученных гирь имеет

нулевой вес). Все новые гири имеют чётный вес, строго меньший веса первоначальных гирь. Поделив вес каждой гири пополам (в том числе и гири с нулевым весом), мы снова получим набор гирь, удовлетворяющий условию задачи. Если при этом мы не получим гири нечётного веса, то снова поделим веса всех гирь пополам и т.д. В конце концов получим систему гирь, которая удовлетворяет условию задачи и в которой есть как гири чётного (нулевого) веса, так и гири нечётного веса. Но мы уже доказали, что такого быть не может.

17.17. а) Рассмотрим наибольшие нечётные делители выбранных чисел. У чисел от 1 до 200 есть ровно 100 различных наибольших нечётных делителей (числа 1, 3, ..., 199). Итак, два из выбранных чисел имеют одинаковые наибольшие нечётные делители. Это означает, что два выбранных числа отличаются только тем, что множитель 2 входит в них в разных степенях. Большее из них делится на меньшее.

б) Предположим, что из чисел 1, 2, 3, ..., 199, 200 мы выбрали 100 чисел так, что ни одно из них не делится на другое. Достаточно доказать, что среди выбранных чисел нет чисел, меньших 16. Рассмотрим наибольшие нечётные делители всех выбранных чисел. Если наибольшие нечётные делители двух чисел совпадают, то одно из них делится на другое. Поэтому наибольшие нечётные делители выбранных чисел — это в точности все числа 1, 3, 5, ..., 199. В частности, среди выбранных чисел есть числа с наибольшими нечётными делителями 1, 3, 9, 27 и 81. Ни одно из выбранных чисел не делится на другое, поэтому выбранное число с наибольшим нечётным делителем 27 делится на 2, с наибольшим нечётным делителем 9 делится на 2^2, с наибольшим нечётным делителем 3 делится на 2^3, с наибольшим нечётным делителем 1 делится на 2^4. Следовательно, среди выбранных чисел нет чисел 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 12. Далее, рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 5, 15 и 45, убеждаемся, что среди выбранных чисел нет чисел 5, 10 и 15; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 7, 21 и 63, убеждаемся, что нет чисел 7 и 14; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 11 и 33, убеждаемся, что нет числа 11; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 13 и 39, убеждаемся, что нет числа 13.

17.18. Пусть некая бактерия, из которой в конце получилось m бактерий, разделилась на две бактерии. Из этих двух «сестёр» в конце получилось m' и m'' бактерий, причём $m'+m''=m$. Значит, одно из чисел m' и m'' не меньше $m/2$. Будем каждый раз выбирать ту из бактерий, у которой не меньше потомков, чем у её «сестры». В результате получим последовательность $n = a_1 > a_2 > \ldots > a_k = 1$, причём $a_i \geqslant a_{i-1}/2$. Выберем номер i так, что $a_i \geqslant 2a > a_{i+1}$. Тогда $a_{i+1} \geqslant a_i/2 \geqslant a$, а значит, $a \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a-1$.

17.19. Ответ: $y = z = 0$.

Числа x_n, y_n, z_n неотрицательны, поэтому числа x, y, z тоже неотрица-

тельны. Если бы все числа x, y, z были положительны, то наибольшее из чисел x_1, y_1, z_1 было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z, а тогда и наибольшее из чисел x_n, y_n, z_n было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z. Поэтому среди чисел x, y, z есть 0. Аналогично доказывается, что среди чисел x_1, y_1, z_1 есть 0 (при $n = 1$ доказывать ничего не нужно, потому что тогда $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$). Это означает, что два из чисел x, y, z равны. В итоге получаем, что неупорядоченный набор чисел x, y, z может быть равен либо 0, 0, 1, либо 0, 1, 1. Очевидно, что второй набор не обладает требуемым свойством.

17.20. Предположим, что не все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны. Пусть наибольшее из этих чисел равно N, причём оно встречается среди них ровно k раз. Тогда в новой последовательности нет чисел, превосходящих N, причём число N встречается не более $k - 1$ раз. Поэтому после нескольких операций наибольшее значение уменьшится. Ясно также, что наибольшее значение не может стать меньше наименьшего значения чисел исходной последовательности. Поэтому после конечного числа операций все числа становятся равными.

Пусть набор равных чисел получается из набора $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, $\ldots$, $x_{n-1} = x_1$, $x_n = x_2$. Если n нечётно, то все числа $x_1, \ldots, x_n$ равны. Если n чётно, то $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = a$ и $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = b$. Остаётся проверить, что если $a \neq b$, то такой набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нельзя получить ни из какого набора $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Действительно, пусть $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2} = \ldots = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} = a$ и $\frac{y_3 + y_4}{2} = \frac{y_4 + y_5}{2} = \ldots = \frac{y_n + y_1}{2} = b$. Тогда $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 2na$ и $y_2 + y_3 + \ldots + y_n + y_1 = 2nb$. Поэтому $a = b$.

Глава 18.

Инварианты и полуинварианты

18.1. Остатки от деления

18.1. На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидели 44 чижа (на каждом дереве по одному). Время от времени какие-то два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?

18.2. С тройкой чисел (a, b, c) разрешается проделать следующую операцию: одно число увеличить на 2, а два других одновременно с этим уменьшить на 1. Можно ли с помощью таких операций из тройки $(13, 15, 17)$ получить тройку с двумя нулями?

18.3. В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... каждый член начиная с седьмого равен последней цифре шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности никогда не встретятся подряд шесть чисел 0, 1, 0, 1, 0, 1.

18.2. Полуинварианты

18.4. Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ и $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$. Докажите, что

$$\sum a_i b_{n-i} \leqslant \sum a_i b_{\sigma(i)} \leqslant \sum a_i b_i.$$

18.5. N солдат выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «налево» все одновременно повернулись на 90°, но некоторые повернулись налево, а другие направо. Ровно через секунду каждый, кто оказался теперь лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» — на 180°. Ещё через секунду каждый, кто оказался теперь лицом к лицу со своим соседом, поворачивается на 180°, и т.д.

а) Докажите, что каждый солдат повернётся «кругом» не более $N-1$ раз.

б) Докажите, что движение в строю не может продолжаться более $N-1$ секунд.

18.6. Целые числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, сумма которых положительна, расставлены по окружности. Если $x_i < 0$, то числа x_{i-1}, x_i, x_{i+1} разрешается заменить на $x_{i-1} + x_i$, $-x_i$, $x_{i+1} + x_i$ (подразумевается, что $x_{i+5} + x_i$). Докажите, что после конечного числа таких операций все числа станут неотрицательными.

18.3. Чётность перестановки

Здесь мы рассматриваем понятие чётности перестановки чисел и доказываем, что это понятие определено корректно (задача 18.7). Понятие чётности перестановки применяется к анализу игры «15» (задача 18.8). Затем мы доказываем, что любая перестановка является композицией транспозиций (задача 18.9) и приводим другие подходы к доказательству корректности определения чётности перестановки (задачи 18.10 и 18.11).

Транспозицией называют перестановку двух каких-то чисел в последовательности $a_1, \ldots, a_n$, т.е. при транспозиции последовательность $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ заменяется на $a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n$.

18.7. Пусть $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Предположим, что эта перестановка двумя разными способами получена посредством нескольких транспозиций: один раз m_1

транспозициями, другой раз m_2 транспозициями. Докажите, что m_1 и m_2 — числа одной чётности, т.е. число $m_1 - m_2$ делится на 2.

18.8. *Игра «15»* заключается в следующем. В квадрате со стороной 4 расположено 15 фишек — квадратов со стороной 1. На фишках написаны числа от 1 до 15:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

. Любую фишку, граничащую (по стороне) со свободной клеткой, разрешается переместить на свободную клетку (освободив тем самым другую клетку). Можно ли поменять местами фишки 14 и 15, причём так, чтобы свободная клетка осталась на прежнем месте?

18.9. Докажите, что любую перестановку чисел 1, …, n можно получить из набора 1, …, n, сделав несколько транспозиций.

Перестановку чисел 1, …, n называют *чётной*, если её можно получить, сделав чётное число транспозиций; в противном случае её называют *нечётной*. Задача 18.7 показывает, что это определение корректно.

18.10. Пусть σ — некоторая перестановка чисел 1, …, n. Назовём *инверсией* любую пару чисел $i < j$, для которой $\sigma(i) > \sigma(j)$. Докажите, что чётность перестановки совпадает с чётностью числа всех инверсий.

Каждую перестановку σ чисел 1, …, n можно представить в виде *произведения циклов* следующим образом. Пусть $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, …, $\sigma(a_k) = a_1$ и числа a_1, a_2, …, a_k попарно различны. Тогда числа a_1, a_2, …, a_k переставляются по циклу, и мы обозначим этот цикл $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Отметим, что $(a_2, a_3, \ldots, a_k, a_1)$ — тот же самый цикл. Если $\sigma(a_1) = a_1$, то соответствующий цикл обозначаем (a_1). Выберем теперь произвольное число от 1 до n, не вошедшее в первый цикл, и аналогично построим цикл, включающий это число. Продолжая действовать таким образом, мы сопоставим перестановке набор непересекающихся циклов. Например, перестановке $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 3$ соответствует произведение циклов $(12)(34)$.

18.11. а) Пусть перестановка σ чисел 1, …, n представляет собой произведение m циклов. Сделаем после этой перестановки транспозицию каких-либо двух чисел. Докажите, что в результате получится перестановка, которая представляет собой произведение $m \pm 1$ циклов.

б) Докажите, что перестановка чётна тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётно.

Решения

18.1. Ответ: не смогут. Занумеруем деревья по часовой стрелке. Пусть в какой-то момент времени на k-м дереве сидит n_k чижей. Рассмотрим сумму $n_1 + 2n_2 + \ldots + 44n_{44}$. Если один чиж перелетает на соседнее дерево по часовой стрелке, то эта сумма либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 43, а если против часовой стрелки, то либо уменьшается на 1, либо увеличивается на 43. Поэтому при одновременных перелётах чижей остаток от деления рассматриваемой суммы на 44 не изменяется. Сначала сумма равна $1 + 2 + \ldots + 44 = \frac{44 \cdot 45}{2} = 990$; остаток от деления на 44 равен 22. А если бы чижи собрались на одном дереве, то сумма делилась бы на 44. Поэтому чижи не смогут собраться на одном дереве.

Замечание. *То же самое решение годится для произвольного чётного числа деревьев и чижей. Для нечётного числа легко строится пример, показывающий, что чижи могут собраться на одном дереве.*

18.2. Ответ: нельзя. При указанной операции первые два числа (a, b) заменяются либо на $(a-1, b-1)$, либо на $(a+2, b-1)$, либо на $(a-1, b+2)$. Во всех трёх случаях остаток от деления числа $a - b$ на 3 не изменяется. Числа 13 и 15 дают разные остатки при делении на 3. Поэтому из тройки $(13, 15, 17)$ нельзя получить тройку, состоящую из двух нулей и числа $45 = 13 + 15 + 17$.

18.3. Будем заменять шестёрку чисел $(x_1, \ldots, x_6)$ на шестёрку чисел $(x_2, x_3, \ldots, x_6, x_7)$, где x_7 — последняя цифра числа $x_1 + \ldots + x_6$. Покажем, что при такой операции последняя цифра числа $S(x_1, \ldots, x_6) = 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6)$ не изменяется. Действительно, $S(x_2, \ldots, x_7) - S(x_1, \ldots, x_6) = 12x_7 - 2(x_1 + \ldots + x_6) \equiv 2\bigl(x - 7 - (x_1 + \ldots + x_6)\bigr) \equiv 0 \pmod{10}$.

Последние цифры у чисел $S(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 18$ и $S(0, 1, 0, 1, 0, 1) = 24$ разные, поэтому в рассматриваемой последовательности не могут встретиться подряд шесть чисел 0, 1, 0, 1, 0, 1.

18.4. Предположим сначала, что σ и τ — две перестановки чисел $1, \ldots, n$, для которых $\sigma(k) = \tau(k+1)$, $\sigma(k+1) = \tau(k)$ и $\sigma(i) = \tau(i)$ при $i \neq k$, $k+1$. Тогда если $\sigma(k+1) > \sigma(k)$, то $\sum a_i b_{\sigma(i)} - \sum a_i b_{\tau(i)} = (a_{k+1} - a_k)(b_{\sigma(k+1)} - b_{\sigma(k)}) \geqslant 0$.

Возьмём произвольную перестановку σ. Если $\sigma(k+1) > \sigma(k)$, то поменяем местами числа $\sigma(k+1)$ и $\sigma(k)$. В результате получим новую перестановку. Применим к ней ту же самую операцию и т.д. После нескольких таких операций получим перестановку $n, n-1, \ldots, 1$. Это доказывает неравенство $\sum a_i b_{n-i} \leqslant \sum a_i b_{\sigma(i)}$. Если же мы будем менять местами $\sigma(k+1)$ и $\sigma(k)$ в том случае, когда $\sigma(k+1) < \sigma(k)$, то после нескольких таких операций получим перестановку $1, 2, \ldots, n$. Это доказывает неравенство $\sum a_i b_{\sigma(i)} \leqslant \sum a_i b_i$.

18.5. а) Пусть m — количество всех солдат, повернувшихся лицом к данному солдату. Тогда этот солдат повернётся «кругом» не более m раз. Действительно, в те моменты, когда солдат не поворачивается, число m не изменяется, а в те моменты, когда солдат поворачивается, число m уменьшается на 1. Остаётся заметить, что $m \leqslant N - 1$.

б) Применим индукцию по N. При $N = 1$ требуемое утверждение верно. Пусть $N \geqslant 2$. Рассмотрим двух крайних справа солдат — самого крайнего и его соседа. Если крайний справа солдат смотрит направо, то он никогда поворачиваться не будет, и он и его сосед никогда не будут стоять лицом друг к другу. В этом случае оценка времени движения строя такая же, как в случае строя из $N-1$ солдат. Если крайний справа солдат смотрит налево, а его сосед стоит лицом к нему, то оба эти солдата должны повернуться «кругом». После этого крайний справа солдат будет смотреть направо. В этом случае к оценке времени движения строя из $N - 1$ солдат добавляется одна секунда. Остаётся разобрать случай, когда оба крайних справа солдата смотрят налево.

Будем считать, что солдаты, стоящие лицом друг к другу, не поворачиваются, а меняются местами (каждый делает шаг вперёд); время движения строя от этого не изменится. Теперь оба крайних солдата будут либо стоять неподвижно, либо шагать вперёд (по направлению к левому краю шеренги). При этом движение «предпоследнего» солдата (т.е. того, который первоначально был предпоследним справа) не зависит от движения «последнего» солдата. Кроме того, «последний» солдат отстаёт от «предпоследнего» не более, чем на 2 шага (т.е. между ними не может быть более одного солдата). Значит, время движения «предпоследнего» солдата такое же, как время движения строя из $N - 1$ солдат. После того как «предпоследний» солдат остановится, «последний» солдат может сделать один шаг. А уже после этого никакого движения не будет: все солдаты позади «предпоследнего» смотрят направо, а впереди — налево.

18.6. Прежде всего заметим, что при указанных операциях сумма чисел не изменяется. Для каждого набора $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ положим $F(x) = \sum_{i=1}^{5}(x_i - x_{i+2})^2$. Пусть $x_i < 0$ и $Y = (x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, -x_i, x_{i+1} + x_i, x_{i+2})$. Несложные вычисления показывают, что

$$F(X) - F(Y) = -2x_i(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) > 0,$$

т.е. $F(Y) < F(X)$. Это означает, что после каждой операции целое неотрицательное число $F(X)$ строго уменьшается. Такой процесс не может продолжаться бесконечно долго.

18.7. Возьмём произвольные попарно различные числа $x_1, \ldots, x_n$ и рассмотрим число $\prod_{i>j} \dfrac{x_i - x_j}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} = \pm 1$. Покажем, что если это число равно 1, то числа m_1 и m_2 чётные, а если оно равно -1, то числа m_1 и m_2 нечётные.

Предположим сначала, что σ — транспозиция, т.е. $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ и $\sigma(k) = k$ при $k \neq i, j$. Пусть для определённости $i < j$. Тогда в рассматриваемое произведение входит дробь $\frac{x_i - x_j}{x_j - x_i} = -1$. Легко также проверить, что для каждого $k \neq i, j$ произведение соответствующих дробей для пар чисел (k, i) и (k, j) равно 1. Действительно, если $k < i < j$, то получаем произведение $\frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \cdot \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}$; если $i < k < j$, получаем $\frac{x_k - x_i}{x_k - x_j} \cdot \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}$; если $i < j < k$, получаем $\frac{x_k - x_i}{x_k - x_j} \cdot \frac{x_k - x_j}{x_k - x_i}$. Ясно также, что все остальные дроби равны 1. Таким образом, для одной транспозиции получаем число -1.

Если после транспозиции σ мы сделаем ещё транспозицию τ, то для полученной в результате перестановки рассматриваемое число равно 1, поскольку

$$\frac{x_i - x_j}{x_{\tau(\sigma(i))} - x_{\tau(\sigma(j))}} = \frac{x_i - x_j}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} \cdot \frac{\pm(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})}{\pm(x_{\tau(\sigma(i))} - x_{\tau(\sigma(j))})}.$$

Аналогично доказывается, что после каждой транспозиции рассматриваемое число меняет знак.

18.8. Нет, нельзя. Сопоставим свободной клетке номер 16. Тогда после каждого хода получается некоторая перестановка чисел 1, ..., 16. При этом каждый ход представляет собой транспозицию. Мы хотим в итоге получить транспозицию $14 \leftrightarrow 15$.

Покажем, что свободная клетка может вернуться на исходное место только после чётного числа ходов, т.е. чётного числа транспозиций. Согласно задаче 18.7 из этого следует, что так нельзя получить транспозицию.

Чтобы вернуться на исходное место, свободная клетка должна сделать вверх столько же ходов, сколько вниз, и влево столько же, сколько вправо. Поэтому общее число ходов должно быть чётно.

18.9. Достаточно доказать, что из любой перестановки $\sigma(1)$, ..., $\sigma(n)$ можно получить набор $1, \ldots, n$, сделав несколько транспозиций (эти транспозиции можно будет сделать в обратном порядке). Если $\sigma(1) \neq 1$, то поменяем местами 1 и $\sigma(1)$. Затем в новом наборе чисел поменяем местами 2 и $\sigma(2)$, если $\sigma(2) \neq 2$, и т.д.

18.10. Достаточно доказать, что после каждой транспозиции изменяется чётность числа всех инверсий. Пусть при транспозиции меняются местами числа $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$. Тогда инверсия может появиться или исчезнуть только для пар (i, k) и (j, k). Легко видеть, что появление или исчезновение инверсии может произойти только в том случае, когда k заключено между i и j, а $\sigma(k)$ заключено между $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$. Но в этом случае обе инверсии одновременно либо появляются, либо исчезают.

18.11. а) Пусть при транспозиции переставляются числа a и b. Рассмотрим два случая.

1. Числа a и b входят в один цикл $(a, a_1, \ldots, a_p, b, b_1, \ldots, b_q)$. Тогда после транспозиции из этого цикла получаются два цикла $(a, a_1, \ldots, a_p)$ и $(b, b_1, \ldots, b_q)$, поскольку $a \to a_1$, $a_2 \to a_3$, $\ldots$, $a_p \to b \to a$ и $b \to b_1$, $\ldots$, $b_q \to a \to b$. Остальные циклы не меняются.

2. Числа a и b входят в разные циклы $(a, a_1, \ldots, a_p)$ и $(b, b_1, \ldots, b_q)$. Тогда после транспозиции из этих двух циклов получится один цикл $(a, a_1, \ldots, a_p, b, b_1, \ldots, b_q)$, поскольку $a \to a_1$, $\ldots$, $a_p \to a \to b$, $b \to b_1$, $\ldots$, $b_q \to b \to a_1$.

б) Разобьём все перестановки на два класса: те, для которых число $n-m$ чётно, и те, для которых число $n - m$ нечётно. Первый класс содержит тождественную перестановку 1, 2, $\ldots$, n (для неё $n - m = 0$). Второй класс содержит все транспозиции (для них $n - m = 1$). Согласно задаче а) применение транспозиции изменяет класс. Поэтому перестановки, которые получаются из тождественной чётным числом транспозиций, лежат в первом классе, а перестановки, которые получаются из тождественной нечётным числом транспозиций, лежат во втором классе.

Глава 19.

Логика

19.1. Логические задачи

19.1. В трёх ящиках лежат шары — чёрный, белый и зелёный (в каждом ящике по одному шару). На первом ящике написано: «белый», на втором — «чёрный», на третьем — «белый или зелёный». Известно, что ни одна надпись не соответствует действительности. Выясните, где какие шары лежат.

19.2. Путешественник попал на остров, часть обитателей которого всегда говорит правду, а остальные всегда лгут. Какой вопрос должен задать путешественник обитателю острова, чтобы выяснить, всегда ли он говорит правду или всегда лжёт?

19.3. Один человек всегда говорит правду, в другой человек всегда лжёт. Какой вопрос нужно им задать, чтобы они ответили на него одинаково?

19.4. Некто всегда говорит правду. Какой вопрос нужно ему задать дважды, чтобы он дал на него разные ответы?

19.5. Дано 8 предметов, один из которых выделен. Требуется задать 3 вопроса, на которые даются только ответы «да» и «нет», и узнать, какой предмет выделен.

19.6. В институте работают правдолюбы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды каждый из сотрудников сделал два заявления:

1) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня.

2) В институте по крайней мере у ста человек зарплата больше, чем у меня.

Известно, что нагрузка у всех сотрудников разная, и зарплата тоже. Сколько человек работает в институте?

19.7. Три мудреца сидят на стульях в затылок друг другу так, что сидящий впереди не видит тех, кто сидит сзади. Они знают, что есть 3 белых и 2 чёрных шляпы. Мудрецы зажмуривают глаза и им на головы надевают шляпы, после чего оставшиеся шляпы убирают. Мудрецы открывают глаза, и сидящий сзади всех говорит, что он не знает, какого цвета на нём шляпа. После этого сидящий посредине говорит, что он тоже не знает, какого цвета на нём шляпа. Знает ли теперь сидящий впереди, какого цвета на нём шляпа?

19.8. В вагоне поезда едут несколько мудрецов. Когда поезд проехал туннель, в окна попала пыль. Вошёл проводник и сказал: «У некоторых из вас испачкались лица. К сожалению, в поезде нет воды. Но сейчас будут большие остановки, поэтому можно будет выйти из поезда и умыться.» На n-й остановке испачкавшиеся мудрецы вышли из поезда, чтобы умыться. Сколько мудрецов испачкалось? (Мудрец идёт умываться тогда и только тогда, когда он точно знает, что испачкался.)

19.2. Логические парадоксы

Парадокс лжеца

Некто произносит фразу: «Высказывание, которое я сейчас произношу, ложно.» Ложно само это высказывание или нет?

Если допустить, что это высказывание истинно, то оно должно быть ложным, а если допустить, что это высказывание ложно, то оно должно быть истинным.

Парадокс парикмахера

Деревенский парикмахер бреет тех и только тех жителей своей деревни, которые не бреют себя сами. Бреет ли он себя?

Если допустить, что он не бреет себя, то он должен себя брить, а если допустить, что он бреет себя, то он не должен себя брить.

Парадокс Ришара

Рассмотрим множество всех натуральных чисел, каждое из которых может быть однозначно определено посредством осмысленного текста, содержащего не более тысячи слогов. Это множество конечно, поскольку таких текстов конечное число. Рассмотрим наименьшее натуральное число, не входящее в указанное множество.

Выделенный курсивом абзац содержит менее тысячи слогов, поэтому он определяет число из рассматриваемого множества. С другой стороны, он определяет число, не входящее в это множество.

19.3. Логика высказываний

Пусть p и q — некоторые высказывания, каждое из которых может быть либо истинным (И), либо ложным (Л). Из них можно составить следующие составные высказывания:

$\neg p$ — *отрицание*: «p неверно»;

$p\&q$ — *конъюнкция*: «верны p и q»;

$p \vee q$ — *дизъюнкция*: «верно p или q»;

$p \to q$ — *импликация*: «p влечёт q»;

$p \leftrightarrow q$ — *эквивалентность*: «p эквивалентно q».

Эти составные высказывания имеют следующие *таблицы истинности*:

p q	$\neg p$	$p\&q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
И И	Л	И	И	И	И
И Л	Л	Л	И	Л	Л
Л И	И	Л	И	И	Л
Л Л	И	Л	Л	И	И

Для конъюнкции часто используется также обозначение $\wedge$, а для эквивалентности — обозначение $\equiv$.

19.9. Выпишете таблицу истинности для каждого из следующих высказываний: а) $p\&(\neg p)$; б) $p \vee (\neg p)$; в) $\neg(p\&q)$; г) $(p \vee q) \vee (\neg p)$.

Составное высказывание называют *тавтологией*, если оно истинно при любых значениях входящих в него переменных.

19.10. Являются ли следующие высказывания тавтологиями: а) $p \vee (\neg p)$; б) $(\neg(\neg p)) \equiv p$; в) $\neg(p\&(\neg p))$; г) $((p \to q) \to p) \to p$?

19.11. Докажите, что следующие высказывания эквивалентны, т.е. имеют одинаковые таблицы истинности: $p\&q$ и $\neg((\neg p) \vee (\neg q)$; $p \vee q$ и $\neg((\neg p)\&(\neg q)$; $p \to q$ и $(\neg q) \to (\neg p)$; $p \equiv q$ и $(p \to q)\&(q \to p)$.

19.12. Докажите, что для любой данной таблицы истинности с помощью связок $\&$, $\neg$ и $\vee$ можно составить высказывание, имеющее данную таблицу истинности, в случае: а) одной переменной; б) двух переменных; в) n переменных.

19.13. Часть жителей острова всегда говорит правду, а остальные всегда лгут. Путешественник хочет выяснить, какая из двух дорог ведёт в деревню A, задав один вопрос встретившемуся ему местному жителю. Сможет ли он это сделать?

Решения

19.1. В третьем ящике может лежать только чёрный шар. Белый шар может лежать только во втором ящике. Зелёный шар лежит в первом ящике.

19.2. Нужно задать такой вопрос: «Если бы ты всегда говорил правду, то как бы ты ответил на вопрос: "Ты лжец?"?» Тот, кто всегда говорит правду, на этот вопрос ответит: «нет», а тот, кто всегда лжёт, ответит: «да».

19.3. «Ты всегда говоришь правду?»

19.4. «Я тебя сегодня о чём-нибудь спрашивал?»

19.5. Занумеруем предметы номерами от 0 до 7. Зададим вопросы, входит ли выделенный предмет в группы $\{0, 2, 4, 6\}$, $\{0, 1, 4, 5\}$ и $\{0, 1, 2, 3\}$. Пусть $\varepsilon_i = 0$, если на i-й вопрос получен ответ «да», и $\varepsilon_i = 1$ в противном случае. Тогда выделенный предмет имеет номер $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3$.

Действительно, запишем номера предметов в двоичной системе счисления: $a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4$, где $a_i = 0$ или 1. Тогда k-й вопрос можно переформулировать так: «Равно ли a_{k-1} нулю?»

19.6. Ответ: 110. Из первого заявления для правдолюба с наименьшей нагрузкой следует, что в институте не более 10 правдолюбов, а для лжеца с наибольшей нагрузкой — что в институте не менее 10 правдолюбов. Из второго заявления для правдолюба с самой большой зарплатой следует, что в институте не менее 100 лжецов, а для лжеца с самой маленькой зарплатой — что в институте не более 100 лжецов. Таким образом, в институте работает 10 правдолюбов и 100 лжецов.

19.7. Ответ: сидящий впереди знает, что на нём белая шляпа. Если бы на двух передних мудрецах были чёрные шляпы, то сидящий сзади мудрец знал бы, что на нём белая шляпа. Значит, хотя бы на одном из них шляпа белая.

Поэтому если бы на сидящем впереди мудреце была бы чёрная шляпа, то сидящий посредине понял бы, что на нём самом — белая. Значит, на мудреце, сидящем впереди, шляпа белая.

19.8. Докажем, что если испачкалось n мудрецов, то все они пойдут умываться на n-й остановке. При $n = 1$ это очевидно: испачкавшийся мудрец видит, что все остальные не испачкались, причём он знает, что кто-то испачкался. Предположим, что требуемое утверждение доказано, если испачкалось не более n мудрецов. Рассмотрим случай, когда испачкалось $n + 1$ мудрецов. Каждый из испачкавшихся мудрецов рассуждает так. Возможны два варианта: (1) я не испачкался, (2) я испачкался. При первом варианте испачкалось n мудрецов; они выйдут на n-й остановке. Поэтому до n-й остановки мне не следует выходить, потому что первый вариант остаётся возможным. Но если на n-й остановке никто не выйдет, то, значит, я испачкался.

19.9. Ответ: а) ЛЛ; б) ИИ; в) ЛИИИ; г) ИИИИ.

19.10. Ответ: да, являются. В случае г) достаточно заметить, что для высказывания $(p \to q) \to p$ таблица истинности имеет вид ИИЛЛ.

19.11. Все требуемые таблицы истинности легко составляются.

19.12. а) Легко видеть, что высказывания p, $\neg p$, $p \& \neg p$ и $p \& \vee p$ соответствуют всем возможным таблицам истинности.

б) Высказывания $p \& q$, $p \& (\neg q)$, $\neg p \& q$ и $\neg p \& (\neg q)$ принимают значение И ровно для одного из четырёх возможных наборов значений переменных p и q. Чтобы получить высказывание, принимающее значение И на двух, трёх или четырёх наборах, можно применить дизъюнкцию. Например, высказывание $(p \& q) \vee (p \& \neg q)$ принимает значение И, если $(p, q) = (И, И)$ или $(p, q) = (И, Л)$. Высказывание $p \& \neg p$ принимает значение Л для всех наборов переменных. Теперь мы построили требуемые высказывания для всех таблиц истинности. Отметим, что высказывание, принимающее значение И на всех четырёх наборах переменных, можно построить проще, а именно, взять высказывание $p \vee \neg p$.

б) Решение для n переменных точно такое же, как для двух переменных. Высказывание $p_1 \& \neg p_1$ принимает значение Л для всех наборов переменных. Высказывания $p_1 \& p_2 \& \ldots \& p_n$, $\neg p_1 \& p_2 \& \ldots \& p_n$ и т.д. принимают значение И ровно для одного набора значений переменных (всего можно составить 2^n таких высказываний — столько же, сколько есть разных наборов значений переменных). Высказывания, принимающее значение И в точности для данных наборов значений, составляется из этих высказываний с помощью дизъюнкции.

19.13. Пусть p — это утверждение, что дорога ведёт в A, q — это утверждение, что встретившийся местный житель правдив. Получаем следующую таблицу желаемых ответов и, соответственно, таблицу истинности требуе-

мого высказывания (она, естественно, составляется на основе того, что правдивый говорит правду, а лжец лжёт):

p	q	желаемый ответ	таблица истинности
И	И	да	И
И	Л	да	Л
Л	И	нет	Л
Л	Л	нет	И

Требуемое высказывание строится теперь так, как описано в решении задачи 19.12. Это будет высказывание $(p\&q) \vee (\neg p\&\neg q)$. Таким образом, нужно задать вопрос: «Верно ли, что ты правдив и эта дорога ведёт в A, или что ты лжец и эта дорога не ведёт в A?» Житель ответит «Да» тогда и только тогда, когда дорога ведёт в A.

Замечание. *Легко проверить, что таблица истинности построенного высказывания $(p\&q) \vee (\neg p\&\neg q)$ совпадает с таблицей истинности высказывания $p \leftrightarrow q$. Поэтому можно задать вопрос: «Верно ли, что ты правдив тогда и только тогда, когда эта дорога ведёт в A?»*

Глава 20.

Стратегии. Турниры. Таблицы

20.1. Выбор стратегии

20.1. Перевозчику нужно переправить через реку волка, козу и капусту. В лодку он может взять только один из этих объектов. Кроме того, капусту нельзя оставить вместе с козой, а козу — с волком. Как осуществить переправу?

20.2. Три солдата и три разбойника должны переправиться через реку. Они нашли лодку, в которую помещаются только два человека. На каждом берегу нельзя оставлять больше разбойников, чем солдат. Как им переправиться через реку?

20.3. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама за 2, сын за 5, бабушка за 10. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если по мосту идут двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Идти по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя, перебрасывать фонарик через реку тоже нельзя.)

20.4. Двое играют в следующую игру. Есть 9 карточек с числами 1, 2, ..., 9. Играющие по очереди берут себе по одной карточке. Выигрывает тот, у кого есть три карточки с числами, дающими в сумме 15. Докажите, что эта игра эквивалентна игре в «крестики-нолики» на доске размером 3×3.

20.2. Переливания

20.5. Есть полный кувшин молока в 8 литров и два пустых кувшина в 5 литров и 3 литра. Как разделить молоко на две равные части?

20.6. Есть полный кувшин молока в 12 литров и два пустых кувшина в 8 литров и 5 литров. Как разделить молоко на две равные части?

20.7. Есть четыре бочки. В первую входит 24 ведра, во вторую 13, в третью 11, в четвёртую 5. Первая бочка наполнена водой, а остальные бочки пустые. Как разделить воду на три равные части?

20.3. Турниры

При решении задач о турнирах нужно знать следующие правила:

а) в волейболе не бывает ничьих;

б) в шахматах за победу присуждается 1 очко, за ничью 1/2 очка, за поражение 0 очков.

20.8. Восемь волейбольных команд сыграли каждая с каждой по одному матчу. Докажите, что можно выбрать четыре команды a_1, a_2, a_3, a_4 так, что команда a_i выиграла у a_j при $i > j$.

20.9. Алик, Боря и Вася сыграли несколько партий в шахматы, причём каждый сыграл одинаковое число партий. Могло ли при этом оказаться, что у Алика меньше всех проигрышей, у Бори больше всех выигрышей, а у Васи больше всего очков?

20.10. а) В шахматном турнире участвовали два ученика 7 класса и некоторое число учеников 8 класса. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найдите все возможные решения.

б) В шахматном турнире участвовали ученики 9 и 10 классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в $4,5$ раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники?

20.11. В соревнованиях участвуют 2^n боксёров. Каждый день проходят бои 2^{n-1} пар боксёров (каждый боксёр проводит ровно один бой). Все боксёры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за $n(n+1)/2$ дня можно определить место каждого

боксёра. (Расписания на каждый день составляются накануне вечером и в день соревнований не меняются.)

20.4. Взвешивания

20.12. Есть несколько мешков, в каждом из которых достаточно много монет. В одном мешке монеты фальшивые, а во всех других настоящие. Известен вес настоящей монеты и известно, что фальшивая монета на 1 грамм легче настоящей. Как при помощи одного взвешивания на весах с разновесками обнаружить мешок с фальшивыми монетами?

20.13. Среди 26 одинаковых по виду монет есть одна фальшивая, которая легче остальных. Докажите, что за три взвешивания на чашечных весах (без стрелок и гирь) можно найти фальшивую монету.

20.14. Среди $2n+1$ монет есть $2k$ фальшивых ($k \leqslant n$), причём вес фальшивой монеты отличается от веса настоящей монеты на 1 грамм. Как за одно взвешивание на чашечных весах со стрелкой про одну выбранную монету узнать, фальшивая она или нет?

20.15. Есть n мешков, в каждом из которых достаточно много монет. Есть несколько разных сортов монет. Монеты разного сорта имеют разный вес, причём их веса различаются на целое число граммов. Вес монеты каждого сорта известен. В каждом мешке лежат монеты одного сорта, но количество мешков с монетами данного сорта может быть произвольным. Как при помощи одного взвешивания на весах с разновесками выяснить, какого сорта монеты лежат в каждом мешке?

20.16. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, алюминиевые, остальные[1] дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи 11 взвешиваний на весах с двумя чашечками без гирь определить число дюралевых кубиков?

20.17. а) Дано $\frac{1}{2}(3^n-3)$ монет ($n \geqslant 2$), среди которых есть одна фальшивая монета, отличающаяся по весу от настоящей. За n взвешиваний на чашечных весах без гирь нужно найти фальшивую монету и выяснить, тяжелее она или легче, чем настоящая.

---

[1]Предполагается, что все кубики могут быть алюминиевыми, но они не могут быть все дюралевыми (если все кубики окажутся одного веса, то нельзя выяснить, алюминиевые они или дюралевые).

б) Сделать то же самое в случае, когда монет меньше $\frac{1}{2}(3^n - 3)$, но больше двух.

20.5. Таблицы

20.18. В прямоугольной таблице, составленной из положительных чисел, произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Докажите, что сумма всех чисел в таблице равна единице.

20.19. В прямоугольной таблице произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Докажите, что сумма всех чисел в таблице равна единице, или все числа равны нулю.

20.20. Квадратная таблица в n^2 клеток заполнена числами от 1 до n так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются все эти числа. Докажите, что если n нечётно и таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встретятся все эти числа $1, 2, 3, \ldots, n$.

20.21. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы: по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на одной из диагоналей, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно этой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любом столбце меньше 1035.

20.22. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на двух диагоналях, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно любой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любой строке меньше 518.

20.23. Числа $1, 2, \ldots, k^2$ расположены в квадратную таблицу

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & \ldots, & k, \\ k+1, & k+2, & \ldots, & 2k, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)k+1, & \ldots, & \ldots, & k^2. \end{array}$$

Произвольное число выписывается, после чего из таблицы вычёркивается строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделы-

вается с оставшейся таблицей из $(k-1)^2$ чисел и т.д. k раз. Найдите сумму выписанных чисел.

Решения

20.1. Сначала нужно перевезти через реку козу. После этого перевозчик возвращается, и есть два варианта дальнейших действий. Нужно перевезти капусту (волка), вернуться обратно с козой, оставить козу на берегу, перевезти волка (капусту) и потом перевезти козу.

20.2. Будем указывать в скобках, кто плывёт в лодке. Переправиться через реку можно следующим образом: РРСС(РС), РРСС(Р)С, РСС(РР)С, РСС(Р)РС, СС(РР)РС, СС(С)РРР, С(СС)РРР, С(Р)РРСС, (РС)РРСС.

20.3. Основная идея состоит в том, что бабушка должна пройти по мосту вместе с внуком. Сначала идут папа с мамой, затем папа возвращается с фонариком, после этого идут бабушка с внуком, затем мама возвращается с фонариком, наконец, папа с мамой переходят через мост. Всего на это будет затрачено $2+1+10+2+2=17$ минут.

20.4. Легко проверить, что есть ровно 8 троек карточек, дающих в сумме 15: (1,5,9), (1,6,8), (2,4,9), (2,5,8), (2,6,7), (3,4,8), (3,5,7) и (4,5,6). Эти 8 троек чисел — в точности тройки чисел, лежащих на одной прямой в таблице

2	9	4
7	5	3
6	1	8

.

Таким образом, цель играющего состоит в том, чтобы занять в этой таблице три клетки на одной вертикали, горизонтали или диагонали.

20.5. Первое решение. Если в 8-литровый, 5-литровый и 3-литровый кувшин налито, соответственно, a, b, c литров молока, то будем обозначать это (a, b, c). Можно применить такую последовательность переливаний: $(8,0,0) \to (3,5,0) \to (3,2,3) \to (6,2,0) \to (6,0,2) \to (1,5,2) \to (1,4,3) \to$ $\to (4,4,0)$.

Второе решение. Если есть три кувшина ёмкостью a, b, c литров, то последовательные переливания n литров жидкости удобно изображать в правильном треугольнике со стороной n. Каждой точке внутри правильного треугольника со стороной n можно сопоставить три неотрицательных числа x, y, z, сумма которых равна n. А именно, если через точку внутри правильного треугольника со стороной n провести прямые, параллельные сторонам треугольника, то образуются три маленьких треугольника со сторонами x, y, z; легко доказать, что $x+y+z=n$. Каждое из чисел x, y, z соответствует одной из сторон правильного треугольника. Будем считать, что этой

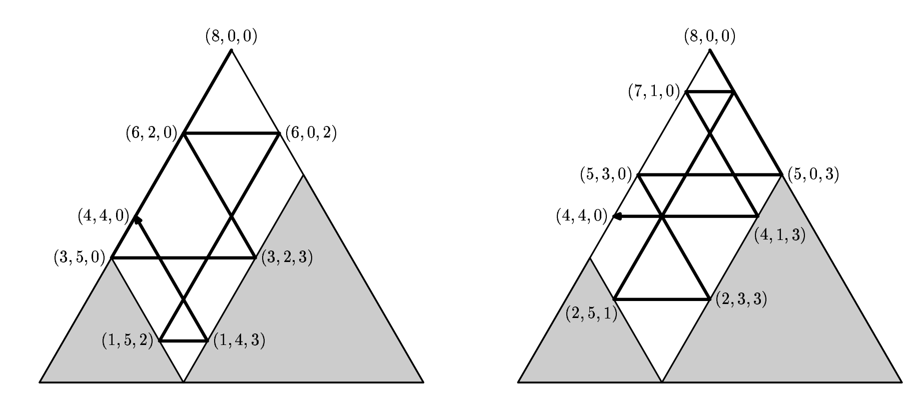


Рис. 20.1. Переливания

стороне соответствует один из кувшинов, т.е. будем считать, что в кувшины ёмкостью a, b, c литров налито, соответственно, x, y, z литров. Переливания происходят в области, заданной неравенствами $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, $z \leqslant c$. Каждое отдельное переливание представляет собой перемещение из одной точки границы данной области в другую точку границы в направлении, параллельном одной из сторон треугольника.

Два различных варианта решения задачи изображены на рис. 20.1.

20.6. Можно применить такую последовательность переливаний: $(12, 0, 0) \to (4, 8, 0) \to (0, 8, 4) \to (8, 0, 4) \to (8, 4, 0) \to (3, 4, 5) \to (3, 8, 1) \to$ $\to (11, 0, 1) \to (11, 1, 0) \to (6, 1, 5) \to (6, 6, 0)$.

20.7. Можно применить следующие переливания: $(24, 0, 0, 0) \to$ $\to (19, 0, 0, 5) \to (8, 0, 11, 5) \to (8, 11, 0, 5) \to (0, 11, 8, 5) \to (0, 13, 8, 3) \to$ $\to (8, 13, 0, 3) \to (8, 13, 3, 0) \to (8, 8, 3, 5) \to (8, 8, 8, 0)$.

20.8. Общее количество выигрышей равно общему количеству проигрышей. Каждая команда сыграла 7 матчей. Поэтому среднее количество выигрышей равно $3,5$. Значит, есть команда a_1, выигравшая по крайней мере у четырёх команд. Для этих четырёх команд среднее число выигрышей в их матчах друг с другом равно $1,5$. Поэтому есть команда a_2, которая выиграла по крайней мере у двух команд a_3 и a_4 (a_3 — это та команда, которая выиграла у другой).

20.9. Да, могло. Чтобы построить соответствующий пример, рассмотрим три вида турниров со следующими турнирными таблицами:

	Выигрыши	Ничьи	Проигрыши	Очки
Алик	0	4	0	2
Боря	1	2	1	2
Вася	1	2	1	2

	Выигрыши	Ничьи	Проигрыши	Очки
Алик	1	2	1	2
Боря	1	2	1	2
Вася	0	4	0	2

	Выигрыши	Ничьи	Проигрыши	Очки
Алик	0	1	1	1/2
Боря	0	1	1	1/2
Вася	2	0	0	2

Пусть было сыграно a турниров первого вида, b — второго, c — третьего. Тогда у Алика $b+c$ проигрышей, у Бори и Васи $a+b+c$ и a проигрышей. У Бори $a+b$ выигрышей, у Алика и Васи b и $a+2c$ выигрышей. У Васи $2(a+b+c)$ очков, у Алика и Бори по $2a+2b+c/2$ очков. Поэтому должны выполняться неравенства $a > b+c$, $b > 2c$ и $c \neq 0$. Например, можно взять $c=1$, $b=3$ и $a=5$.

20.10. а) Пусть x — число восьмиклассников, y — число очков, набранных каждым восьмиклассником. Подсчитывая двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира, приходим к уравнению

$$xy + 8 = \frac{(x+2)(x+1)}{2},$$

т.е.

$$2y = \frac{(x+2)(x+1) - 16}{x} = x + 3 - \frac{14}{x}.$$

Поэтому x принимает одно из значений 1, 2, 7, 14. Значения 1 и 2 отпадают, поскольку в этих случаях число y будет отрицательным. Задача имеет два ответа: $x = 7$ и $x = 14$.

б) Пусть в турнире участвовало x девятиклассников. Тогда всего было $11x$ участников и они набрали $\frac{11x(11x-1)}{2}$ очков. По условию отношение числа очков, набранных девятиклассниками, к числу очков, набранных десятиклассниками, равно $1 : 4,5$. Поэтому девятиклассники набрали $x(11x-1)$ очков, а значит, каждый из девятиклассников выиграл все $11x-1$ партий, которые он сыграл. Но если бы среди участников турнира было два девятиклассника, то партию между собой они должны были оба выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовал один девятиклассник; он набрал 10 очков.

20.11. Применим индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что 2^{n-1} боксёров можно упорядочить за $n(n-1)/2$ дней. Докажем,

что тогда 2^n боксёров можно упорядочить за $n(n+1)/2$ дней. Разобьём боксёров на две группы X и Y по 2^{n-1} человек. Сначала будут происходить бои только между боксёрами из одной и той же группы. По предположению индукции за $n(n-1)/2$ дней в каждой из этих групп боксёров можно упорядочить: $X_1 < \ldots < X_N$ и $Y_1 < \ldots < Y_N$, где $N = 2^{n-1}$.

Теперь нужно за $n(n+1)/2 - n(n-1)/2 = n$ дней повести поединки между боксёрами из разных групп и упорядочить всех боксёров. Это мы тоже будем делать по индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно. Сделаем теперь шаг индукции. Возьмём «нечётную» группу X_1, X_3, $\ldots$, Y_1, Y_3, $\ldots$ и «чётную» группу $X_2, X_4, \ldots, Y_2, Y_4, \ldots$ По предположению индукции за $n-1$ дней можно упорядочить боксёров в каждой из этих групп (каждая группа состоит из двух уже упорядоченных меньших групп). Пусть $Y_{j-1} < X_i < Y_{j+1}$. Тогда боксёра X_i нужно сравнить с Y_j. Но это сравнение необходимо лишь во том случае, когда $X_{i-1} < Y_j < X_{i+1}$. Поэтому те пары боксёров $\{X_i, Y_j\}$, между которыми необходимо провести бой, определены так, что ни один из боксёров не входит в две группы.

20.12. Занумеруем мешки и возьмём из каждого мешка столько монет, каков его номер. Взвесим все эти монеты. Их вес меньше веса такого же количества настоящих монет на столько же граммов, каков номер мешка с фальшивыми монетами.

20.13. Возьмём 18 монет и положим половину из них на одну чашу весов, а другую половину на другую чашу. Если одна группа монет окажется легче, то фальшивая монета входит в эту группу. Если же чаши весов уравновесятся, то фальшивая монета находится среди восьми оставшихся монет.

После первого взвешивания у нас осталось 8 или 9 подозрительных монет. Возьмём из них 6 монет и половину положим на одну чашу весов, половину на другую. После этого останется две или три подозрительных монеты. Положив на обе чаши весов по одной подозрительной монете, мы сможем выяснить, какая монета фальшивая,

20.14. Отложим выбранную монету и положим половину оставшихся монет на одну чашу весов, а другую половину — на другую чашу. Пусть среди первых n монет есть k_1 фальшивых, а среди других n монет есть k_2 фальшивых. Тогда на первой чаше лежит груз весом $na \pm k_1$, где a — вес настоящей монеты, а на второй чаше лежит груз весом $na \pm k_2$. Стрелка весов покажет разность $k_1 - k_2 \equiv k_1 + k_2 \pmod 2$. Таким образом, если выбранная монета фальшивая, то показание стрелки весов — нечётное число, а если выбранная монета настоящая, то показание стрелки весов — чётное число.

20.15. Пусть вес самой лёгкой монеты равен a грамм, а вес самой тяжёлой монеты равен $a + d - 1$ грамм. Занумерует мешки числами 0, 1, 2, $\ldots$, $n - 1$ и возьмём из мешка с номером i ровно d^i монет. Тогда если в мешке с номером i лежат монеты веса $a + m_i$, то вес выбранных монет превышает вес такого же

количества самых лёгких монет на $m_0+m_1d+m_2d^2+\ldots+m_{n-1}d^{n-1}$. Это число можно узнать при помощи одного взвешивания. Кроме того, $0 \leqslant m_i \leqslant d-1$. Поэтому, записав полученное число в d-ичной системе счисления, мы узнаем все числа m_0, m_1, $\ldots$, m_{n-1}.

20.16. Положим на чашечки весов по одному кубику. Возможны два случая.

Случай 1. *При первом взвешивании один из кубиков оказался тяжелее.*

В этом случае один выбранный кубик алюминиевый, а другой дюралевый. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем с ними сравнивать остальные кубики. А именно, оставшиеся 18 кубиков разбиваем на 9 пар и поочерёдно кладём их на другую чашечку. Каждый раз мы узнаём, сколько в паре дюралевых кубиков. Действительно, если эталонная пара легче, то мы положили два дюралевых кубика; если эталонная пара имеет тот же самый вес, то мы положили один алюминиевый и один дюралевый кубик; если эталонная пара тяжелее, то мы положили два алюминиевых кубика. Таким образом, в первом случае достаточно 10 взвешиваний.

Случай 2. *При первом взвешивании кубики оказались равного веса.*

В этом случае либо оба выбранных кубика алюминиевые, либо оба дюралевые. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем последовательно с ними сравнивать остальные кубики. Пусть первые k пар оказались того же самого веса, а $(k+1)$-я пара оказалась другого веса. (Если $k=9$, то все кубики одного веса, поэтому дюралевых кубиков нет.) Пусть для определённости $(k+1)$-я пара оказалась более тяжёлой. Тогда первые два кубика и кубики первых k пар алюминиевые. Положим на каждую чашку весов по одному кубику $(k+1)$-й пары. Если эти кубики одного веса, то они оба дюралевые. Если кубики разного веса, то один алюминиевый, а другой дюралевый. В обоих случаях мы можем составить пару кубиков, один из которых алюминиевый, а другой дюралевый. Оставшиеся пары кубиков мы можем сравнивать с этой парой, как и в первом случае. Общее число взвешиваний во втором случае равно 11.

20.17. а) Рассмотрим все n-значные числа в троичной системе счисления, за исключением чисел $00\ldots 0$, $11\ldots 1$ и $22\ldots 2$. Разобьём эти числа на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была равна $22\ldots 2$. Каждой монете сопоставим одну из таких пар. Будем называть *правым маркером* монеты то из чисел соответствующей ей пары, для которого первая пара неравных цифр — это 01, 12 или 20. Другое число будем называть *левым маркером*. Для него первая пара неравных цифр — это 21, 10 или 02.

При k-м взвешивании положим на одну чашу весов те монеты, у которых k-й разряд правого маркера равен 0, а на вторую чашу — те монеты, у

которых k-й разряд правого маркера равен 2. Если перевесит первая чаша, то положим $a_k = 0$; если перевесит вторая чаша, то положим $a_k = 2$; если чаши уравновесятся, то положим $a_k = 1$. Покажем, что тогда $a_1 a_2 \ldots a_n$ — маркер фальшивой монеты, причём он левый, если фальшивая монета легче настоящей, и правый, если фальшивая монета тяжелее.

Прежде всего заметим, что на каждую чашу весов кладётся одинаковое число монет; более того, монет, у которых k-й разряд правого маркера равен 0, 1, 2, одинаковое число. Чтобы это доказать, нужно рассмотреть циклическую перестановку цифр $0 \to 1 \to 2 \to 0$; при такой замене цифр каждый правый маркер переходит в некоторый другой правый маркер, и в результате правые маркеры разбиваются на тройки.

Предположим, что k-й разряд правого маркера фальшивой монеты равен 1. Тогда на обеих чашах весов при k-м взвешивании лежат настоящие монеты, поэтому $a_k = 1$. Именно так и должно быть (k-й разряд левого маркера тоже равен 1).

Предположим, что k-й разряд правого маркера фальшивой монеты равен 0. Тогда при k-м взвешивании фальшивая монета лежит на первой чаше весов. Если фальшивая монета тяжелее настоящей, то $a_k = 0$ (k-й разряд правого маркера тоже равен 0). Если фальшивая монета легче настоящей, то $a_k = 2$ ((k-й разряд левого маркера тоже равен 2). Случай, когда k-й разряд правого маркера фальшивой монеты равен 2, разбирается аналогично.

б) Основная трудность, которая возникает в случае, когда количество монет меньше $\frac{1}{2}(3^n - 3)$, связана с тем, что если мы применим ту же самую систему взвешиваний, то на одной чаше весов может оказаться меньше монет, чем на другой. Чтобы преодолеть эту трудность, воспользуемся разбиением правых маркеров на тройки, которое возникает при циклической перестановке цифр $0 \to 1 \to 2 \to 0$. Кроме того, выделим тройку правых маркеров $00 \ldots 01$, $11 \ldots 12$ и $22 \ldots 20$. Эти маркеры мы не будем использовать до тех пор, пока это возможно.

Будем разбивать монеты на тройки до тех пор, пока это возможно. Каждой тройке монет сопоставим тройку правых маркеров (и соответствующих им левых маркеров); при этом выделенную тройку маркеров мы не используем. Если остаётся одна монета, то ей сопоставляем маркер $11 \ldots 12$, а если остаются две монеты, то им сопоставляем маркеры $00 \ldots 01$ и $22 \ldots 20$.

Для первых $n-1$ взвешиваний можно применить прежние правила. Более того, если количество монет делится на 3, то последнее взвешивание тоже можно сделать по прежним правилам.

Предположим, что осталась одна монета с маркером $11 \ldots 12$. Тогда если после первых $n - 1$ взвешиваний получается число, отличное от $11 \ldots 1$, то ясно, что монета с маркером $11 \ldots 12$ не фальшивая. В таком случае последнее взвешивание производится без учёта этой монеты. Если же получилось число $11 \ldots 1$, то под подозрением остаются только монеты с маркерами

11 ... 10 и 11 ... 12. Но это — маркеры одной и той же монеты (левый и правый). Итак, фальшивая монета известна. Теперь за одно взвешивание её можно сравнить с настоящей и выяснить, какая из них легче.

Предположим, что остались две монеты с правыми маркерами 00 ... 01 и 22 ... 20; им соответствуют левые маркеры 22 ... 21 и 00 ... 02. Если после первых $n-1$ взвешиваний получается число, отличное от 00 ... 0 и 22 ... 2, то фальшивая монета отлична от двух выделенных монет. Поэтому последнее взвешивание можно сделать без них. Если же после $n-1$ взвешиваний получается число 00 ... 0 или 22 ... 2, то мы знаем, что фальшивая монета — одна из двух выделенных, причём мы знаем, какая из выделенных монет легче. Сравнив одну из этих монет с настоящей, мы узнаем, какая монета фальшивая, и узнаем, легче она настоящей или тяжелее.

20.18. Первое решение. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — суммы чисел в строках, $y_1, \ldots, y_m$ — суммы чисел в столбцах. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число x_iy_j. Поэтому сумма чисел в i-й строке равна $x_iy_1 + x_iy_2 + \ldots + x_iy_m$. С другой стороны, эта сумма равна x_i. Таким образом, $x_i = x_i(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)$. Число x_i положительно; в частности, оно отлично от нуля, поэтому $y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1$. Но сумма $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ это как раз и есть сумма всех чисел в таблице.

Второе решение. Пусть a_{ji} — число, стоящее на пересечении i-го столбца и j-й строки. По условию $a_{ji} = \left(\sum_{p=1}^{m} a_{pi}\right)\left(\sum_{q=1}^{n} a_{jq}\right)$. Следовательно, $\sum_{i,j} a_{ji} = \sum_{i,j}\left(\sum_{p=1}^{m} a_{pi}\right)\left(\sum_{q=1}^{n} a_{jq}\right) = \left(\sum_{i,j} a_{ji}\right)^2$. Для числа $S = \sum_{i,j} a_{ji}$ мы получили уравнение $S^2 = S$. Но $S > 0$, поэтому $S = 1$.

20.19. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — суммы чисел в строках, $y_1, \ldots, y_m$ — суммы чисел в столбцах. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число x_iy_j. Поэтому сумма чисел в i-й строке равна $x_iy_1 + x_iy_2 + \ldots + +x_iy_m$. С другой стороны, эта сумма равна x_i. Таким образом, $x_i = x_i(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)$. Сумма $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ — это как раз сумма всех чисел в таблице. Если она не равна 1, то $x_i = 0$. Аналогично доказывается, что в таком случае все числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ равны 0. Но тогда и все числа x_iy_j равны 0.

20.20. Таблица симметрична относительно диагонали, поэтому каждому числу, расположенному вне диагонали, соответствует равное ему число на симметричном месте. Значит, вне диагонали расположено чётное число единиц, чётное число двоек и т.д. По условию в каждой строке встречаются все числа от 1 до n. Поэтому в каждой строке любое число от 1 до n встречается ровно один раз, а всего в таблице оно встречается ровно n раз. Число n нечётно, поэтому каждое число от 1 до n встречается на диагонали нечётное число раз; в частности, каждое число от 1 до n встречается на диагонали по крайней мере один раз. Но на диагонали всего n мест, поэтому каждое число от 1 до n встречается на диагонали ровно один раз.

20.21. Предположим, что сумма чисел в некотором столбце равна $S \geqslant 1035$. Рассмотрим строку, симметричную этому столбцу относительно выделенной диагонали. Сумма чисел в этой строке тоже равна S, а сумма всех чисел, стоящих в этом столбце и этой строке, равна $2S-s$, где s — число, стоящее на их пересечении. Число s стоит на выделенной диагонали, поэтому $s \leqslant 112$. Следовательно, $2S - s \geqslant 2 \cdot 1035 - 112 = 1958 > 1956$. Приходим к противоречию.

20.22. Предположим, что сумма чисел в некоторой строке равна $S \geqslant 518$. Рассмотрим два столбца, симметричных этой строке относительно двух диагоналей, и ещё строку, симметричную этим столбцам. Число 8 чётно, поэтому мы получим два разных столбца и две разных строки. На пересечениях этих строк и столбцов стоят 4 числа, сумма которых равна $s \leqslant 112$. Сумма всех чисел, стоящих в этих двух строках и двух столбцах равна $4S-s \geqslant 4\cdot 518-112 = 1960 > 1956$. Приходим к противоречию.

20.23. Ответ: $\dfrac{k(k^2+1)}{2}$.

Запишем данную таблицу в виде

$$\begin{array}{cccc} k\cdot 0+1, & k\cdot 0+2, & \ldots, & k\cdot 0+k,\\ k\cdot 1+1, & k\cdot 1+2, & \ldots, & k\cdot 1+k,\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (k-1)k+1, & (k-1)k+2, & \ldots, & (k-1)k+k. \end{array}$$

Каждое число таблицы представлено в виде $ka + b$, где $0 \leqslant a \leqslant k-1$ и $1 \leqslant b \leqslant k$. Будем отдельно суммировать слагаемые ka и слагаемые b. Из каждой строки выписано в точности одно число, поэтому будут присутствовать слагаемые ka для каждого $a = 0, 1, \ldots, k-1$. Из каждого столбца выписано в точности одно число, поэтому будут присутствовать слагаемые b для каждого $b = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, искомая сумма равна

$$k\bigl(0+1+2+\ldots+(k-1)\bigr)+(1+2+\ldots+k) = k\cdot\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k^2+1)}{2}.$$

Глава 21.

Системы счисления

21.1. Последние цифры

21.1. Найдите трёхзначное число, всякая целая степень которого оканчивается на три цифры, составляющие исходное число (в том же порядке).

21.2. а) Докажите, что для любого натурального n существуют ровно два натуральных n-значных[1] числа a_n и b_n (отличных от $00\ldots0$ и $0\ldots01$), для которых a_n^2 оканчивается на a_n, а b_n^2 оканчивается на b_n.

б) Докажите, что $a_n + b_n = 10^n + 1$.

в) Пусть все числа a_n оканчиваются на одну и ту же цифру. Докажите, что тогда a_{n+1} оканчивается на a_n, а b_{n+1} оканчивается на b_n.

г) Докажите, что если a_{n+1} и a_n оканчиваются на 5, то a_{n+1} — это последние $n+1$ цифр числа a_n^2, а если b_{n+1} и b_n оканчиваются на 6, то b_{n+1} — это последние $n+1$ цифр числа b_n^5.

21.2. Первые цифры

21.3. Числа 2^n и 5^n начинаются с цифры a. Чему равно a?

[1] Первыми цифрами могут быть и нули, т.е. требуется лишь, чтобы выполнялось неравенство $a_n, b_n \leqslant 10^n - 1$.

21.4. а) Докажите, что число 2^n может начинаться с любого набора цифр.

б) Докажите, что число $0,12481632\ldots$ (подряд записываются степени двойки) иррационально.

21.5. Докажите, что квадрат целого числа может начинаться с любого набора цифр.

21.3. Другие цифры

21.6. Докажите, что предпоследняя цифра числа 3^n при любом $n > 2$ чётна.

21.7. Пусть a и b — последняя и предпоследняя цифры числа 2^n. Докажите, что если $n > 3$, то ab делится на 6.

21.8. Пусть a_2, a_2, $\ldots$ — различные натуральные числа, в десятичной записи которых не встречается цифра 1. Докажите, что среди чисел a_n/n есть сколь угодно большие числа.

21.4. Сумма цифр

21.9. Пусть $a \geqslant 2$ — натуральное число, которое не делится ни на 2, ни на 5. Докажите, что сумма цифр числа a^m при достаточно большом m может быть сколь угодно велика.

21.10. Докажите, что сумма цифр числа 2^n может быть сколь угодно велика.

21.11. Пусть $P(x)$ — многочлен с натуральными коэффициентами, a_n — сумма цифр числа $P(n)$. Докажите, что некоторое число встречается в последовательности a_1, a_2, a_3, $\ldots$ бесконечно много раз.

21.5. Разные задачи о десятичной записи

21.12. Найдите четырёхзначное число, которое является точным квадратом и у которого две первые цифры одинаковые и две последние тоже.

21.13. Числа 2^n и 5^n (в десятичной записи) записаны одно за другим. Сколько цифр имеет полученное число?

21.14. Докажите, что любое положительное число a можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и k, где k — фиксированная цифра, отличная от нуля.

21.15. Найдите все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

21.16. Все целые числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 206 788-м месте.

21.6. Репьюниты и периоды десятичных дробей

Пусть p — простое число, отличное от 2 и 5. *Длиной периода* числа p называют количество цифр в периоде десятичной записи дроби $1/p$.

21.17. Пусть n — натуральное число, не превосходящее $p-1$. Докажите, что количество цифр в периоде десятичной записи числа n/p равно длине периода числа p.

21.18. Докажите, что длина периода числа p является делителем числа $p-1$.

21.19. Периоды правильных дробей со знаменателем 7 получаются друг из друга циклической перестановкой:

$$1/7 = 0,(142857) \qquad 3/7 = 0,(428571) \qquad 2/7 = 0,(285714)$$
$$6/7 = 0,(857142) \qquad 4/7 = 0,(571428) \qquad 5/7 = 0,(714285)$$

Докажите, что таким же свойством обладают все простые числа p, у которых длина периода равна $p-1$.

21.20. Период дроби $1/7 = 0,(142857)$ обладает следующим свойством: $142 + 857 = 999$. Докажите, что аналогичным свойством обладает период дроби $1/p$ для любого простого числа p, у которого длина периода равна $p-1$.

* * *

Репьюнитом называют натуральное число вида $111\ldots111$, т.е. натуральное число, в десятичной записи которого встречаются только единицы.

21.21. Докажите, что длина периода простого числа $p \neq 3$ равна числу единиц в наименьшем репьюните, делящемся на p.

21.22. Пусть $p \geqslant 7$ — простое число. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ делится на p.

21.7. Определение d-ичной записи числа

21.23. Пусть $d > 1$ — натуральное число. Докажите, что любое натуральное число n единственным образом представляется в виде $n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_k d^k$, где $0 \leqslant a_i \leqslant d - 1$ — целые числа, причём $a_k \neq 0$.

Выражение $n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_k d^k$ называют *d-ичной записью* числа n.

21.8. Двоичная система

21.24. Пусть n — натуральное число, a_0 — остаток от деления n на 2. Положим $n_1 = (n - a_0)/2$, a_1 — остаток от деления n_1 на 2 и т.д. до тех пор, пока не получим $n_m = 1$ и $a_m = 1$. Докажите, что $a_m 2^m + a_{m-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$ — двоичная запись числа n.

21.25. Докажите, что $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\ldots(1 + x^{2^n}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2^{n+1}-1}$.

21.26. Докажите, что количество нечётных коэффициентов многочлена $(1 + x)^n$ равно 2^d, где d — сумма цифр в двоичной записи числа n (т.е. количество единиц в двоичной записи числа n).

21.27. (Игра ним) Есть три кучки камней. Двое игроков по очереди берут произвольное число камней из любой кучки, но только одной. Выигрывает тот, кто берёт последний камень.

Запишем числа камней в кучках в двоичной системе: $a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots$, $b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \ldots$, $c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \ldots$. Положим $d_i = a_i + b_i + c_i$.

а) Докажите, что если среди чисел d_i есть хотя бы одно нечётное, то игрок, делающий первый ход, всегда может обеспечить себе выигрыш.

б) Докажите, что если все числа d_i чётные, то второй игрок всегда может обеспечить себе выигрыш.

21.28. Докажите, что для любого натурального n число $n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2^2}\right] - \left[\frac{n}{2^3}\right] - \ldots$ равно сумме цифр двоичной записи числа n.

См. также задачи 19.5, 33.5.

21.9. Другие системы счисления

21.29. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — различные натуральные числа, в десятичной записи которых не встречается подряд 100 единиц. Докажите, что среди чисел a_n/n есть сколь угодно большие числа.

21.30. Запишем натуральное число n в p-ичной системе счисления: $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_m p^m$. Докажите, что число $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$ равно $\frac{n - (a_0 + a_1 + \ldots + a_m)}{p-1}$.

21.31. Пусть p — простое число. Докажите, что если p^k — наибольшая степень числа p, делящая $\binom{n+m}{m}$, то k — количество переносов при сложении чисел m и n в p-ичной системе счисления.

21.32. Пусть p — простое число. Запишем натуральные числа a и b в p-ичной системе: $a = a_0 + a_1 p + \ldots + a_m p^m$, $b = b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m$. Докажите, что

$$\binom{b}{a} \equiv \binom{b_0}{a_0}\binom{b_1}{a_1}\ldots\binom{b_m}{a_m} \pmod{p}.$$

21.33. Если считать цифры, стоящие в разных разрядах, разными, то в d-ичной системе счисления nd цифр позволяют записать d^n чисел (от 0 до $d^n - 1$). Какая система счисления в этом отношении самая экономная, т.е. позволяет записать наибольшее количество чисел с помощью данного числа цифр? (Сравнивая системы счисления с основаниями d_1 и d_2, мы рассматриваем только наборы из m цифр, где m делится на d_1 и d_2.)

См. также задачи 20.15, 20.17.

21.10. Другие представления чисел

21.34. Докажите, что любое натуральное число n единственным образом представляется в виде $n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_k \cdot k!$, где a_i — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant a_i \leqslant i$, и $a_k \neq 0$.

21.35. Докажите, что любое рациональное число $p/q \neq 0$ однозначно представляется в виде

$$\frac{p}{q} = x_1 + \frac{x_2}{2!} + \frac{x_3}{3!} + \ldots + \frac{x_n}{n!},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — целые числа, причём $0 \leqslant x_k < k$ при $k \geqslant 2$ и $x_n \neq 0$.

Решения

21.1. Ответ: 376 и 625. Пусть N — искомое число. Тогда $N^2 - N = N(N-1)$ делится на 1000. Числа N и $N-1$ взаимно простые, поэтому одно из них делится на 8, а другое на 125. Пусть сначала $N = 125k$. Тогда $k \leqslant 8$. Среди чисел $125k - 1$, $k = 1, \ldots, 8$, только число 624 делится на 8. Пусть теперь $N - 1 = 125k$. Тогда $N = 125k + 1$, поэтому $k \leqslant 7$. Среди чисел $125k + 1$, $k = 1, \ldots, 7$, только число 376 делится на 8.

Если $N^2 - N = N(N-1)$ делится на 1000, то $N^k - N = N(N^{k-1} - 1)$ тоже делится на 1000, поскольку $N^{k-1} - 1$ делится на $N - 1$.

21.2. а) Число $a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$ должно делиться на $10^n = 2^n 5^n$. Числа a_n и $a_n - 1$ взаимно простые и $a_n \neq 0$ и 1, поэтому либо a_n делится на 2^n и $a_n - 1$ делится на 5^n, либо a_n делится на 5^n и $a_n - 1$ делится на 2^n. В первом случае $a_n = 2^n a$, где $1 \leqslant a \leqslant 5^n - 1$. Все числа $2^n a$, где $1 \leqslant a \leqslant 5^n - 1$, при делении на 5^n дают разные остатки, причём ни одно из них не делится на 5^n. Действительно, если число $(a - a')2^n$ делится на 5^n, то $a - a'$ должно делиться на 5^n. Таким образом, при делении чисел $a_n = 2^n a$, где $1 \leqslant a \leqslant 5^n - 1$, на 5^n мы получим все разные остатки от 1 до $5^n - 1$, причём ровно по одному разу. Требуемое число $a_n = 2^n a$ — это то, которое при делении на 5^n даёт остаток 1. Аналогично разбираем второй случай и получаем, что $b_n = 5^n b$ и b_n даёт остаток 1 при делении на 2^n.

б) Из решения задачи а) следует, что $a_n = 2^n a \equiv 1 \pmod{5^n}$и $b_n = 5^n a \equiv 1 \pmod{2^n}$. Значит, $a_n + b_n \equiv 1 \pmod{5^n}$ и $a_n + b_n \equiv 1 \pmod{2^n}$, т.е. число $a_n + b_n - 1$ делится на 10^n.

в) Последние n цифр числа a_{n+1}^2 определяются последними n цифрами числа a_{n+1}. Значит, если a_n — число, которое получается из a_{n+1} вычёркиванием первой цифры, то a_n^2 оканчивается на a_n.

г) Пусть $a_n^2 = x \cdot 10^{n+1} + a_{n+1}$. Нужно доказать, что $a_{n+1}^2 - a_{n+1}$ делится на 10^{n+1}. Ясно, что $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = (a_n^2 - x \cdot 10^{n+1})^2 - (a_n^2 - x \cdot 10^{n+1}) = a_n^4 - 2xa_n^2 \cdot 10^{n+1} + x^2 \cdot 10^{2n+2} - a_n^2 + x \cdot 10^{n+1}$. Далее, $a_n^4 - a_n^2 = (a_n^2 - a_n)(a_n^2 + a_n)$. Число $a_n^2 - a_n$ делится на 10^n, а число $a_n^2 + a_n$ делится на 10, поскольку оно чётно и оба числа a_n^2 и a_n оканчиваются на 5.

Пусть $b_n^5 = y \cdot 10^{n+1} + b_{n+1}$. Нужно доказать, что $b_{n+1}^2 - b_{n+1}$ делится на 10^{n+1}. Ясно, что $b_{n+1}^2 - b_{n+1} \equiv b_n^{10} - b_n^5 \pmod{10^{n+1}}$. Далее, $b_n^{10} - b_n^5 = (b_n^2 - b_n)(b_n^8 + b_n^7 + b_n^6 + b_n^5 + b_n^4)$. Число $b_n^2 - b_n$ делится на 10^n, а число

$b_n^8 + \ldots + b_n^4$ делится на 10, поскольку оно представляет собой сумму пяти чисел, оканчивающихся на 6.

21.3. По условию $a \cdot 10^p < 2^n < (a+1)10^p$ и $a \cdot 10^q < 5^n < (a+1)10^q$. Поэтому $a^2 10^{p+q} < 10^n < (a+1)^2 10^{p+q}$, т.е. $a^2 < 10^{n-p-q} < (a+1)^2$. При этом $(a+1)^2 \leqslant 100$. Значит, $a^2 < 10 < (a+1)^2$, т.е. $a = 3$. С цифры 3 начинаются числа 2^5 и 5^5.

21.4. а) Пусть A — данное натуральное число. Покажем, что натуральное число n можно выбрать так, что $10^m A < 2^n < 10^m(A+1)$, т.е. $m + \lg A < n \lg 2 < m + \lg(A+1)$. Эквивалентное условие таково: существуют натуральные числа m и n, для которых $\lg A < n\lg 2 - m < \lg(A+1)$. Число $\lg 2$ иррационально (это доказывается точно так же, как в решении задачи 27.20). Поэтому можно воспользоваться результатом задачи 17.13.

б) Очевидным образом следует из а).

21.5. Достаточно доказать, что число 4^n может начинаться с любого набора цифр. Это делается точно так же, как при решении задачи 21.4.

21.6. Пусть $N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 100 + \ldots$. Тогда $3N = 3a_0 + 30a_1 + 300a_2 + \ldots$. Поэтому если число a_1 чётно, то предпоследняя цифра числа $3N$ имеет такую же чётность, как и предпоследняя цифра числа $3a_0$. Равенство $3^4 = 81$ показывает, что последними цифрами чисел вида 3^n могут быть только 3, 9, 7 и 1. При этом $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 9 = 27$, $3 \cdot 7 = 21$ и $3 \cdot 1 = 3$; во всех случаях предпоследняя цифра чётна.

21.7. Поскольку $2^4 = 16$, число 2^{4k} оканчивается на 6. Соответственно, числа 2^{4k+1}, 2^{4k+2}, 2^{4k+3} оканчиваются на 2, 4, 8. Для чисел вида 2^{4k} требуемое утверждение очевидно, поскольку $b = 6$. Заметим также, что число b всегда чётно. Поэтому достаточно проверить, что числа $2^{4k+1} - 2$, $2^{4k+2} - 4$, $2^{4k+3} - 8$ делятся на 3, иными словами, достаточно проверить, что $2^{4k} - 1$ делится на 3. Число $2^4 = 16$ при делении на 3 даёт остаток 1, поэтому число 2^{4k} тоже даёт остаток 1 при делении на 3.

21.8. Количество натуральных чисел, которые не превосходят 10^n и в десятичной записи которых не встречается цифра 1, не превосходит $9^k - 1$. Действительно, на каждом из k разрядов стоит одна из 9 цифр, причём все эти цифры не могут быть одновременно нулями. Значит, $a_n \geqslant 10^k$ для некоторого $n \leqslant 9^k$. В таком случае $a_n/n \geqslant (10/9)^k$. Число $(10/9)^k$ может быть сколь угодно велико.

21.9. Предположим, что сумма цифр чисел вида a^m ограничена. Тогда сумма цифр числа a^m не превосходит суммы цифр числа a^N для некоторого фиксированного N. Пусть $a^N < 10^k$. Согласно задаче 17.2 существует натуральное число n, для которого $a^n - 1$ делится на 10^k. Тогда сумма цифр числа $a^{n+N} = a^N(a^n - 1) + a^N$ больше суммы цифр числа a^N. Получено противоречие.

21.10. Это очевидным образом следует из задачи 21.4.

21.11. Пусть $P(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$. Выберем натуральное число k так, что число 10^k больше любого из чисел b_0, b_1, $\ldots$, b_m. Тогда в десятичной записи числа $P(10^k)$ сначала идут цифры числа b_m, затем нули, затем цифры числа b_{m-1}, затем нули и т.д. Для любого натурального числа l десятичная запись числа $P(10^{k+l})$ устроена аналогично. У всех этих чисел сумма цифр одна и та же.

21.12. Пусть a — первая и вторая цифры, b — третья и четвёртая. Тогда данное число равно $11(b + 100a)$, поэтому $b + 100a = 11x^2$ для некоторого натурального числа x. Кроме того, $100 \leqslant b + 100a \leqslant 908$, а значит, $3 \leqslant x \leqslant 9$. Вычисляя квадраты чисел $33, 44, \ldots, 99$, получаем, что ровно одно из них имеет требуемый вид: $88^2 = 7744$.

21.13. Ответ: $n + 1$. Предположим, что число 2^n имеет p цифр, а число 5^n — q цифр. Тогда $10^{p-1} < 2^n < 10^p$ и $10^{q-1} < 5^n < 10^q$. Перемножив эти неравенства, получаем $10^{p+q-2} < 10^n < 10^{p+q}$. Следовательно, $p + q = n + 1$.

21.14. Представим число a/k в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 1. Воспользовавшись тем, что $a = k(a/k)$, получим требуемое представление.

21.15. Ответ: 145. Пусть $N = 100x + 10y + z$ — искомое число, для которого $N = x! + y! + z!$. Число $7! = 5040$ четырёхзначное, поэтому ни одна цифра числа N не превосходит 6. Поэтому число N меньше 700. Но тогда ни одна цифра числа N не превосходит 5, поскольку $6! = 720$. Неравенство $3 \cdot 4! = 72 < 100$ показывает, что хотя бы одна цифра числа N равна 5. При этом $x \neq 5$, поскольку $3 \cdot 5! = 360 < 500$. Это неравенство показывает также, что $x \leqslant 3$. Более того, $x \leqslant 2$, поскольку $3! + 2 \cdot 5! = 246 < 300$. Число 255 не удовлетворяет условию задачи, а если лишь одна цифра искомого числа равна 5, то $x \leqslant 1$, поскольку $2! + 5! + 4! = 146 < 200$. Так как $1! + 5! + 4! = 145 < 150$, получаем $y \leqslant 4$. Следовательно, $z = 5$. Учитывая, что $x = 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 4$, находим единственное решение $N = 145$.

21.16. Ответ: цифра 7. Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99 - 9 = 90$, трёхзначных $999 - 99 - 9 = 900$, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные $90 \cdot 2 = 180$ мест, трёхзначные $900 \cdot 3 = 2700$ мест, четырёхзначные $9000 \cdot 4 = 36\,000$ мест, пятизначные $90000 \cdot 5 = 450\,000$ мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит пятизначному числу.

Цифры, принадлежащие не более чем четырёхзначным числам, имеют номера от 1 до $9 + 180 + 2700 + 36\,000 = 38\,889$. Разность $206\,788 - 38\,889 = 167\,899$ нужно разделить на 5 с остатком: $167\,899 = 5 \cdot 33\,579 + 4$. Интересующая нас цифра принадлежит 33 580-му пятизначному числу, т.е. числу 43 579 (первое пятизначное число — это число 10 000). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 4-м месте.

21.17. Длина периода десятичной записи дроби n/p равна наименьшему

натуральному числу d, для которого $n(10^d - 1)$ делится на p. Числа n и p взаимно простые, поэтому $n(10^d - 1)$ делится на p тогда и только тогда, когда $10^d - 1$ делится на p.

21.18. Длина периода числа p равна наименьшему натуральному числу d, для которого $10^d - 1$ делится на p. Согласно малой теореме Ферма (задача 31.1) $10^{p-1} - 1$ делится на p. Пусть $p-1 = ad+r$, где $0 \leqslant r < d$. Требуется доказать, что $r = 0$. Предположим, что $r > 0$. Тогда $10^{p-1} = (10^d)^a 10^r \equiv 10^r \pmod p$, поэтому $10^r \equiv 1 \pmod p$. Это противоречит минимальности числа d.

21.19. Будем делить 1 на p столбиком. В результате периодически будут повторяться некоторые остатки. Например, при делении 1 на 7 периодически повторяются остатки 1, 3, 2, 6, 4, 5. В случае, когда длина периода равна $p-1$, в этой последовательности встречаются все возможные остатки $1, 2, \ldots, p-1$.

Вернёмся к примеру дробей со знаменателем 7. Деление в столбик показывает, что $1/7 = 0,(142857)$. Вслед за остатком 1 встречается остаток 3. Это означает, что десятичная запись дроби $3/7$ получается из десятичной записи дроби $1/7$ вычёркиванием первой цифры после нуля. Дробь $2/7$ получается вычёркиванием первых двух цифр, дробь $6/7$ — первых трёх и т.д.

21.20. Число $p-1$ чётно; запишем его в виде $p-1 = 2k$. Период дроби $1/p$, записанный как натуральное число, имеет вид $a \cdot 10^k + b$. Требуется доказать, что $a + b = 10^k - 1$.

Число $10^{2k} - 1 = (10^k - 1)(10^k + 1)$ делится на p. При этом $10^k - 1$ не делится на p, поскольку иначе длина периода числа p была бы меньше $2k$. Следовательно, $10^k + 1$ делится на p.

Ясно, что $10^{2k} - 1 = (a \cdot 10^k + b) \cdot p$. Поэтому число $a \cdot 10^k + b = (10^k - 1)\dfrac{10^k + 1}{p}$ делится на $10^k - 1$. Далее, $a + b \equiv a \cdot 10^k + b \pmod{10^k - 1}$, поэтому $a+b$ делится на $10^k - 1$. Кроме того, $a + b < 2(10^k - 1)$, поэтому $a + b = 10^k - 1$.

21.21. Пусть длина периода простого числа p равна d. Это означает, что d — наименьшее натуральное число, для которого $10^d - 1$ делится на p. Ясно, что $10^d - 1 = 9R_d$, где R_d — репьюнит, содержащий d единиц. Если p — простое число, отличное от 3, то $9R_d$ делится на p тогда и только тогда, когда R_d делится на p.

21.22. Если p — простое число, отличное от 2 и 5, то число $10^{p-1} - 1$ делится на p (задача 31.1). Это число имеет вид $\underbrace{99\ldots9}_{p-1}$. Поэтому если $p \neq 3$, то число $\underbrace{11\ldots1}_{p-1}$ тоже делится на p.

21.23. Выберем k так, что $d^k \leqslant n < d^{k+1}$. Положим $a_k = [n/d^k]$. Тогда $1 \leqslant a_i \leqslant d - 1$ и $n = a_k d^k + n'$, где $0 \leqslant n' < d^k$. Если $n' \neq 0$, то выберем $l < k$ так, что $d^l \leqslant n' < d^{l+1}$, и положим $a_l = [n'/d^l]$ и $a_{l+1} = \ldots = a_{k-1} = 0$

(если $l < k-1$). Тогда $n = a_k d^k + a_l d^l + n''$. Для n'' поступаем аналогичным образом и т.д.

Число a_k определяется единственным образом. Действительно, если $n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_k d^k$, то $d^k \leqslant n \leqslant (d-1) + d(d-1) + \ldots + d^k(d-1) = d^{k+1} - 1 < d^{k+1}$. Все остальные a_l число тоже определяются однозначно.

21.24. Пусть $n = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot 2 + b_0$. Тогда $a_0 = b_0$ и $n_1 = b_k 2^{k-1} + b_{k-1} 2^{k-2} + \ldots + b_1$. Поэтому $a_1 = b_1$ и $n_2 = b_k 2^{k-2} + b_{k-1} 2^{k-3} + \ldots + b_2$ и т.д.

21.25. Каждое число от 0 до $2^{n+1} - 1$ можно единственным образом представить в виде суммы различных чисел 0, 1, 2, 2^2, ..., 2^n. Поэтому слагаемое x^m, $0 \leqslant m \leqslant 2^{n+1} - 1$, при раскрытии скобок в указанном произведении встречается ровно один раз.

21.26. Ясно, что $(1+x)^2 \equiv 1 + x^2 \pmod 2$. Поэтому индукция по m показывает, что $(1+x)^{2^m} \equiv 1 + x^{2^m} \pmod 2$. Пусть $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_d}$, где $0 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_d$. Тогда

$$(1+x)^n = (1+x)^{2^{m_1}} (1+x)^{2^{m_2}} \ldots (1+x)^{2^{m_d}} \equiv$$
$$\equiv (1 + x^{2^{m_1}})(1 + x^{2^{m_2}}) \ldots (1 + x^{2^{m_d}}) \pmod 2.$$

Все члены, которые получаются при раскрытии скобок в последнем выражении, различны. Их количество равно 2^d, причём коэффициент при каждом члене равен 1.

21.27. а) Пусть d_k — нечётное число с наибольшим номером k. Тогда одно из чисел a_k, b_k, c_k равно 1, например $a_k = 1$. Начинающий берёт из первой кучки камни так, чтобы числа a_{k+1}, a_{k+2}, ... не изменились, а каждое из чисел d_k, d_{k-1}, d_{k-2}, ..., d_0 стало чётным. В частности, число a_k изменяется: оно становится равно 0; это означает, что первый игрок действительно берёт по крайней мере один камень.

Второй игрок любым своим ходом обязательно сделает одно из чисел d_i нечётным, поэтому первый игрок снова сможет применить ту же самую стратегию.

Игра закончится за конечное число ходов. При этом после хода второго игрока в какой-то кучке обязательно остаётся хотя бы один камень. Поэтому второй игрок выиграть не может.

б) После первого хода начинающего хотя бы одно из чисел d_i станет нечётным, поэтому второй игрок может воспользоваться той же самой стратегией, которой в случае а) пользовался первый игрок.

21.28. Пусть $n = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^k a_k$ — двоичная запись числа n.

Тогда

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{2}\right] &= a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \ldots + 2^{k-1}a_k\\ \left[\frac{n}{2^2}\right] &= a_2 + 2a_3 + \ldots + 2^{k-2}a_k\\ \left[\frac{n}{2^3}\right] &= a_3 + \ldots + 2^{k-3}a_k\\ &\ldots\ldots\\ \left[\frac{n}{2^k}\right] &= a_k\end{aligned}$$

Поэтому

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] = \\ = (2-1)a_1 + (2^2-1)a_2 + (2^3-1)a_3 + \ldots + (2^k-1)a_k = \\ = n - (a_0 + a_1 + \ldots + a_k).$$

21.29. В d-ичной системе счисления, где $d = 10^{100}$, мы получаем последовательность натуральных чисел, которые не содержат цифры $c = \underbrace{11\ldots1}_{100}$. Как и в задаче 21.8, получаем $a_n \geqslant d^k$ для некоторого $n \leqslant (d-1)^k$. В таком случае $a_n/n \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{d-1}\right)^k$.

21.30. Легко видеть, что $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] = 0$ при $k > m$ и

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{p^m}\right] &= a_m,\\ \left[\frac{n}{p^{m-1}}\right] &= a_mp + a_{m-1},\\ &\ldots\ldots\\ \left[\frac{n}{p}\right] &= a_mp^{m-1} + a_{m-1}p^{m-2} + \ldots + a_1.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^m}\right] = \\ = a_m(1 + p + \ldots + p^{m-1}) + a_{m-1}(1 + p + \ldots + p^{m-2}) + \ldots + a_1 = \\ = a_m\frac{p^m - 1}{p-1} + a_{m-1}\frac{p^{m-1}-1}{p-1} + \ldots + a_1\frac{p-1}{p-1} = \\ = \frac{a_mp^m + a_{m-1}p^{m-1} + \ldots + a_1p + a_0 - (a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0)}{p-1}.$$

21.31. Напомним, что наибольшая степень простого числа p, на которую делится $n!$, равна $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$. Поэтому согласно задаче 21.30 наибольшая степень числа p, на которую делится $\binom{n+m}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, равна

$$\frac{m+n-s(m+n)}{p-1} - \frac{m-s(m)}{p-1} - \frac{n-s(n)}{p-1} = \frac{s(m)+s(n)-s(m+n)}{p-1},$$

где $s(m)$ — сумма цифр числа m в p-ичной системе счисления.

Остаётся доказать, что $s(m+n) = s(m)+s(n)-(p-1)k$, где k — количество переносов при сложении чисел m и n. При каждом переносе сумма цифр уменьшается на $p-1$: вместо $p+a$ получается $1+a$.

21.32. Согласно задаче 14.27 $(1+x)^p \equiv 1+x^p \pmod p$. Индукцией по k получаем $(1+x)^{p^k} \equiv 1+x^{p^k} \pmod p$. Значит,

$$\begin{aligned}(1+x)^b &= (1+x)^{b_0+b_1p+\ldots+b_mp^m} = \\ &= (1+x)^{b_0}(1+x)^{b_1p}\ldots(1+x)^{b_mp^m} \equiv \\ &\equiv (1+x)^{b_0}(1+x^p)^{b_1}\ldots(1+x^{p^m})^{b_m} \equiv \\ &\equiv \prod_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{b_i}\binom{b_i}{k}x^{kp^i} \pmod p.\end{aligned}$$

Поэтому коэффициент при $x^a = x^{a_0+a_1p+\ldots+a_mp^m}$ в выражении для $(1+x)^b$ по модулю p равен $\binom{b_0}{a_0}\binom{b_1}{a_1}\ldots\binom{b_m}{a_m}$. С другой стороны, он равен $\binom{b}{a}$.

21.33. Ответ: система с основанием 3. С помощью $m = dn$ цифр мы можем записать $d^{m/d}$ чисел. Поэтому нужно доказать, что $3^{m/3} \geqslant d^{m/d}$, т.е. $3^d \geqslant d^3$ для любого натурального d. Это неравенство доказано в решении задачи 13.11.

21.34. Согласно задаче 13.5 $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! < (k+1)!$, поэтому для данного n число k определяется однозначно. А именно, должны выполняться неравенства $k! \leqslant n < (k+1)!$. Затем выбираем a_k так, чтобы выполнялись неравенства $a_kk! \leqslant n < (a_1+1)k!$. Тогда $a_kk! \leqslant n < (k+1)!$, поэтому $a_k \leqslant k$. Кроме того, $n - a_kk! < (a_k+1)k! - a_kk! = k!$. Поэтому для числа $n - a_kk!$ можно повторить те же самые рассуждения.

21.35. Предположим, что требуемое равенство имеет место. Домножив обе части равенства на $n!$, получим равенство вида $\frac{n!p}{q} = nX + x_n$, где X — целое число. Таким образом, $\frac{n!p}{q}$ — целое число и x_n — остаток от деления этого числа на n. Отметим, что если число $\frac{n!p}{q}$ целое и $m > n$, то число

$\frac{m!p}{q}$ делится на m, поэтому $x_m = 0$. Ясно также, что если число n достаточно велико, то $n!$ делится на q. Таким образом, числа n и x_n определены однозначно. Аналогично получаем, что x_{n-1} — это остаток от деления числа $\frac{1}{n}\left(\frac{n!p}{q} - x_n\right)$ на $n-1$ и т.д. В конце остаётся целое число x_1.

Глава 22.

Графы

Графом называют набор точек (называемых *вершинами* графа), некоторые из которых соединены *рёбрами*. При этом нас интересует только то, какие именно пары точек соединены рёбрами. Многие задачи естественно формулируются на языке графов.

Граф называют *связным*, если для любых его вершин v и v' найдётся последовательность вершин $v_1 = v$, v_2, v_3, …, $v_n = v'$, в которой любые две соседние вершины v_i и v_{i+1} соединены ребром.

Циклом называют последовательность рёбер v_1v_2, v_2v_3, …, $v_{n-1}v_n$, v_nv_1 $(n \geqslant 3)$.

22.1. Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (Иными словами, в любом графе с шестью вершинами есть либо три вершины, попарно соединённые рёбрами, либо три вершины, попарно не соединённые рёбрами.)

22.2. Докажите, что в любом графе число вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, чётно.

22.3. Дан отрезок OA. Из конца отрезка A выходит 5 отрезков AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5. Из каждой точки B_i могут выходить ещё пять новых отрезков, или ни одного нового отрезка и т.д. Может ли число свободных концов построенных отрезков равняться 1001? (Под свободным концом отрезка понимаем точку, принадлежащую только одному отрезку, кроме, возможно, точки O).

22.4. а) Докажите, что граф, в котором из каждой вершины выхо-

дит чётное число рёбер, можно представить в виде объединения непересекающихся циклов.

б) Докажите, что граф, в котором количество вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, равно $2n$, можно представить в виде объединения непересекающихся циклов и n несамопересекающихся путей, идущих по рёбрам.

22.1. Обходы графов

Назовём *обходом* графа путь, идущий по рёбрам графа и проходящий по каждому ребру ровно один раз.

22.5. Докажите, что если обход графа существует, то количество вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, не превосходит двух. (*Эйлер*)

22.6. Докажите, что если граф связен и количество вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, не превосходит двух, то существует обход этого графа. (*Эйлер*)

22.2. Ориентированные графы

Граф называют *ориентированным*, если на каждом его ребре указано направление движения, т.е. ребро выходит из одной вершины и входит в другую.

22.7. Докажите, что любой связный граф с чётным числом рёбер можно ориентировать так, что из каждой вершины будет выходить чётное число рёбер.

22.3. Паросочетания

Паросочетанием называют набор рёбер графа, не имеющих общих вершин. Паросочетание называют *максимальным*, если в него входит наибольшее возможное число рёбер (т.е. любое паросочетание для данного графа содержит не больше рёбер, чем максимальное паросочетание).

22.8. Докажите, что паросочетание максимально тогда и только тогда, когда в графе нет пути, который идёт по рёбрам графа и обладает

следующими свойствами: 1) из любых двух соседних рёбер пути одно принадлежит паросочетанию, а другое не принадлежит; 2) из начальной и конечной точек пути не выходят рёбра паросочетания; 3) начало и конец — разные вершины. (*Берж*)

22.9. Пусть вершины графа разбиты на два непересекающихся множества X и Y, причём все рёбра идут из X в Y. Докажите, что паросочетание, включающее все вершины множества X, существует тогда и только тогда, когда для любого набора выделенных вершин из множества X количество вершин, соединённых с выделенными вершинами, не меньше количества выделенных вершин. (*Холл*)

22.10. На танцы пришло несколько юношей и несколько девушек, причём каждая девушка знакома ровно с k $(k \geqslant 1)$ юношами и каждый юноша знаком ровно с k $(k \geqslant 1)$ девушками. Докажите, что они могут разбиться на пары так, что в каждой паре будут юноша и девушка, знакомые друг с другом.

Решения

22.1. Пусть v — произвольная вершина графа с шестью вершинами. Среди оставшихся пяти вершин есть либо три вершины, соединённые рёбрами с v, либо три вершины, не соединённые рёбрами с v. Пусть v_1, v_2, v_3 — вершины, соединённые рёбрами с v. Если вершины v_1, v_2, v_3 попарно не соединены рёбрами друг с другом, то они образуют искомую тройку вершин. Если какие-то две из вершин v_1, v_2, v_3 соединены ребром, то вместе с вершиной v они образуют искомую тройку. Для вершин v_1, v_2, v_3, не соединённых рёбрами с вершиной v, рассуждения аналогичны.

22.2. Вычислим двумя способами количество пар, состоящих из ребра и одного из его концов. С одной стороны, это количество равно удвоенному числу рёбер; в частности, оно чётно. С другой стороны, оно равно сумме чисел рёбер, выходящих из всех вершин. Эта сумма чётна, поэтому в неё входит чётное число нечётных слагаемых. А нечётные слагаемые соответствуют как раз тем вершинам, из которых выходит нечётное число рёбер.

22.3. Ответ: да, может. При проведении пяти отрезков из конца отрезка появляются 5 новых свободных концов и пропадает один старый. В результате число свободных концов увеличивается на 4. Поэтому если пятёрки отрезков проведены k раз, то число свободных концов равно $4k + 1$. При $k = 250$ получаем нужное число свободных концов.

22.4. а) Применим индукцию по числу рёбер графа. Для графа с двумя рёбрами утверждение очевидно. Возьмём теперь произвольный граф и будем

идти по его рёбрам, выйдя из некоторой вершины и не проходя дважды по одному и тому же ребру. Из каждой вершины выходит чётное число рёбер, поэтому мы можем продолжать обход до тех пор, пока не попадём в вершину, в которой уже побывали (эта вершина не обязательно та, из которой мы вышли). В результате получится некоторый цикл. Выбросив все рёбра, входящие в этот цикл, мы получим граф с меньшим числом рёбер, в котором снова из каждой вершины выходит чётное число рёбер. По предположению индукции этот граф можно разбить на непересекающиеся циклы.

б) Будем действовать так же, как и в задаче а), но только теперь будем выходить из вершины, из которой выходит нечётное число рёбер. На этот раз у нас либо получится цикл, либо получится несамопересекающийся путь, соединяющий две вершины, из которых выходит нечётное число рёбер. Можно выбросить этот цикл или путь и к полученному графу применить предположение индукции.

22.5. Через каждую вершину графа, отличную от начала или конца обхода, проходит чётное число рёбер.

22.6. Согласно задаче 22.4 данный граф можно представить в виде объединения непересекающихся циклов и, возможно, одного несамопересекающегося пути. Если граф состоит только из несамопересекающегося пути или только из цикла, то всё ясно. В противном случае есть ещё по крайней мере один цикл. Из связности графа следует, что есть цикл, одна из вершин которого лежит на несамопересекающемся пути (если из каждой вершины выходит чётное число рёбер, то вместо несамопересекающегося пути берётся произвольный цикл). Если выбросить дополнительный цикл, то получится граф, для которого обход существует по предположению индукции. Поэтому можно поступить следующим образом. Будем обходить полученный граф до тех пор, пока не дойдём до вершины, принадлежащей дополнительному циклу. После этого совершим обход дополнительного цикла, а затем продолжим обход полученного графа. В результате получим обход исходного графа.

22.7. Сначала ориентируем граф произвольно. Рассмотрим все вершины, из которых выходит нечётное число рёбер. Их число чётно. Действительно, сумма чисел рёбер, выходящих из всех вершин, равна числу рёбер, поэтому она чётна. Таким образом, если есть хотя бы одна вершина v_1, из которой выходит нечётное число рёбер, то есть ещё хотя бы одна такая вершина v_2. Пользуясь связностью, соединим их набором рёбер. Среди всех таких наборов возьмём тот, в котором число рёбер наименьшее (тогда в нём не будет циклов). Изменим ориентации всех рёбер этого набора на противоположные, а ориентации всех остальных рёбер оставим без изменений. После такой операции из вершин v_1 и v_2 будет выходить чётное число рёбер, а из всех остальных вершин будет выходить столько же рёбер, сколько и раньше. Несколькими такими операциями мы уничтожим все вершины, из которых выходит нечётное число рёбер.

22.8. Предположим сначала, что в графе есть путь, обладающий указанными свойствами. Из начальной и конечной точек этого пути выходят рёбра, не принадлежащие паросочетанию, поэтому путь состоит из нечётного числа рёбер $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{2n-1}v_{2n}$. Построим новое паросочетание, выбросив рёбра $v_2v_3, v_4v_5, \ldots$ и добавив рёбра $v_1v_2, v_3v_4, \ldots$ (Это можно сделать, потому что из вершин v_1 и v_{2n} по условию не выходят рёбра паросочетания.) Новое паросочетание содержит на одно ребро больше, чем старое, что противоречит максимальности.

Предположим теперь, что есть два паросочетания M и M', причём M' содержит больше рёбер, чем M. Построим для паросочетания M путь, обладающий требуемыми свойствами. Рассмотрим только те рёбра, которые входят ровно в одно из паросочетаний M и M'. Любой путь, идущий по таким рёбрам, обладает свойством (1), поскольку если из какой-то вершины выходят два из рассматриваемых рёбер, то одно из них принадлежит M, а другое принадлежит M' и не принадлежит M. Рассмотрим все пути максимальной длины. Среди них обязательно найдётся путь, у которого рёбер паросочетания M' больше, чем рёбер паросочетания M; это следует из того, что паросочетание M' содержит больше рёбер, чем M. Этот путь, очевидно, обладает свойством (3). Легко убедиться, что он обладает и свойством (2). Действительно, пусть v — конец или начало этого пути. Из v выходит ребро паросочетания M'. Из максимальности пути следует, что из v не выходит ребра, которое принадлежит M и не принадлежит M'. Но ребро, которое одновременно принадлежит M и M', тоже не может выходить из v, потому что из v не могут выходить два ребра паросочетания M'.

22.9. В одну сторону утверждение очевидно: если паросочетание существует, то количество вершин из множества Y, соединённых с выделенными вершинами даже только рёбрами паросочетания, уже равно количеству выделенных вершин.

Предположим теперь, что указанное условие выполняется, но нужного паросочетания не существует. Чтобы прийти к противоречию, возьмём максимальное паросочетание M. По предположению в X есть вершина x, из которой не выходит рёбер паросочетания M. Рассмотрим все пути, идущие из вершины x, рёбра которых поочерёдно то лежат в M, то не лежат. Пусть X' и Y' — множества концов этих путей, лежащих в X и Y. Согласно задаче 22.8 из максимальности M следует, что из каждой вершины множества Y' выходит ребро паросочетания M; очевидно также, что из каждой вершины множества X', кроме вершины x, выходит ребро паросочетания M. Пусть X'' — это множество X' без вершины x.

Вершины множеств X'' и Y' разбиты на пары — концы рёбер паросочетания M. В частности, X'' и Y' состоят из одинакового числа вершин. Кроме того, вершины множества X' соединены рёбрами только с вершинами множества Y'. Действительно, если вершина y соединена с некоторой вершиной

множества X', то вершина y соединена с вершиной x путём, рёбра которого поочерёдно то лежат в M, то не лежат. Но в таком случае вершина y лежит в Y'. В результате получаем, что количество вершин, соединённых рёбрами с вершинами множества X', на 1 меньше количества вершин множества X'. Приходим к противоречию.

22.10. Прежде всего покажем, что юношей пришло ровно столько же, сколько девушек. Пусть количество юношей равно a, количество девушек равно b, а количество всех пар знакомых друг с другом юношей и девушек равно n. Тогда $ka = n = kb$, поэтому $a = b$.

Выберем произвольную группу из a_1 юношей. Пусть количество тех девушек, которые знакомы хотя бы с одним из этих юношей, равно b_1. Пусть, далее, n_1 — количество пар знакомых юношей и девушек, в которых юноша — один из выбранных a_1, n_2 — количество пар знакомых юношей и девушек, в которых девушка — одна из выбранных b_1 девушек. Ясно, что $n_2 \geqslant n_1$, $n_1 = ka_1$ и $n_2 = kb_1$. Поэтому $b_1 \geqslant a_1$. Это неравенство позволяет воспользоваться результатом задачи 22.9.

Глава 23.

Комплексные числа

Комплексным числом называют выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$. Если $z = a + bi$, то числа a и b называют соответственно *вещественной* и *мнимою* частью числа z (обозначение: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$), а комплексное число $a - bi$ называют числом, *сопряжённым* к числу z (обозначение: $\bar{z}$). Перемножают комплексные числа по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов, заменяя каждый раз i^2 на -1, т.е.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Каждое вещественное число a можно рассматривать как комплексное число $a + 0i$.

Если на плоскости выбрать систему координат, то можно установить взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости, при котором числу $a + bi$ соответствует точка с координатами (a, b). При этом умножение на комплексное число z приобретает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть r — расстояние от нуля до z, φ — угол, на который нужно повернуть вокруг нуля луч, содержащий положительные вещественные числа, чтобы получить луч Oz. Тогда умножение на число z — это композиция гомотетии с коэффициентом r (с центром в нуле) и поворота на угол φ. Числа r и φ называют соответственно *модулем* и *аргументом* числа z (обозначение: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$). По-другому геометрическую интерпретацию произведения комплексных чисел можно сформулировать

так: при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Зная геометрическую интерпретацию комплексных чисел, легко научиться их делить: для этого нужно делить модули и вычитать аргументы. Деление можно ввести также и чисто алгебраически. Для каждого комплексного числа $z = a + bi$ имеет место очевидное равенство

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Поэтому $w/z = w\bar{z}/|z|^2$.

23.1. Тождества и неравенства для комплексных чисел

23.1. Пусть a и b — комплексные числа. Докажите, что $\mathrm{Re}(a\bar{b}) = \mathrm{Re}(\bar{a}b)$.

23.2. Пусть a и b — комплексные числа. Докажите, что

$$|a + b|^2 - |a - b|^2 = 4\,\mathrm{Re}(a\bar{b}).$$

23.3. Пусть z и w — комплексные числа. Докажите, что

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

23.4. Пусть a, b и c — комплексные числа. Докажите, что следующие неравенства эквивалентны:

1) $\mathrm{Re}[(a - c)(\bar{c} - \bar{b})] \geqslant 0$;

2) $\left|c - \dfrac{a + b}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}|a - b|$.

23.2. Формула Муавра

23.5. Докажите, что $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ для любого натурального n (*формула Муавра*).

23.6. а) Докажите, что числа $\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1}$, $\ldots$, $\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями многочлена

$$\binom{2n+1}{1}(1-x)^n - \binom{2n+1}{3}(1-x)^{n-1}x + \binom{2n+1}{5}(1-x)^{n-2}x^2 - \ldots + (-1)^n x^n.$$

б) Докажите, что числа $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1}$, $\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1}$, $\ldots$, $\operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями многочлена

$$\binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+1}{5}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n.$$

23.7. Используя результат задачи 23.6, вычислите следующие суммы и произведения:

а) $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1}$;

б) $\dfrac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}$;

в) $\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \ldots \sin \frac{n\pi}{2n+1}$.

23.3. Корни из единицы

Корнем n-й степени из единицы называют комплексное число ε, для которого $\varepsilon^n = 1$. *Примитивным корнем n-й степени из единицы* называют комплексное число ε, для которого $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

23.8. а) Докажите, что

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right).$$

б) Докажите, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

в) Докажите, что

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

23.9. а) Докажите, что

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{2n+1} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{2n+1} + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + 1\right).$$

б) Докажите, что

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

23.10. Докажите, что примитивные корни n-й степени из единицы — это числа $\cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}$, где число m взаимно просто с n.

23.11. Пусть ε — примитивный корень n-й степени из единицы. Докажите, что

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)k} = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n-1; \\ n & \text{при } k = n. \end{cases}$$

23.12. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — вершины правильного n-угольника на комплексной плоскости, z_0 — его центр. Докажите, что если $P(z)$ — многочлен степени не выше $n-1$, то $P(z_1) + \ldots + P(z_n) = nP(z_0)$.

23.13. Пусть ε — примитивный корень степени n из единицы. Докажите, что $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)\ldots(1-\varepsilon^{n-1}) = n$.

23.14. Докажите, что произведение длин всех сторон и диагоналей, проведённых из одной вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равно n.

23.15. а) Докажите, что многочлен $P(x) = x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$ делится на многочлен $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ тогда и только тогда, когда n не делится на 5.

б) Докажите, что если числа m и n взаимно простые, то $x^{(m-1)n} + \ldots + x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^{m-1} + \ldots + x^2 + x + 1$.

23.16. Докажите, что

$$1 - \cos^n\frac{\pi}{n} + \cos^n\frac{2\pi}{n} - \cos^n\frac{3\pi}{n} + \ldots + (-1)^{n-1}\cos^n\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

23.17. Дано $2n$ чисел $a_{-n}, a_{-n+1}, \ldots, a_{n+1}$. Рассмотрим $2n$ чисел

$$b_q = \frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{p=-n}^{n-1} a_p\varepsilon^{pq}, \quad q = -n, -n+1, \ldots, n+1,$$

где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Докажите, что

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{q=-n}^{n-1} b_q \varepsilon^{-pq}.$$

23.4. Корни многочленов

23.18. Докажите, что если z_0 — корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\bar{z}_0$ тоже корень этого многочлена.

23.19. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c многочлен $x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.

23.20. Дан многочлен $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Найдите многочлен, корнями которого являются: а) квадраты корней этого многочлена; б) кубы корней этого многочлена.

23.21. При каких натуральных n $a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)$ делится на $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$?

23.22. а) Докажите, что многочлен $P_n(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$ тогда и только тогда, когда $n = 6k \pm 1$.

б) Докажите, что $P_n(x)$ делится на $(x^2+x+1)^2$ тогда и только тогда, когда $n = 6k + 1$.

в) Докажите, что $P_n(x)$ не делится на $(x^2 + x + 1)^3$.

Решения

23.1. Ясно, что $\operatorname{Re}(a\bar{b}) = \operatorname{Re}(\overline{a\bar{b}}) = \operatorname{Re}(\bar{a}b)$.

23.2. Ясно, что $|a \pm b|^2 = (a \pm b)(\bar{a} \pm \bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 \pm (a\bar{b} + \bar{a}b)$. Далее, число $a\bar{b} + \bar{a}b = a\bar{b} + \overline{a\bar{b}}$ вещественное, поэтому оно равно $\operatorname{Re}(a\bar{b} + \bar{a}b) = 2\operatorname{Re}(a\bar{b})$.

23.3. Пусть $z = a + ib$ и $w = c + id$, где a, b, c, d — вещественные числа. Тогда

$$|z \pm w|^2 = (a \pm c)^2 + (b \pm d)^2 = \\ = a^2 \pm 2ac + c^2 + b^2 \pm 2bd + d^2.$$

Поэтому $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

23.4. Ясно, что

$$\operatorname{Re}[(a-c)(\bar{c} - \bar{b})] = -\operatorname{Re}(a\bar{b}) - |c|^2 + \operatorname{Re}(a\bar{c} + \bar{b}c)$$

и

$$\frac{1}{4}|a-b|^2 - \left|c - \frac{a+b}{2}\right|^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(|a-b|^2 - |a+b|^2\right) - |c|^2 + \mathrm{Re}[c(\bar{a}+\bar{b})] =$$
$$= -\mathrm{Re}(a\bar{b}) - |c|^2 + \mathrm{Re}(a\bar{c} + \bar{b}c).$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re}[(a-c)(\bar{c}-\bar{b})] = \frac{1}{4}|a-b|^2 - \left|c - \frac{a+b}{2}\right|^2.$$

23.5. Модуль числа $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ равен 1, а его аргумент равен φ. Поэтому модуль числа z^n равен 1, а его аргумент равен $n\varphi$.

23.6. а) Согласно формуле Муавра $\cos(2n+1)\alpha + i\sin(2n+1)\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n+1}$. Поэтому

$$\sin(2n+1)\alpha = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\alpha\sin\alpha - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots + (-1)^n\sin^{2n+1}\alpha. \quad (1).$$

Значит, числа 0, $\pm\sin\frac{\pi}{2n+1}, \ldots, \pm\sin\frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями многочлена

$$\binom{2n+1}{1}(1-y^2)^n y - \binom{2n+1}{3}(1-y^2)^{n-1}y^3 + \ldots + (-1)^n y^{2n+1}.$$

После деления этого многочлена на y и замены $x = y^2$ получаем требуемое.

б) Из формулы (1) следует, что

$$\sin(2n+1)\alpha = \sin^{2n+1}\alpha\left(\binom{2n+1}{1}\mathrm{ctg}^{2n}\alpha - \binom{2n+1}{3}\mathrm{ctg}^{2n-2}\alpha + \ldots + (-1)^n\right).$$

Поэтому числа $\pm\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2n+1}, \ldots, \pm\mathrm{ctg}\frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями многочлена

$$\binom{2n+1}{1}y^{2n} - \binom{2n+1}{3}y^{2n-2} + \ldots + (-1)^n.$$

23.7. а) Рассматриваемая сумма равна

$$\binom{2n+1}{3}\Big/\binom{2n+1}{1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

б) Тождество $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha$ показывает, что рассматриваемая сумма равна $\frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2n(n+1)}{3}$.

в) Квадрат рассматриваемого произведения с точностью до знака равен отношению свободного члена многочлена из задачи 23.6 а) к коэффициенту

при x^n. Свободный член равен $\binom{2n+1}{1}$; коэффициент при x^n с точностью до знака равен $\binom{2n+1}{1}+\binom{2n+1}{3}+\ldots+\binom{2n+1}{2n+1}$. Если к последней сумме прибавить $\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{2}+\ldots+\binom{2n+1}{2n}$, то в результате получим 2^{2n+1}. Но обе эти суммы равны, поскольку $\binom{2n+1}{2k+1}=\binom{2n+1}{2n-2k}$. Значит, квадрат рассматриваемого произведения равен $\frac{2n+1}{2^{2n}}$. Ясно также, что рассматриваемое произведение положительно.

23.8. а) Корни $2n$-й степени из единицы, отличные от ±1, имеют вид $\cos\frac{k\pi}{n}\pm i\sin\frac{k\pi}{n}$, где $k=1,\,2,\,\ldots,\,n-1$. Остаётся заметить, что

$$\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1.$$

б) Воспользуемся равенством из задачи а), предварительно заметив, что

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1.$$

В результате получим

$$2^{n-1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(1-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=n.$$

Заметим теперь, что $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Ясно также, что рассматриваемое произведение синусов положительно.

в) Следует из б), поскольку $\sin\frac{k\pi}{2n}=\cos\frac{(n-k)\pi}{2n}$.

23.9. Обе задачи решаются аналогично задаче 23.8. Нужно лишь заметить, что число -1 не является корнем степени $2n+1$ из единицы.

23.10. Для любого целого числа m число $z=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}$ является корнем n-й степени из единицы. При этом $z^k=\cos\frac{2km\pi}{n}+i\sin\frac{2km\pi}{n}$. Чтобы число z было примитивным корнем из единицы, нужно, чтобы все числа m, $2m,\,\ldots,\,(n-1)m$ не делились на n. Это эквивалентно тому, что m взаимно просто с n.

23.11. Если $1\leqslant k\leqslant n-1$, то $\varepsilon^k\neq1$, поэтому $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\ldots+\varepsilon^{(n-1)k}=$ $=\frac{\varepsilon^{nk}-1}{\varepsilon-1}=\frac{1-1}{\varepsilon-1}=0$. При $k=n$ получаем сумму n слагаемых, каждое из которых равно 1.

23.12. Пусть ε — примитивный корень n-й степени из единицы. Тогда $z_m=z_0+a\varepsilon^m$ при $m=1,\,\ldots,\,n$. Поэтому

$$z_m^k=(z_0+a\varepsilon^m)^k=z_0^k+\binom{m}{1}z_0^{k-1}a\varepsilon^m+\binom{m}{2}z_0^{k-2}a^2\varepsilon^{2m}+\ldots+a^k\varepsilon^{km}.$$

Но $\sum_{m=0}^{n-1}\varepsilon^{km} = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (задача 23.11). Поэтому требуемое равенство выполняется для многочлена $Q(z) = z^k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Значит, оно выполняется и для любого многочлена $P(z)$ степени не выше $n-1$.

23.13. Ясно, что $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1} = \dfrac{x^n-1}{x-1} = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\ldots(1-\varepsilon^{n-1})$. Равенство $(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\ldots(1-\varepsilon^{n-1}) = 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$ верно для всех x, в том числе и для $x=1$.

23.14. Можно считать, что вершины правильного n-угольника — точки 1, ε, ε^2, $\ldots$, ε^{n-1}, где ε — примитивный корень n-й степени из единицы. Длины сторон и диагоналей, проведённых из точки 1, равны $|1-\varepsilon|$, $|1-\varepsilon^2|$, $\ldots|1-\varepsilon^{n-1}|$. Согласно задаче 23.13 их произведение равно n.

23.15. а) Корни многочлена $P(x)$ — это примитивные корни 5-й степени из единицы. Поэтому $Q(x)$ делится на $P(x)$ тогда и только тогда, когда все примитивные корни 5-й степени из единицы являются корнями многочлена $Q(x)$. Пусть ε — примитивный корень 5-й степени из единицы. Если n делится на 5, то $Q(\varepsilon) = 5$. А если n не делится на 5, то $Q(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon^{5n}-1}{\varepsilon^n-1} = 0$.

б) Ясно, что
$$\frac{x^{(m-1)n}+\ldots+x^{2n}+x^n+1}{x^{m-1}+\ldots+x^2+x+1} = \frac{(x^{mn}-1)(x-1)}{(x^m-1)(x^n-1)}.$$
Многочлен $(x^m-1)(x^n-1)$ имеет двукратный корень 1, а остальные его корни — корни степени m и n из единицы, отличные от 1; все они различны, поскольку числа m и n взаимно простые. Многочлен $(x^{mn}-1)(x-1)$ тоже имеет двукратный корень 1, поэтому остаётся проверить, что любой корень степени m или n из единицы является корнем многочлена $x^{mn}-1$, но это очевидно.

23.16. Пусть $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi}{n}$. Тогда $\varepsilon^n = -1$, поэтому рассматриваемая сумма равна
$$\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon^{nj}\left(\frac{\varepsilon^j+\varepsilon^{-j}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon^{nj}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^{j(n-2k)} =$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-1}(\varepsilon^2)^{j(n-k)}.$$
Число ε^2 является примитивным корнем степени n из единицы, поэтому согласно задаче 23.11 $\sum_{j=0}^{n-1}(\varepsilon^2)^{j(n-k)} = n$ при $k=0$ или n, а при $1 \leqslant k < n$ эта сумма равна нулю. Таким образом, исходная сумма равна $\dfrac{1}{2^n}\left(n\binom{n}{0} + n\binom{n}{n}\right) = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

23.17. Рассмотрим число
$$s_p = \sqrt{2n}\sum_{q=-n}^{n-1} b_q\varepsilon^{-pq} = \sum_{r=-n}^{n-1} a_r\sum_{q=-n}^{n-1} b_q\varepsilon^{(r-p)q}.$$

Если $r = p$, то $\sum_{q=-n}^{n-1} b_q \varepsilon^{(r-p)q} = 2n$. Если же $r \neq p$, то эта сумма равна нулю. Действительно, ε — примитивный корень $(2n)$-й степени из единицы, поэтому можно воспользоваться задачей 23.11 (сумма там та же самая, поскольку $\varepsilon^{2n} = 1$; слагаемые просто переставляются по циклу). В результате получаем $s_p = 2na_p$. После деления на $2n$ получаем требуемое.

23.18. Пусть $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — вещественные числа. Тогда $\overline{P(z)} = a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \ldots + a_n = P(\bar{z})$. Поэтому если $P(z_0) = 0$, то $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = 0$.

23.19. Если ε — корень многочлена $x^2 + x + 1$, то $\varepsilon^3 = 1$. Поэтому $\varepsilon^{3a} + \varepsilon^{3b+1} + \varepsilon^{3c+2} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

23.20. а) Перемножим многочлены $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$ и $x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \ldots \pm a_n = (x + x_1) \ldots (x + x_n)$. В результате получим многочлен $(x^n + a_2 x^{n-2} + \ldots)^2 - (a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + \ldots)^2 = (x^2 - x_1^2) \ldots (x^2 - x_n^2)$ Положив $y = x^2$, получим требуемый многочлен $y^n + (2a_2 - a_1^2) y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) y^{n-2} + \ldots = (y - x_1^2) \ldots (y - x_n^2)$.

б) Представим данный многочлен в виде $P(x) + xQ(x) + x^2 R(x)$, где $P(x) = a_n + a_{n-3} x^3 + \ldots$, $Q(x) = a_{n-1} + a_{n-4} x^3 + \ldots$, $R(x) = a_{n-2} + a_{n-5} x^3 + \ldots$. Пусть $\omega^3 = 1$ и $\omega \neq 1$. Тогда

$$P(x) + xQ(x) + x^2 R(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n),$$
$$P(x) + \omega x Q(x) + \omega^2 x^2 R(x) = (\omega x - x_1) \ldots (\omega x - x_n),$$
$$P(x) + \omega^2 x Q(x) + \omega x^2 R(x) = (\omega^2 x - x_1) \ldots (\omega^2 x - x_n).$$

Перемножив эти равенства, получим

$$P^3(x) + x^3 Q^3(x) + x^6 R^6(x) - 3x^3 P(x) Q(x) R(x) = (x^3 - x_1^3) \ldots (x^3 - x_n^3).$$

Заменив в многочлене $P^3(x) + x^3 Q^3(x) + x^6 R^6(x) - 3x^3 P(x) Q(x) R(x)$ каждый член x^{3k} на y^k, получим требуемый многочлен.

23.21. Ответ: только при $n = 4$. Легко проверить, что при $n = 4$ результат деления равен $(a - b)(b - c)(a - c)$. Покажем, что при всех остальных натуральных n $a^n(b - c) + b^n(c - a) + c^n(a - b)$ не делится на $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$. Достаточно проверить, что первое выражение не делится на второе при $b = 2$ и $c = 1$, т.е. $a^n - (2^n - 1)a + (2^n - 2)$ не делится на $a^2 + 3a + 7$. При $n = 2$ и 3 это проверяется непосредственно. Пусть теперь $n \geqslant 5$. Квадратное уравнение $a^2 + 3a + 7 = 0$ имеет корни $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{19}}{2}$; модуль каждого из корней равен $\sqrt{7}$. Поэтому достаточно проверить, что если z — комплексное число и $|z| = \sqrt{7}$, то $z^n - (2^n - 1)z + (2^n - 2) \neq 0$. Ясно, что $|z^n - (2^n - 1)z + (2^n - 2)| \geqslant |z^n| - (2^n - 1)|z| - (2^n - 2) = 7^{n/2} - (2^n - 1)\sqrt{7} - 2^n + 2 > 7^{n/2} - 2^n(1 + \sqrt{7}) > 7^{n/2} - 4 \cdot 2^n$, поскольку $\sqrt{7} < 3$. Легко проверить, что $7^{n/2} - 4 \cdot 2^n > 0$ при $n \geqslant 5$. Действительно, $\sqrt{7} > 2$, поэтому достаточно рассмотреть случай $n = 5$. А в этом случае нужно проверить, что $7^5 > (4 \cdot 2^5)^2$.

23.22. а) Многочлен $P_n(x)$ делится на $(x^2+x+1)^2$ тогда и только тогда, когда $P_n(\varepsilon)=0$, где ε — примитивный корень 3-й степени из единицы. Равенство $\varepsilon^2=-\varepsilon-1$ показывает, что выражение $P_n(\varepsilon)=(-\varepsilon^2)^n-\varepsilon^n-1$ зависит только от остатка от деления n на 6. При этом $P_0(\varepsilon)=-1$, $P_1(\varepsilon)= =-\varepsilon^2-\varepsilon-1=0$, $P_2(\varepsilon)=\varepsilon-\varepsilon^2-1\neq 0$, $P_3(\varepsilon)=-3$, $P_4(\varepsilon)=\varepsilon^2-\varepsilon-1\neq 0$, $P_5(\varepsilon)=-\varepsilon-\varepsilon^2-1=0$.

б) Многочлен $P_n(x)$ делится на $(x^2+x+1)^2$ тогда и только тогда, когда $P_n(\varepsilon)=0$ и $P'_n(\varepsilon)=0$, где $P'_n(x)=n\bigl((x+1)^{n-1}-x^{n-1}\bigr)$ — производная многочлена $P_n(x)$. Равенство $P'_n(\varepsilon)=0$ эквивалентно тому, что $(-\varepsilon^2)^{n-1}-\varepsilon^{n-1}=0$, т.е. $\varepsilon^{n-1}=1$. Но $n=6k\pm 1$, поэтому $n=6k+1$.

в) Многочлен $P_n(x)$ делится на $(x^2+x+1)^3$ тогда и только тогда, когда $n=6k+1$ и $P''_n(\varepsilon)=0$, где $P''_n(x)=n(n-1)\bigl((x+1)^{n-2}-x^{n-2}\bigr)$. Таким образом, должно выполняться равенство $(\varepsilon+1)^{n-2}=\varepsilon^{n-2}$, т.е. $-\varepsilon^{2(n-2)}= =\varepsilon^{n-2}$. Следовательно, $\varepsilon^{n-2}=-1$ и $\varepsilon^{2(n-2)}=1$. Но $\varepsilon^{2(n-2)}=\varepsilon^{2(6k-1)}=\varepsilon^{-1}$. Приходим к противоречию.

Глава 24.

Уравнения, разрешимые в радикалах

Вся история решения уравнений 3-й и 4-й степени связана с Италией. Формулу для решения уравнения 3-й степени открыл Сципион дель Ферро (1465 — 1526), но он хранил свои результаты в тайне. В 1536 г. эту формулу переоткрыл Никколо Тарталья (1500 — 1557), готовясь к математическому поединку. После долгих уговоров и клятв хранить всё в тайне Джероламо Кардано (1501 — 1576) выведал у Тартальи приёмы решения кубических уравнений. Кардано нарушил клятву в 1545 г., опубликовав способ решения кубических уравнений в своей книге по алгебре «Ars magna» («Великое искусство»). Кардано писал, что этот способ он узнал от Тартальи и из бумаг дель Ферро. Тарталья, узнав о появлении книги «Ars magna», едва не сошёл с ума от гнева и начал яростную полемику с Кардано. Помимо решения кубических уравнений книга «Ars magna» содержала решение уравнений 4-й степени, полученное Людовико Феррари (1522 — 1565), учеником Кардано.

Долгие поиски решения в радикалах уравнения 5-й степени не привели к успеху. В 1799 г. итальянский врач и математик Паоло Руффини (1765 — 1822) опубликовал доказательство неразрешимости в радикалах общего уравнения 5-й степени, но в этом доказательстве был серьёзный пробел. Полное доказательство неразрешимости уравнения 5-й степени независимо от Руффини получил в 1824 г. молодой норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802 — 1829). А затем Эварист Галуа (1811 — 1832) разработал теорию, позволяющую для каждого

конкретного уравнения выяснить, разрешимо ли оно в радикалах.

24.1. Докажите, что уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ можно привести к виду $y^n + b_2y^{n-2} + \ldots + b_n = 0$ с помощью замены $y = x + c$, где c — некоторое число.

Поэтому достаточно рассмотреть кубические уравнения вида $x^3 + ax + b = 0$ и уравнения 4-й степени вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

24.1. Решение кубических уравнений

24.2. Найдите корни уравнение $x^3 + px + q = 0$, представив их в виде $x = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ и найдя выражения для α и β.

24.3. Решите уравнение $x^3 + px + q = 0$, воспользовавшись тождеством

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z),$$

где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. (Подберите y и z так, что $-3yz = p$ и $y^3 + z^3 = q$.)

24.4. Докажите, что если все корни кубического уравнения $x^3 + ax + b = 0$ действительные, то при вычислении корней по формуле из решения задачи 24.2 обязательно появляются мнимые числа.

24.5. Найдите корень $x_0 = 2$ уравнения $x^3 - x - 6 = 0$ по формуле из решения задачи 24.2.

24.6. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Положим $\alpha = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ и $\beta = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (эти выражения называют *резольвентами Лагранжа*).

а) Докажите, что $3x_1 = \alpha + \beta$, $3x_2 = \omega^2\alpha + \omega\beta$ и $3x_3 = \omega\alpha + \omega^2\beta$.

б) Выразите $\alpha\beta$ и $\alpha^3 + \beta^3$ через p и q.

в) Решите уравнение $x^3 + px + q = 0$.

24.2. Дискриминант кубического многочлена

24.7. Докажите, что многочлен $x^3 + px + q$ имеет кратные корни тогда и только тогда, когда $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = 0$.

24.3. Решение уравнений 4-й степени

24.8. Решите уравнение $x^4+ax^2+bx+c=0$, представив многочлен x^4+ax^2+bx+c в виде разности квадратов двух многочленов.

24.9. Решите уравнение $x^4+ax^2+bx+c=0$, найдя уравнение, которому удовлетворяет сумма двух корней данного уравнения (*Эйлер*).

24.10. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения $x^4+ax^2+bx+c=0$. Положим $\alpha=-(x_1+x_2)(x_3+x_4)$, $\beta=-(x_1+x_3)(x_2+x_4)$ и $\gamma=-(x_1+x_4)(x_2+x_3)$.

а) Выразите x_1, x_2, x_3 и x_4 через $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\gamma}$.

б) Выразите коэффициенты многочлена $(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)$ через a, b, c.

в) Сведите решение уравнения $x^4+ax^2+bx+c=0$ к решению кубического уравнения.

24.4. Другие уравнения, разрешимые в радикалах

24.11. Решите уравнения

$$x^5-10x^3(1-x^2)+5x(1-x^2)^2=a,$$
$$x^7-21x^5(1-x^2)+35x^3(1-x^2)^2-7x(1-x^2)^3=a.$$

24.12. Решите уравнение $x^5-5ax^3+5a^2x-b=0$.

24.13. Какие уравнения седьмой степени можно решить тем же способом, который использовался при решении задачи 24.12?

Решения

24.1. Требуемая замена имеет вид $y=x+\dfrac{a_1}{n}$.

24.2. Должно выполняться равенство

$$x^3=\alpha+\beta+3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})=\alpha+\beta+3\sqrt[3]{\alpha\beta}x.$$

Поэтому числа α и β нужно подобрать так, чтобы выполнялись равенства $3\sqrt[3]{\alpha\beta}=-p$ и $\alpha+\beta=-q$. Из этих равенств следуют равенства $\alpha\beta=-\dfrac{p^3}{27}$ и

$\alpha+\beta=-q$. Таким образом, для чисел α и β получено квадратное уравнение. Его корни имеют вид

$$\alpha,\beta=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{1}$$

Формула $x=\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$ даёт 9 различных значений.

Чтобы получить формулу, которая даёт 3 значения, можно воспользоваться соотношением $\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}=-p/3$. Эта формула имеет вид

$$x=\sqrt[3]{\alpha}-\frac{p}{\sqrt[3]{\alpha}},$$

где α находится по формуле (1). При этом x не зависит от выбора знака перед радикалом в формуле (1). Несложно проверить, что полученная формула даёт значения x, которые являются корнями уравнения $x^3+px+q=0$.

24.3. Если $-3yz=p$, то $y^3z^3=-p^3/27$. Поэтому y^3 и z^3 — корни квадратного уравнения $t^2-qt-\dfrac{p^3}{27}=0$. Корни этого уравнения равны $\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$. Выберем в качестве y одно из трёх значений кубического корня $\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$, а в качестве z выберем $-\dfrac{p}{3y}$; по-другому это можно сказать так: выберем в качестве z то из значений кубического корня $\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$, для которого $-3yz=p$.

Уравнение $x^3+px+q=0$ имеет следующие корни: $x_1=-(y+z)$, $x_2=-(\omega y+\omega^2z)$ и $x_3=-(\omega^2y+\omega z)$.

24.4. Нужно проверить, что если все корни кубического уравнения $x^3+ax+b=0$ действительные, то $\Delta=\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}<0$. Чтобы убедиться в этом, исследуем функцию $y(x)=x^3+ax+b$. Ясно, что $y'=3x^2+a$. Поэтому функция $y(x)$ монотонно возрастает при $x<-\alpha$ и при $x>\alpha$, где $\alpha=\sqrt{-a/3}$, а при $-\alpha<x<\alpha$ функция $y(x)$ монотонно убывает. Легко проверить, что $y(-\alpha)y(\alpha)=4\Delta$. Поэтому уравнение $y(x)=0$ может иметь ровно три действительных корня лишь в том случае, когда $\Delta<0$.

24.5. Этот корень выражается по формуле

$$x_0=\sqrt[3]{3+\frac{11}{9}\sqrt{6}}+\sqrt[3]{3-\frac{11}{9}\sqrt{6}}.$$

24.6. а) Корни x_1, x_2, x_3 легко находятся из линейной системы уравнений $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=\alpha$, $x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=\beta$. Чтобы найти x_1, нужно сложить эти уравнения и воспользоваться тем, что $\omega^2+\omega+1=0$. Чтобы найти x_2, нужно сделать коэффициенты при x_2 равными 1.

б) Воспользовавшись равенством $\omega^2+\omega=-1$, легко проверить, что $\alpha\beta = x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3 = (x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) = -3p$. Снова воспользовавшись равенством $\omega^2+\omega=-1$, получим $\alpha^3+\beta^3 = 2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+12x_1x_2x_3-3(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)$. При этом $0=(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3+3(x_1^2x_2+x_1x_2^2+\ldots)$ и $0=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = (x_1^2x_2+x_1x_2^2+\ldots)+3x_1x_2x_3$. Следовательно, $\alpha^3+\beta^3 = -9(x_1^2x_2+x_1x_2^2+\ldots) = 27x_1x_2x_3 = -27q$.

в) Мы выяснили, что $\alpha^3+\beta^3=27q$ и $\alpha^3\beta^3=-27p^3$. Числа α^3 и β^3 можно найти, решив квадратное уравнение. Извлекая кубические корни, находим α и β. Значения кубических корней нужно при этом выбрать так, что $\alpha\beta=-3p$. Корни уравнения $x^3+px+q=0$ находятся теперь согласно задаче а).

24.7. П е р в о е р е ш е н и е. Пусть рассматриваемый многочлен имеет корни x_1, x_2 и x_3, причём $x_1=x_2$. Коэффициент при x^2 равен нулю, поэтому $x_1+x_2+x_3=0$. Таким образом, $x_3=2x_1$. Ясно, что

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3-3x_1^2x+2x_1^3,$$

т.е. $p=-3x_1^2$ и $q=2x_1^3$. В таком случае $\dfrac{q^2}{4} = x_1^6 = -\dfrac{p^3}{27}$.

Наоборот, если $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=0$, то мы можем положить $x_1=\pm\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$. Знак определяется следующим образом: $x_1^3=\pm\sqrt{-\dfrac{p^3}{27}}=\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}}$; ровно при одном выборе знака этот корень равен $\dfrac{q}{2}$.

В т о р о е р е ш е н и е. Многочлен $f(x)=x^3+px+q$ имеет кратные корни тогда и только тогда, когда у него есть общий корень с многочленом $f'(x)=3x^2+p$ (задача 28.16). Последний многочлен имеет корни $\pm\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$, поэтому для $x_0=\pm\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ должно выполняться равенство $x(x^2+p)=-q$, т.е. $\pm\sqrt{-\dfrac{p}{3}}\left(-\dfrac{p}{3}+p\right)=-q$. После возведения в квадрат получаем равенство $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=0$.

24.8. Воспользуемся тем, что

$$x^4+ax^2+bx+c = \left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2 - \left(2tx^2-bx+(t^2+at-c+\frac{a}{2})\right).$$

Выберем t так, чтобы дискриминант

$$D = b^2-8t\left(t^2+at-c+\frac{a^2}{2}\right)$$

был равен нулю. Тогда

$$x^4+ax^2+bx+c = \left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2 - 2t\left(x-\frac{b}{4t}\right)^2.$$

Поэтому уравнение

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

можно решить следующим образом. Решим сначала кубическое уравнение относительно t

$$b^2 - 8t\left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{2}\right) = 0.$$

Пусть t_0 — один из его корней. Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$x^2 + \frac{a}{2} + t = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t}\right).$$

Получаем два квадратных уравнения и решаем их стандартным способом.

24.9. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения $x^4+ax^2+bx+c=0$. Положим $u = x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4)$. Тогда

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 - ux + \alpha)(x^2 + ux + \beta),$$

т. е.

$$\alpha + \beta - u^2 = a, \qquad u(\alpha - \beta) = b, \qquad \alpha\beta = c.$$

Из первого и второго уравнений получаем

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right), \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right).$$

Подставив эти выражения в третье уравнение, получим

$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)\,u^2 - b^2 = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является кубическим уравнением относительно u^2. Решив это кубическое уравнение, найдём 6 корней уравнения (1). Они имеют вид $\pm u_1$, $\pm u_2$, $\pm u_3$. Можно считать, что

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= u_1, & x_3 + x_4 &= -u_1,\\ x_1 + x_3 &= u_2, & x_2 + x_4 &= -u_2,\\ x_1 + x_4 &= u_3, & x_2 + x_3 &= -u_3. \end{aligned}$$

Тогда $u_1 + u_2 + u_3 = 2x_1$.

24.10. а) По условию $x_1 + x_2 = -(x_3 + x_4)$, поэтому $x_1 + x_2 = \sqrt{\alpha}$. Аналогично $x_1 + x_3 = \sqrt{\beta}$ и $x_1 + x_4 = \sqrt{\gamma}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma},\\ 2x_2 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma},\\ 2x_3 &= -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma},\\ 2x_4 &= -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}. \end{aligned}$$

б) Ясно, что $\alpha+\beta+\gamma = -(2x_1x_2+x_2x_3+\ldots) = -2a$. Далее, $\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma = (x_1^2x_2^2+\ldots)+3(x_1^2x_2x_3+\ldots)+6x_1x_2x_3x_4$. Учитывая, что $a^2 = (x_1x_2+\ldots)^2 = (x_1^2x_2+\ldots)+2(x_1^2x_2x_3+\ldots)+6x_1x_2x_3x_4$ и $0 = (x_1+\ldots)(x_1x_2x_3+\ldots) = (x_1^2x_2x_3+\ldots)+4x_1x_2x_3x_4$, получаем $\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma = a^2-4c$. Наконец, $-\alpha\beta\gamma = (x_1^3x_2^2x_3+\ldots)+2(x_1^3x_2x_3x_4+\ldots)+2(x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots)+4(x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots)$. Учитывая, что $0 = (x_1+\ldots)(x_1x_2+\ldots)(x_1x_2x_3+\ldots) = (x_1^3x_2^2x_3+\ldots)+3(x_1^3x_2x_3x_4+\ldots)+3(x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots)+8(x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots)$, $0 = (x_1+\ldots)^2x_1x_2x_3x_4 = (x_1^3x_2x_3x_4+\ldots)2(x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots)$ и $b^2 = (x_1x_2x_3+\ldots)^2 = (x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots)+2(x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots)$, получаем $\alpha\beta\gamma = b^2$.

в) Согласно задаче а) достаточно найти α, β и γ. Согласно задаче б) числа α, β и γ являются корнями кубического уравнения $y^3+2ay^2+(a^2-4c)y-b^2 = 0$.

24.11. Пусть $x = \cos\varphi$. Рассматриваемые уравнения имеют вид $\cos 5\varphi = a$ и $\cos 7\varphi = a$. Значит, решения этих уравнений имеют вид

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a+i\sqrt{1-a^2}} + \sqrt[n]{a-i\sqrt{1-a^2}}\right),$$

где $n = 5$ или 7.

24.12. Мы воспользуемся тем же самым способом, которым в задаче 24.2 было решено кубическое уравнение. А именно, будем искать решение в виде $x = \alpha+\beta$. Воспользовавшись тем, что $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ и $(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5+\beta^5+5\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)+10\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$, запишем исходное уравнение в виде $\alpha^5+\beta^5+A(\alpha^3+\beta^3)+B(\alpha+\beta)-b = 0$, где $A = 5\alpha\beta-5a$ и $B = 10\alpha^2\beta^2-15a\alpha\beta+5a^2$. Если $\alpha\beta = a$, то $A = 0$ и $B = 0$. Поэтому решение исходного уравнения свелось к решению системы уравнений $\alpha^5+\beta^5 = b$, $\alpha\beta = a$. Из этой системы находим $\alpha^5, \beta^5 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4}-a^5}$. Поэтому

$$x = \sqrt[5]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^5}} + \sqrt[5]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^5}}.$$

Значения корней выбираются так, чтобы их произведение было равно a.

24.13. Ответ: $x^7-7ax^5+14a^2x^3-7a^3x-b = 0$.

Пусть $\alpha\beta = a$. Тогда

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^7 &= \alpha^7+\beta^7+7a(\alpha^5+\beta^5)+21a^2(\alpha^3+\beta^3)+35a^3(\alpha+\beta),\\
(\alpha+\beta)^5 &= \alpha^5+\beta^5+5a(\alpha^3+\beta^3)+10a^2(\alpha+\beta),\\
(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+\beta^3+3a(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

Чтобы осталось только $\alpha^7+\beta^7$, нужно рассмотреть выражение

$$(\alpha+\beta)^7-7a(\alpha+\beta)^5+14a^2(\alpha+\beta)^3-7a^3(\alpha+\beta).$$

Таким образом, решение уравнения $x^7-7ax^5+14a^2x^3-7a^3x = b$ сводится к решению системы уравнений $\alpha\beta = a$, $\alpha^7+\beta^7 = b$.

Глава 25.

Предел последовательности

Для бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ обычно используют обозначение $\{a_n\}$. Число a называют *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать номер N так, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Предел последовательности $\{a_n\}$ обозначают $\lim_{n\to\infty} a_n$. Предел последовательности не всегда существует. Например, у последовательности $a_n = (-1)^n$ предела нет.

Вместо обозначения $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ иногда используют обозначение $a_n \to a$ при $n \to \infty$ или даже просто $a_n \to a$.

25.1. Свойства пределов

25.1. Докажите, что если предел последовательности существует, то он единствен.

25.2. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности, причём $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что:

а) $\lim_{n\to\infty}(a_n + c) = a + c$ и $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$ для любого числа c;

б) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;

в) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;

г) если $a \neq 0$ и $a_n \neq 0$ для всех n, то $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.

25.3. Докажите, что если $a_n < b_n < c_n$ для всех n и $\lim_{n\to\infty} a_n = a\lim_{n\to\infty} c_n$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

25.4. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, причём $a_n \leqslant b_n$ для всех n, то $a \leqslant b$.

25.5. Дано положительное число a и последовательность положительных чисел x_n. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{x_n + a} = 0$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

25.6. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = a$ (*Коши*).

25.7. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, причём $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = a$.

25.8. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = a$, то $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = a$.

25.9. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

25.10. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если $\lim_{n\to\infty}\{P(n)\alpha\} = 0$, где $\{\ \}$ обозначает дробную часть, то число α рационально.

25.2. Теорема Вейерштрасса

Последовательность $\{a_n\}$ называют *ограниченной*, если можно выбрать числа c_1 и c_2 так, что $c_1 \leqslant a_n \leqslant c_2$ для всех n.

Точку c называют *предельной точкой* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|c - a_n| < \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества членов последовательности.

25.11. Докажите, что любая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку. (*Больцано–Вейерштрасс*)

25.12. Докажите, что любая ограниченная последовательность $\{a_n\}$ содержит сходящуюся *подпоследовательность* $\{a_{n_k}\}$, т.е. можно выбрать строго возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$ так, что последовательность $\{b_k\}$, где $b_k = a_{n_k}$, сходится.

Последовательность $\{a_n\}$ называют *возрастающей* (*неубывающей*), если $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geqslant a_n$) для всех n.

Последовательность $\{a_n\}$ называют *ограниченной сверху*, если можно выбрать число c так, что $a_n \leqslant c$ для всех n.

25.13. Докажите, что любая возрастающая (или хотя бы неубывающая) ограниченная сверху последовательность $\{a_n\}$ имеет предел. (*Вейерштрасс*)

25.14. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать номер N так, что $|x_n - x_m| < \varepsilon$ для любых $m, n \geqslant N$ (*критерий Коши*).

25.3. Вычисление пределов

25.15. Вычислите $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

25.16. Вычислите $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)$.

25.17. а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{10^n} = 0$.

б) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0$.

25.18. а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ для любого натурального k и любого $a > 1$.

б) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_a n)^k}{n} = 0$ для любого натурального k и любого $a > 1$.

25.19. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

25.20. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ для любого положительного числа x.

25.21. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

25.22. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

25.23. Пусть $a_0 = a$, $b_0 = b$, где $0 < a < b$. Положим $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ и $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$.

25.24. Пусть среди чисел $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$ ровно a_n чисел начинается с единицы. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

25.25. Пусть $x_1 = \sqrt{a}$, где a — некоторое положительное число, и $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n$ и вычислите его.

25.26. Пусть x_1 и a — положительные числа, $x_{n+1} = \dfrac{a}{1+x_n}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n$ и вычислите его.

25.27. Пусть x_1 и a — положительные числа, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$ при $x \geqslant 1$. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty} x_n$.

25.28. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$ и $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ при $n \geqslant 1$. Вычислите $\lim_{n\to\infty} x_n$.

25.29. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа, a_n — количество чисел, не превосходящих n и делящихся только на данные простые числа. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$.

25.30. Пусть x_0 и y_0 — некоторые положительные числа, причём $x_0 > y_0$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ и $y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x_0 y_0}$.

25.31. Пусть x_0 и y_0 — некоторые положительные числа, причём $x_0 > y_0$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ и $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что обе последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, называемому *средним арифметико-геометрическим* чисел x_0 и y_0 (*Гаусс*).

25.32. Пусть $a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$ и $a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \pi$.

25.33. Пусть x_0 и y_0 — некоторые неотрицательные числа, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ и $y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}$ при $n \geqslant 0$.

а) Докажите, что если $0 \leqslant x_0 < y_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos(x_0/y_0)}.$$

б) Докажите, что если $0 < y_0 < x_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\sqrt{x_0^2 - y_0^2}}{\operatorname{Arch}(x_0/y_0)}.$$

См. также задачу 28.50.

25.4. Число e

25.34. а) Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

б) Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$.

25.35. Найдите первую цифру числа 2^{400}.

25.36. Докажите, что если m и n — натуральные числа, причём $m > n$, то

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ и } \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

25.37. Докажите, что существует предел $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

25.38. а) Докажите, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

б) Докажите, что

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}$$

для любого k.

в) Докажите, что $e = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$.

25.39. Докажите, что

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n}.$$

25.40. Сходится ли последовательность $a_n = \sin(2\pi n! e)$?

25.41. Докажите, что число e иррационально.

25.42. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

25.5. Сопряжённые числа

25.43. Пусть $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$, где q_n, r_n, s_n, t_n — натуральные числа. Вычислите пределы $\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}$.

25.6. Точная верхняя грань

Пусть X — некоторое (непустое) множество действительных чисел. Число x_0 называют *точной верхней гранью* этого множества, если $x \leqslant x_0$ для любого числа x из множества X, но для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число x из множества X, для которого $x + \varepsilon > x_0$. Если точная верхняя грань x_0 множества X принадлежит X, то x_0 называют *максимумом* множества X. Аналогично определяются *точная нижняя грань* и *минимум*.

25.44. Найдите точную верхнюю грань множества отрицательных чисел. Есть ли у этого множества максимум?

Множество действительных чисел называют *ограниченным сверху*, если можно выбрать число c так, что все числа этого множества меньше c. Аналогично определяется множество, *ограниченное снизу*.

25.45. Докажите, что любое (непустое) ограниченное сверху множество действительных чисел имеет единственную точную верхнюю грань, а ограниченное снизу — единственную точную нижнюю грань.

Решения

25.1. Предположим, что a и b — пределы последовательности $\{a_n\}$, причём $a \neq b$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{3}|a-b|$. Согласно определению предела можно выбрать номера N_1 и N_2 так, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_1$ и $|a_n - b| < \varepsilon$ при $n > N_2$. Пусть N — наибольшее из чисел N_1 и N_2. Тогда $|a-b| \leqslant |a-a_n|+|a_n-b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|$. Приходим к противоречию.

25.2. а) Утверждение о том, что $\lim_{n\to\infty}(a_n + c) = a + c$ очевидно: в качестве N для последовательности $\{a_n + c\}$ можно выбрать то же самое число, что и для последовательности $\{a_n\}$.

При $c = 0$ утверждение о том, что $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = 0$ очевидно. Если же $c \neq 0$, то в качестве числа N, соответствующего ε для последовательности $\{ca_n\}$, можно взять N, соответствующее $\varepsilon/|c|$ для последовательности $\{a_n\}$. А именно, если $|a_n - a| < \varepsilon/|c|$, то $|ca_n - ca| < \varepsilon$.

б) Для данного $\varepsilon > 0$ выберем N_1 и N_2 так, что $|a_n - a| < \varepsilon/2$ при $n > N_1$ и $|b_n - b| < \varepsilon/2$ при $n > N_2$. Пусть N — наибольшее из чисел N_1 и N_2. Тогда $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при $n > N$.

в) Воспользуемся тождеством

$$a_nb_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a). \qquad (1)$$

Для данного $\varepsilon > 0$ выберем N_1 и N_2 так, что $|a_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$ при $n > N_1$ и $|b_n - b| < \sqrt{\varepsilon}$ при $n > N_2$. Тогда $|(a_n - a)(b_n - b)| < \varepsilon$ при $n > \max(N_1, N_2)$, поэтому $\lim_{n\to\infty}(a_n - a)(b_n - b) = 0$. Из а) и б) следует, что $\lim_{n\to\infty} a(b_n - b) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} b(a_n - a) = 0$. Поэтому тождество (1) показывает, что $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n - ab) = 0$.

г) Выберем сначала N_1 так, что $|a_n - a| < \dfrac{1}{2}|a|$ при $n > N_1$. Отметим, что при этом $|a_n| > \dfrac{1}{2}|a|$. Выберем затем для данного $\varepsilon > 0$ номер N_2 так, что $|a_n - a| < \dfrac{1}{2}|a|^2\varepsilon$ при $n > N_2$. Тогда если $n > \max(N_1, N_2)$, то

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a_n a}\right| < \frac{1}{2}|a|^2\varepsilon \cdot \frac{2}{|a|^2} = \varepsilon.$$

25.3. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем числа N_1 и N_2 так, что $|a - a_n| < \varepsilon$ при $n > N_1$ и $|a - c_n| < \varepsilon$ при $n > N_2$. Тогда если $n > \max(N_1, N_2)$, то $a_n > a - \varepsilon$ и $c_n < a + \varepsilon$. Поэтому $a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < c + \varepsilon$, а значит, $|b_n - a| < \varepsilon$.

25.4. Выберем N так, что если $n > N$, то $|a - a_n| < \varepsilon$ и $|b - b_n| < \varepsilon$. Тогда $a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n < b + \varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $b > a - 2\varepsilon$. Поэтому $b \geqslant a$.

25.5. Пусть $\left|\dfrac{x_n - a}{x_n + a}\right| < \varepsilon$. Тогда

$$\frac{-2\varepsilon a}{1+\varepsilon} < x - a < \frac{2\varepsilon a}{1-\varepsilon}.$$

25.6. Вместо последовательности $\{x_n\}$ можно рассмотреть последовательность $\{x_n - a\}$, поэтому можно считать, что $a = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать N так, что если $n \geqslant N$, то $|x_n| < \varepsilon$. Тогда при $n > N$

$$\left|\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)\right| \leqslant \frac{C}{n} + \frac{n-N}{n}\varepsilon,$$

где $C = x_1 + \ldots + x_N$. Ясно, что $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{C}{n} + \dfrac{n-N}{n}\varepsilon\right) = \varepsilon$. Поэтому можно выбрать $M > N$ так, что если $n > M$, то $\left|\dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)\right| < 2\varepsilon$.

25.7. Функция $\ln x$ непрерывна, поэтому $\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \ln a$. Значит, согласно задаче 25.6 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_1 + \ldots + \ln a_n}{n} = \ln a$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \ln a$. Теперь, воспользовавшись непрерывностью функции e^x, получаем требуемое.

25.8. Пусть $y_1 = x_1$ и $y_n = x_n - x_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Тогда $x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. По условию $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Поэтому согласно задаче 25.6 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = a$.

25.9. Рассмотрим последовательность $b_1 = a_1$, $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ при $n > 1$. По условию $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Поэтому согласно задаче 25.7 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} = a$. Но $b_1 \dots b_n = a_n$.

25.10. Удобнее доказывать более общее утверждение: если $\{P(n)\alpha\} = a_n + \varepsilon_n$, где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и a_n принимает лишь конечное число значений (когда n пробегает все натуральные значения), то α рационально.

Применим индукцию по m — степени многочлена $P(x)$. При $m = 1$ получаем $\{An\alpha + B\alpha\} = a_n + \varepsilon_n$. Поэтому $An\alpha + B\alpha = a_n + \varepsilon_n + k_n$ и $A(n+1)\alpha + B\alpha = a_{n+1} + \varepsilon_{n+1} + k_{n+1}$, где k_n и k_{n+1} — целые числа. Следовательно,

$$A\alpha = (a_{n+1} - a_n) + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) + (k_{n+1} - k_n).$$

Число $k_{n+1} - k_n$ целое, а разность $a_{n+1} - a_n$ может принимать лишь конечное число значений. Поэтому из того, что $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, следует, что $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = 0$ при $n \geqslant n_0$. Но тогда

$$a_n = a_{n_0} + l_n + (n - n_0)A\alpha,$$

где l_n — целое число. По условию a_n принимает конечное число значений. Следовательно, $l_n + nA\alpha$ принимает конечное число значений, поэтому $\{nA\alpha\}$ принимает конечное число значений. Тогда число $A\alpha$ рационально (задача 17.13), а значит, число α тоже рационально.

Шаг индукции доказывается совсем просто. Многочлен $Q(x) = P(x + 1) - P(x)$ имеет степень $m - 1$. Кроме того, если a_n принимает конечное число значений, то $a_{n+1} - a_n$ тоже принимает конечное число значений. Поэтому, применив к многочлену $Q(x)$ предположение индукции, получаем, что α рационально.

25.11. Можно считать, что числа c_1 и c_2 из определения ограниченной последовательности целые. Отрезок $[c_1, c_2]$ разбивается на конечное число отрезков длины 1. Хотя бы в одном из этих отрезков содержится бесконечно много членов рассматриваемой последовательности. Выберем такой отрезок и разделим его на 10 отрезков длины 1/10. Среди этих отрезков выберем тот, который содержит бесконечно много членов последовательности. Этот отрезок снова разделим на 10 отрезков равной длины и т.д. Такая последовательность операций определяет некоторое число $c = m_0 + m_1 \cdot 10^{-1} + m_2 \cdot 10^{-2} + \dots$ Действительно, на первом шаге мы определяем m_0, на втором m_1 и т.д. Число c является предельной точкой данной последовательности.

25.12. Пусть c — предельная точка последовательности $\{a_n\}$. Тогда неравенство $|a_n - c| < 1/k$ выполняется для бесконечного множества членов a_n. Поэтому можно выбрать a_{n_k} так, что $|a_{n_k} - c| < 1/k$. Более того, это можно сделать так, что $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Тогда $c = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

25.13. Неубывающая ограниченная сверху последовательность ограничена, поскольку $a_n \geqslant a_1$ для всех n. Поэтому согласно теореме Больцано–

Вейерштрасса (задача 25.11) последовательность $\{a_n\}$ имеет предельную точку c. Прежде всего докажем, что предельная точка единственна. Предположим, что есть две предельные точки: $c_1 < c_2$. Пусть $c_2 - c_1 = \varepsilon$. Выберем N так, что $|x_N - c_2| < \varepsilon/2$. Тогда $x_N > c_2 - \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, $x_n > c_2 - \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant N$. Но тогда $x_n - c_1 > \frac{\varepsilon}{2}$, поэтому c_1 не может быть предельной точкой.

Пусть c — предельная точка. Тогда $x_n \leqslant c$ для всех n (иначе все точки x_m, где $m \geqslant n$, лежат вне некоторой окрестности точки c). Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать N так, что $c-\varepsilon < x_N \leqslant c$. Тогда $c-\varepsilon < x_n \leqslant c$ при $n \geqslant N$.

25.14. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a, то для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать N так, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$ для любого $n \geqslant N$. Тогда если $m, n \geqslant N$, то $|x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon$.

Предположим теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать номер N так, что $|x_n - x_m| < \varepsilon$ для любых $m, n \geqslant N$. Положим $\varepsilon = 1$ и выберем соответствующий номер N. Тогда $|x_n - x_N| < 1$ при $n \geqslant N$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ ограничена. По теореме Больцано–Вейерштрасса (задача 25.11) такая последовательность имеет предельную точку a. Для положительного числа $\varepsilon/2$ выберем номер N так, что $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ при $m, n \geqslant N$. Точка a предельная, поэтому $|x_n - a| < \varepsilon/2$ для бесконечно многих n; в частности, это неравенство выполняется для некоторого $n_0 \geqslant N$. Поэтому для любого $m \geqslant N$ получаем $|x_m - a| \leqslant |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0} - a| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{m\to\infty} x_m = a$.

25.15. Ясно, что $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$.

25.16. Домножив и поделив $\sqrt{n^2+n} - n$ на $\sqrt{n^2+n} + n$, получим

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{2}.$$

25.17. а) Ясно, что

$$\frac{n}{10^n} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{10^n} < 2^{n-1}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^n} \to 0.$$

б) Пусть $10^k \leqslant n \leqslant 10^{k+1}$. Тогда $\dfrac{\lg n}{n} \leqslant \dfrac{k+1}{10^k} \to 0$ согласно задаче а).

25.18. а) Если n достаточно велико, то $\sqrt[k]{a} > \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. Выберем число $q > 1$ и натуральное число N так, что $\sqrt[k]{a}\dfrac{n+1}{n} > q$ при $n \geqslant N$. Тогда $\dfrac{(N+m)^k}{a^{N+m}} \leqslant Cq^{-m}$, где $C = \dfrac{N^k}{a^N}$. Остаётся заметить, что если $q > 1$, то $\lim_{m\to\infty} q^{-m} = 0$.

б) Пусть $a^{m-1} \leqslant n \leqslant a^m$. Тогда $\dfrac{(\log_a n)^k}{n} \leqslant \dfrac{m^k}{a^{m-1}} \to 0$ согласно задаче а).

25.19. Выберем натуральное число N так, что $\dfrac{|x|}{N+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Если $n > N$, то $\dfrac{|x|^n}{n!} \leqslant \dfrac{|x|^N}{N!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} = \dfrac{C}{2^n}$, где $C = \dfrac{2^N |x|^N}{N!}$ — постоянное число.

25.20. Пусть $x > 1$. Рассмотрим вспомогательную последовательность $a_n = x^{1/n} - 1$. Ясно, что $a_n > 0$, Поэтому согласно задаче 13.9 а) $1 + na_n \leqslant (1+ + a_n)^n = x$. Таким образом, $0 < a_n < \dfrac{x-1}{n}$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если $x = 1$, то утверждение очевидно, а если $0 < x < 1$, то рассмотрим $y = 1/x > 1$. Тогда $\lim_{n\to\infty} y^{1/n} = 1$, поэтому $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$.

25.21. Первое решение. Пусть $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тогда $a_n \geqslant 0$, поэтому $n = (1 + a_n)^n \geqslant 1 + na_n + \dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2 \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2$. Следовательно, $0 \leqslant a_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$.

Второе решение. Воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, получим:

$$\sqrt[n]{n} - 1 = \frac{n-1}{1 + n^{\frac{1}{n}} + \ldots + n^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \frac{n-1}{n\sqrt[n]{n^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}}}} = \frac{n-1}{n^{(3n-1)/2n}}.$$

Если $n \geqslant 3$, то $\dfrac{n-1}{n^{(3n-1)/2n}} \leqslant n^{\frac{-n+1}{2n}} \leqslant n^{-1/3}$.

25.22. Из неравенства $(2n)! \geqslant n(n+1)\ldots(2n) > n^{n+1}$ следует, что $\sqrt[2n]{(2n)!} > \sqrt[2n]{n^{n+1}} > \sqrt{n}$ и $\sqrt[2n+1]{(2n+1)!} > \sqrt[2n+1]{n^{n+1}} > \sqrt{n}$.

25.23. Если $0 < a_n < b_n$, то $a_{n+1} > a_n$ и $b_{n+1} < b_b$. Кроме того, $4a_nb_n < (a_n+b_n)^2$, т.е. $a_{n+1} < b_{n+1}$. Поэтому $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < b_2 < b_1 < b_0$. Значит, последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. Из того, что $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, следует, что $\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, т.е. $\alpha = \beta$.

Перемножив равенства $a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$ и $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, получим $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$. Значит, $a_nb_n = ab$ при всех n. Поэтому $\alpha\beta = ab$, т.е. $\alpha^2 = ab$.

25.24. Рассмотрим все натуральные числа a, для которых $10^{k-1} \leqslant a < 10^k$. Среди них есть хотя бы одна степень двойки, поскольку не может оказаться, что $2^m < 10^{k-1}$, а $2^{m+1} > 10^k$. Наименьшая из степеней двойки, заключённых в этих пределах, начинается с единицы, поскольку иначе мы могли бы поделить число $a = 2^m$ на 2 и получить число в тех же пределах. Степень двойки, следующая за наименьшей, начинается с цифры 2 или 3. Поэтому среди рассматриваемых чисел есть ровно одна степень двойки, начинающаяся с единицы. Значит, если $10^{k-1} \leqslant 2^n < 10^k$,

то $a_n = k-1$. Таким образом, $a_n \leqslant n\lg 2 < a_n+1$, т.е. $\lg 2 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leqslant \lg 2$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lg 2$.

25.25. Если бы мы знали, что существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, то найти c было бы легко. Действительно, $c = \sqrt{a+c}$, поэтому $c^2 - c - a = 0$. Следовательно, $c = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$. Ясно также, что $c \geqslant 0$, поэтому $c = \frac{1}{2} + \sqrt{a+\frac{1}{4}}$.

Докажем теперь, что рассматриваемый предел существует. Прежде всего заметим, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Действительно, учитывая, что все числа x_n положительны, получаем: $x_{n+1} > x_n \iff x_{n+1}^2 > x_n^2 \iff a + x_n > x_n^2 \iff a + x_n > a + x_{n-1} \iff x_n > x_{n-1}$. Остаётся заметить, что $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$.

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, а именно, $x_n < c$. Действительно, $x_1 < c$. Кроме того, $x_n < c \Rightarrow x_{n+1} < \sqrt{a+c} = c$.

25.26. Если бы мы знали, что существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, то найти его было бы легко. Действительно, $c = \frac{a}{1+c}$, поэтому $c^2 + c - a = 0$. Ясно также, что $c \geqslant 0$. Поэтому c — положительный корень уравнения $x^2 + x - a = 0$. Такой корень единствен.

Докажем теперь существование предела. Пусть c — единственный положительный корень уравнения $x^2 + x - a = 0$. Если $x_n \geqslant c$, то $x_n^2 + x_n \geqslant a$, т.е. $x_n \geqslant \frac{a}{1+x_n} = x_{n+1}$. Поэтому $x_{n+1} = \frac{a}{1+x_n} \leqslant \frac{a}{1+x_{n+1}}$, т.е. $x_{n+1} \leqslant c$. Аналогично доказывается, что если $x_n \leqslant c$, то $x_{n+1} \geqslant c$.

Далее, $x_{n+2} - x_n = \dfrac{a}{1+\dfrac{a}{1+x_n}} - x_n = \dfrac{a - x_n - x_n^2}{1+a+x_n}$. Поэтому если $x_n \leqslant c$, то $x_{n+2} - x_n \geqslant 0$, а если $x_n \geqslant c$, то $x_{n+2} - x_n \leqslant 0$. Таким образом, одна из последовательностей $x_1, x_3, x_5, \ldots$ и $x_2, x_4, x_6, \ldots$ монотонно возрастает, а другая монотонно убывает.

25.27. Ответ: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Ясно, что

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{x_{n+1}+\sqrt{a}} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{x_n^2 + 2\sqrt{a}x_n + a} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}\right)^2.$$

Следовательно, $\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{x_{n+1}+\sqrt{a}} = \left(\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$. Пусть $q = \frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}$. Ясно, что $|q| < 1$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} q^{2^n} = 0$. Значит, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}} = 0$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 25.5.

25.28. Ответ: $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a+2b}{3}$. Докажем, что $x_n = \frac{a+2b}{3} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3} \frac{b-a}{2}$. При $n = 1$ и 2 требуемое равенство легко проверяется. Соотношение $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ тоже легко проверяется.

25.29. Пусть $p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k} \leqslant n$. Тогда $p_i^{\alpha_i} \leqslant n$, поэтому $\alpha_i \leqslant \dfrac{\lg n}{\lg p_i}$. Значит, $a_n \leqslant \left(\dfrac{\lg n}{\lg p_1}+1\right)\dots\left(\dfrac{\lg n}{\lg p_k}+1\right)$. Если $n \geqslant p_1,\dots, p_k$, то $a_n \leqslant \dfrac{2^k}{\lg p_1 \dots \lg p_k}(\lg n)^k$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 25.18 а).

25.30. Легко проверить, что $x_0 > \dfrac{x_0+y_0}{2} > \dfrac{2x_0y_0}{x_0+y_0} > y_0$, т.е. $x_0 > x_1 > y_1 > y_0$. Аналогично $x_n > x_{n+1} > y_{n+1} > y_n$ для любого n. Таким образом, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ монотонные и ограниченные, поэтому они сходятся к некоторым числам x и y. Если в равенстве $x_{n+1} = \dfrac{x_n+y_n}{2}$ перейти к пределу, то получим $x = \dfrac{x+y}{2}$, т.е. $x = y$. Ясно также, что $x_{n+1}y_{n+1} = x_ny_n$. Поэтому $xy = x_0y_0$. А так как $x = y$, получаем требуемое.

25.31. Легко проверить, что $x_0 > \dfrac{x_0+y_0}{2} > \sqrt{x_0y_0} > y_0$, т.е. $x_0 > x_1 > y_1 > y_0$. Аналогично $x_n > x_{n+1} > y_{n+1} > y_n$ для любого n. Таким образом, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ монотонные и ограниченные, поэтому они сходятся к некоторым числам x и y. Если в равенстве $x_{n+1} = \dfrac{x_n+y_n}{2}$ перейти к пределу, то получим $x = \dfrac{x+y}{2}$, т.е. $x = y$.

25.32. Пусть $A_n = 6\cdot 2^n \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6\cdot 2^n}$ и $B_n = 6\cdot 2^n \sin\dfrac{\pi}{6\cdot 2^n}$, т.е. A_n — полупериметр правильного $6\cdot 2^n$-угольника, описанного вокруг окружности радиуса 1, B_n — полупериметр правильного $6\cdot 2^n$-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Покажем, что $a_n = A_n$ и $b_n = B_n$. При $n = 0$ это очевидно. Пусть $\alpha = \dfrac{\pi}{6\cdot 2^n}$. Тогда $\dfrac{A_{n+1}}{A_n} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} = 1-\operatorname{tg}^2\alpha$ и $\dfrac{B_{n+1}}{B_n} = \dfrac{2\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Кроме того, $\dfrac{A_n}{B_n} = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$ и $\dfrac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Значит, $\dfrac{B_{n+1}}{B_n} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$, т.е. $B_{n+1} = \sqrt{A_{n+1}B_n}$. Далее, $\dfrac{2A_nB_n}{A_n+B_n} = \dfrac{2A_n\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$. Легко проверить, что $\dfrac{2\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = 1-\operatorname{tg}^2\alpha$. Поэтому $\dfrac{2A_nB_n}{A_n+B_n} = A_{n+1}$.

25.33. а) Положим $x_0 = y_0\cos\alpha$, т.е. $\alpha = \arccos(x_0/y_0)$. Тогда $x_1 = y_0\dfrac{1+\cos\alpha}{2} = y_0\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ и $y_1 = \sqrt{y_0\cos^2\dfrac{\alpha}{2}y_0} = y_0\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Поэтому $x_1 = y_1\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Продолжая такие рассуждения дальше, получаем $y_2 = y_0\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2^2}$, $\dots$, $y_n = y_0\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\dots\cos\dfrac{\alpha}{2^n} = \dfrac{y_0\sin\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}} \to \dfrac{y_0\sin\alpha}{\alpha}$ и $x_n = y_n\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$. Остаётся заметить, что $\cos\dfrac{\alpha}{2^n} \to 1$ при $n\to\infty$.

б) Решение аналогично, только теперь мы полагаем $x_0 = y_0\operatorname{ch}\alpha$, т.е. $\alpha = \operatorname{Arch}(x_0/y_0)$.

25.34. а) Первое решение. Согласно задаче 13.9, если $0 < \alpha \leqslant 1/n$, то выполняется неравенство $1 + n\alpha \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + n\alpha + n^2\alpha^2$. При $\alpha = 1/n$ получаем требуемое.

Второе решение. Ясно, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots <$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

поскольку $\frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-2}{3n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-3}{4n} < \frac{1}{2}$ и т.д.

б) Из неравенства $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{3}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{3} < n + 1.$$

Поэтому индукцией по n получаем требуемое неравенство.

25.35. Ответ: 2. Первая цифра числа $2^{400} = (2^{10})^{40} = (1024)^{40}$ совпадает с первой цифрой числа $1,024^{40}$. С одной стороны, согласно задаче 25.34 $1,024^{40} < 1,025^{40} = \left(1 + \frac{1}{40}\right)^{40} < 3$. С другой стороны, $1,024^{40} > 1 + 40 \cdot 0,024 + \frac{40 \cdot 39}{2} 0,024^2 = 2,40928 > 2$.

25.36. Достаточно доказать требуемые неравенства в случае, когда $m = n + 1$.

Первое решение. Пусть $0 < a < b$. Тогда

$$(n+1)a^n < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n, \tag{1}$$

поскольку $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} = b^n + b^{n-1}a + \ldots + a^n$. Неравенства (1) можно записать в виде

$$a^n\big((n+1)b - na\big) < b^{n+1}, \quad b^n\big((n+1)a - nb\big) < a^{n+1}.$$

Подставим в эти неравенства $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ и $b = 1 + \frac{1}{n}$. В результате получим

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(\frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n(n+2)}{n+1}\right) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Остаётся заметить, что

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \left(\frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n(n+2)}{n+1}\right) = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n(n+2)^2} > 1.$$

В т о р о е р е ш е н и е. Неравенство $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ эквивалентно неравенству $\left(1+\frac{1}{m}\right) > \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n$. Согласно задаче 13.9 б)

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^n < 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Неравенство $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{n+1}$ легко проверяется.

Неравенство $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ эквивалентно неравенству $1 + \frac{1}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}$. Согласно задаче 13.9 а)

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n^2+2n}.$$

Неравенство $\frac{n+1}{n^2+2n} > \frac{1}{n+1}$ легко проверяется.

25.37. Согласно задаче 25.36 последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, а согласно задаче 25.34 эта последовательность ограничена сверху.

25.38. а) По формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Кроме того, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k-1)}{k!} < \frac{n^k}{k!}$.

б) Если $k \leqslant n$, то

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = b_n.\end{aligned}$$

Ясно, что $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}$. Поэтому

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \lim_{n\to\infty} b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}.$$

в) Очевидным образом следует из задач а) и б).

25.39. Согласно задаче 25.38

$$e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)<$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}}=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n!}\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Остаётся заметить, что $\dfrac{n+2}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n}$, поскольку $n^2+2n<n^2+2n+1$.

25.40. Ответ: да, сходится к 0. Согласно задаче 25.39 дробная часть числа $n!e$ заключена между 0 и $1/n$. Поэтому $0<\sin(2\pi n!e)<\sin(2\pi/n)$ при $n\geqslant 4$.

25.41. Предположим, что $e=m/n$, где m и n — натуральные числа. Тогда согласно задаче 25.39

$$0<\frac{m}{n}-\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{1}{n!n}.$$

После умножения на $n!$ получим, что $0<a<\dfrac{1}{n}$, где a — целое число. Этого не может быть.

25.42. Первое решение. Пусть $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$. Тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^n}\cdot\dfrac{n^n}{n!}=$ $=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\to e$. Поэтому согласно задаче 25.9 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{n}=e$.

Второе решение. Ясно, что

$$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{n}\ln n!-\ln n=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln n=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

При $n\to\infty$ последнее выражение превращается в $\int_0^1\ln(x)\,dx=-1$.

25.43. Пусть $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $\lambda_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\lambda_1^n &= q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},\\
\lambda_2^n &= q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},\\
\lambda_3^n &= q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},\\
\lambda_4^n &= q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n &= 4q_n,\\
\lambda_1^n + \lambda_2^n - \lambda_3^n - \lambda_4^n &= 4s_n\sqrt{3},\\
\lambda_1^n - \lambda_2^n + \lambda_3^n - \lambda_4^n &= 4r_n\sqrt{2},\\
\lambda_1^n - \lambda_2^n - \lambda_3^n + \lambda_4^n &= 4t_n\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Ясно также, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_3^n}{\lambda_1^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_4^n}{\lambda_1^n} = 0$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_1^n}{q_n} = 4$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{\lambda_1^n} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{\lambda_1^n} = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{\lambda_1^n} = \dfrac{1}{4\sqrt{6}}$, а значит, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{q_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{q_n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\lim_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{q_n} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

25.44. Точная верхняя грань равна 0. Максимума нет, поскольку 0 не входит в рассматриваемое множество.

25.45. Проведём доказательство только для точной верхней грани. Пусть x_0 и x_1 — две точные верхние грани, причём $x_1 > x_0$. Тогда для $\varepsilon = \dfrac{x_1 - x_0}{2}$ найдётся x (число из рассматриваемого множества), для которого $x + \dfrac{x_1 - x_0}{2} > x_1$, т.е. $x > \dfrac{x_1 + x_0}{2} > x_0$. Но это противоречит тому, что x_0 — точная верхняя грань.

Докажем теперь существование точной верхней грани. Построим неубывающую последовательность $\{a_n\}$ и невозрастающую последовательность $\{b_n\}$ так, что для каждого n существует $x \geqslant a_n$ и не существует $x \geqslant b_n$. А именно, в качестве a_1 возьмём произвольное число из рассматриваемого множества, а в качестве b_1 — число c из определения ограниченного сверху множества. Пусть c_2 — середина отрезка $[a_1, b_1]$. В качестве a_2 берём число c_2, если оно нам подходит; иначе берём a_1. В качестве b_2 берём число c_2, если оно нам подходит; иначе берём b_1. Дальнейшие члены выбираются аналогично. Построенные последовательности имеют общий предел x_0. Легко видеть, что x_0 — точная верхняя грань.

Глава 26.

Непрерывные и разрывные функции

Мы будем использовать следующие обозначения:
$[a, b]$ — *отрезок*; он состоит из точек x, для которых $a \leqslant x \leqslant b$;
(a, b) — *интервал*; он состоит из точек x, для которых $a < x < b$.

26.1. Монотонные функции

26.1. Вещественные числа x и y удовлетворяют равенствам $x^3 - 3x^2 + 5x = 1$, $y^3 - 3y^2 + 5y = 5$. Найдите $x + y$.

26.2. Периодические функции

26.2. Докажите, что если число α иррационально, а число a положительно, то функция $f(x) = \cos x + a \cos \alpha x$ непериодическая.

26.3. Предел функции

Число a называют *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, что для любого $x \neq x_0$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует, то его обозначают $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Иногда возникает необходимость рассматривать *односторонние пределы* функции[1] $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+)$ и $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-)$. Они определяются почти так же, как и обычный предел, но в первом из них рассматриваются только $x > x_0$, а во втором — только $x < x_0$. Например, если функция $f(x)$ определена только на отрезке $[p, q]$, то в концах отрезка имеют смысл только односторонние пределы $\lim_{x\to p+} f(x) = f(p+)$ и $\lim_{x\to q-} f(x) = f(q-)$.

26.3. Докажите, что если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует, то он единствен.

26.4. Докажите, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$ для любой последовательности $\{a_n\}$, для которой $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ и $a_n \neq x_0$ при всех n (предполагается также, что все точки a_n принадлежат области определения функции f).

26.5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, причём $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Докажите, что

а) $\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) = a + b$;

б) $\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = ab$;

в) $\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x)/g(x)\bigr) = a/b$, если $b \neq 0$.

26.6. Докажите, что $\lim_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

26.4. Непрерывность

Функцию $f(x)$ называют *непрерывной* в точке x_0, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке (из области определения), то её называют просто *непрерывной.*

Функцию $f(x)$, определённую на отрезке $[a, b]$, мы будем называть непрерывной, если она непрерывна в каждой внутренней точке отрезка, а в концах отрезка существуют односторонние пределы, причём $f(a+ +) = f(a)$ и $f(b-) = f(b)$.

26.7. а) Пусть $P(x)$ — многочлен. Докажите, что функция $P(x)$ непрерывна.

б) Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причём $Q(x_0) \neq 0$. Докажите, что функция $P(x)/Q(x)$ непрерывна в точке x_0.

---

[1] Часто используются обозначения $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$ и $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$, но они могут ввести в заблуждение.

26.8. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Докажите, что функция $g\bigl(f(x)\bigr)$ непрерывна в точке x_0.

26.9. Докажите, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна.

26.10. Пусть $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна (во всех точках x).

26.5. Теорема о промежуточном значении

26.11. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает в его концах значения разных знаков. Докажите, что $f(x_0) = 0$ для некоторой точки x_0 этого отрезка (*теорема о промежуточном значении*).

26.12. а) Пусть f — непрерывная функция, для которой уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных решений. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет вещественных решений.

б) Пусть f и g — непрерывные функции, удовлетворяющие тождеству $f(g(x)) = g(f(x))$. Докажите, что если уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет вещественных решений, то уравнение $f(f(x)) = g(g(x))$ тоже не имеет вещественных решений.

26.13. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения из того же отрезка. Докажите, что $f(x) = x$ для некоторой точки x этого отрезка.

26.14. Существует ли функция, непрерывная на отрезке $[0, 1]$, которая в рациональных точках принимает иррациональные значения, а в иррациональных — рациональные, и при этом все значения принадлежат отрезку $[0, 1]$?

26.6. Свойства функций, непрерывных на отрезке

26.15. Докажите, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке, т.е. множество всех значений $f(x)$ для x из отрезка $[a, b]$ — ограниченное множество.

26.16. Функция непрерывна на интервале (a, b). Верно ли, что она ограничена на этом интервале?

26.17. Докажите, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает максимума и минимума в некоторых точках этого отрезка. (*Вейерштрасс*)

26.7. Выпуклые функции

Функцию $f(x)$, определённую на отрезке $[a, b]$, называют *выпуклой*, если

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{1}$$

для всех x_1 и x_2, лежащих на отрезке $[a, b]$.

С геометрической точки зрения неравенство (1) означает, что середина любой хорды кривой $y = f(x)$ лежит над этой кривой (или на самой кривой).

Функцию $f(x)$ называют *вогнутой*, если функция $-f(x)$ выпукла.

26.18. Докажите, что функция $f(x)$ выпукла на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого n и любых точек $x_1, \ldots, x_n$ из этого отрезка имеет место неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \tag{2}$$

26.19. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, p и q — положительные числа, сумма которых равна 1.

а) Докажите, что если числа p и q рациональные, то $f(px_1 + qx_2) \leqslant pf(x_1) + qf(x_2)$.

б) Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывная, то $f(px_1 + qx_2) \leqslant pf(x_1) + qf(x_2)$.

26.20. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа, сумма которых равна 1.

а) Докажите, что если числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ рациональные, то

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

б) Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывная, то

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

(*неравенство Йенсена*).

26.21. Докажите, что функция $f(x) = \ln x$ вогнута на интервале $(0, +\infty)$.

26.22. Докажите, что если A, B, p и q — положительные числа, причём $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то $A^{1/p}B^{1/q}\leqslant \dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{q}$.

26.8. Равномерная непрерывность

Пусть множество D содержится в области определения функции $f(x)$. Функцию $f(x)$ называют ***равномерно непрерывной*** на множестве D, если для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать $\delta>0$ так, что для любых x_1 и x_2 из D неравенство $|x_1-x_2|<\delta$ влечёт неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Отличие от обычной непрерывности заключается в том, что число δ одно и то же для всех точек области D. Ясно, что из равномерной непрерывности следует обычная непрерывность. Обратное, вообще говоря, неверно.

26.23. а) Приведите пример непрерывной функции на множестве всех действительных чисел, которая не является равномерно непрерывной.

б) Приведите пример непрерывной функции на интервале $(0,1)$, которая не является равномерно непрерывной.

26.24. Докажите, что любая функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, является равномерно непрерывной на этом отрезке.

26.9. Функции ограниченной вариации

Пусть f — ограниченная функция на отрезке $[a,\,b]$. ***Вариация*** $\operatorname{Var}_a^b(f)$ функции f на отрезке $[a,\,b]$ определяется как точная верхняя грань сумм вида $\sum_{k=0}^{n}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$ для всевозможных наборов точек $x_0=a<x_1<\ldots<x_n<b=x_{n+1}$. Если $\operatorname{Var}_a^b(f)<\infty$, то говорят, что f — ***функция ограниченной вариации*** на отрезке $[a,\,b]$.

26.25. Пусть $f(x)=x\sin(1/x)$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Докажите, что на отрезке $[0,\,1]$ функция f непрерывна, но не является функцией ограниченной вариации.

26.26. Докажите, что функция f, определённая на отрезке $[a,\,b]$, является функцией ограниченной вариации тогда и только тогда, когда её можно представить в виде разности двух неубывающих функций.

26.27. Пусть f — функция ограниченной вариации на отрезке $[a,\,b]$. Для $x\in[a,\,b]$ рассмотрим функцию $V(x)=\operatorname{Var}_a^x(f)$ (предполагается,

то $V(a) = 0$). Докажите, что функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция V.

Решения

26.1. Ответ: $x + y = 2$. Функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x-1)^3 + 2(x-1) + 3$ монотонно возрастает, поэтому для каждого вещественного числа c уравнение $f(x) = c$ имеет ровно одно вещественное решение.

Функция $f(x) - 3$ обладает следующим свойством: если $x - 1 = 1 - y$, то $f(x) - 3 = -\big(f(y) - 3\big)$. Из монотонности функции f следует, что верно и обратное, т.е. если $f(x) - 3 = -\big(f(y) - 3\big)$, то $x - 1 = 1 - y$, т.е. $x + y = 2$. В рассматриваемом случае $f(x) = 1$ и $f(y) = 5$, поэтому указанное равенство выполняется.

26.2. Предположим, что T — период функции $f(x)$. Тогда $f(T) = f(0) = 1 + a$. Значит, $\cos T = 1$ и $\cos \alpha T = 1$, т.е. $T = 2\pi m$ и $\alpha T = 2\pi n$, где m и n — целые числа. Поэтому $\alpha = n/m$, что противоречит иррациональности α.

26.3. Предположим, что у функции $f(x)$ в точке x_0 есть два предела: a и b, причём $a \neq b$. Для $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$ выберем δ_1 и δ_1 так, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta_1$ и $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta_2$. Тогда если $x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \min(\delta_1, \delta_2)$, то $|a - b| \leqslant |f(x) - a| + |f(x) - b| < 2\varepsilon = |a - b|$. Приходим к противоречию.

26.4. Предположим сначала, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Затем для данной последовательности $\{a_n\}$, сходящейся к x_0, выберем N так, что $|a_n - x_0| < \delta$ при $n > N$. Тогда $|f(a_n) - a| < \varepsilon$, поэтому $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$.

Предположим теперь, что равенство $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ не имеет места. Тогда существует $\varepsilon > 0$, обладающее следующим свойством: для любого $\delta > 0$ существует $x \neq x_0$, для которого $|x - x_0| < \delta$, но $|f(x) - a| > \varepsilon$. Для $\delta = 1/n$ соответствующее x обозначим a_n. В результате получим последовательность $\{a_n\}$, для которой $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, но равенство $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = a$ не имеет места.

26.5. Согласно задаче 26.4 эти свойства пределов функций следуют из соответствующих свойств пределов последовательностей (задача 25.2).

26.6. Согласно задаче 11.1 $\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$ при $0 < \alpha < \pi/2$. Такие же неравенства верны и при $-\pi/2 < \alpha < 0$, поскольку $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ и $\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Остаётся заметить, что $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \cos 0 = 1$.

26.7. Воспользуемся задачей 26.5. Ясно, что $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, поэтому, применив индукцию по n, получим $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. Значит,

$$\lim_{x\to x_0}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Если $Q(x_0) \neq 0$, то $\lim_{x\to x_0} P(x)/Q(x) = P(x_0)/Q(x_0)$.

26.8. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что если $|y - y_0| < \delta$, то $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Затем для $\varepsilon_1 = \delta$ выберем δ_1 так, что если $|x - x_0| < \delta_1$, то $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon_1$. Для данного $\varepsilon > 0$ мы выбрали $\delta_1 > 0$ так, что если $|x - x_0| < \delta_1$, то $|g\bigl(f(x)\bigr) - g\bigl(f(x_0)\bigr)| < \varepsilon$.

26.9. Ясно, что

$$\sin(x+\varepsilon) - \sin x = 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Поэтому достаточно доказать, что $\lim_{t\to 0}\sin t = 0$. Но если $|t| < \pi/2$, то $|\sin t| < |t|$ согласно задаче 11.1.

26.10. Ясно, что функция $f(x)$ непрерывна во всех точках $x \neq 0$. Проверим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, что если $|x| < \delta$, то $|f(x)| < \varepsilon$. Но $|f(x)| = |x\sin\dfrac{1}{x}| \leqslant |x|$. Поэтому можно положить $\delta = \varepsilon$.

26.11. Пусть для определённости $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$. Построим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следующим образом. Положим $a_1 = a$ и $b_1 = b$. Пусть c — середина отрезка $[a, b]$. Если $f(c) < 0$, то положим $a_2 = a_1$ и $b_2 = c$; если же $f(c) > 0$, то положим $a_2 = c$ и $b_2 = b_1$ (мы предполагаем, что $f(c) \neq 0$, поскольку иначе доказательство немедленно завершается). Затем берём середину отрезка $[a_2, b_2]$ и повторяем то же самое и т.д. В результате получим неубывающую последовательность $\{a_n\}$ и невозрастающую последовательность $\{b_n\}$. Эти последовательности ограничены и $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Поэтому по теореме Вейерштрасса $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$. По построению $f(a_n) \geqslant 0$ для всех n. Функция $f(x)$ непрерывна, поэтому $f(x_0) \geqslant 0$. С другой стороны, $f(b_n) \leqslant 0$, поэтому $f(x_0) \leqslant 0$. Значит, $f(x_0) = 0$. Ясно также, что $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

26.12. а) Если f — непрерывная функция и уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных решений, то либо $f(x) > x$ для всех x, либо $f(x) < x$ для всех x. В первом случае $f(f(x)) < f(x) < x$, а во втором случае $f(f(x)) > f(x) > x$.

б) Если f и g — непрерывные функции и уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет вещественных решений, то либо $f(x) > g(x)$ для всех x, либо $f(x) < g(x)$ для всех x. В первом случае $f(f(x)) > g(f(x)) = f(g(x)) > g(g(x))$. Во втором случае $f(f(x)) < g(g(x))$.

26.13. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - x$. Ясно, что $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ и $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Поэтому $\varphi(x) = 0$ для некоторой точки x отрезка $[0, 1]$. В таком случае $f(x) = x$.

26.14. Ответ: нет, не существует. Действительно, если f — требуемая функция, то $f(x) \neq x$ для любой точки x отрезка $[0, 1]$. Но согласно задаче 26.13 таких непрерывных функций нет.

26.15. Докажем, что функция $f(x)$ ограничена сверху (ограниченность снизу доказывается аналогично). Предположим, что для любого натурального n на отрезке $[a, b]$ есть точка x_n, для которой $f(x_n) > n$. Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса (задача 25.11) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$ (ясно, что $a \leqslant x_0 \leqslant b$). Тогда $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Но это противоречит тому, что $f(x_{n_k}) > n_k \to \infty$.

26.16. Ответ: нет, не верно. Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но она не ограничена сверху.

26.17. Докажем, что на отрезке $[a, b]$ существует точка x_0, для которой $f(x_0) = M$, где M — точная верхняя грань множества чисел $f(x)$ для всех точек x отрезка $[a, b]$. (Для точной нижней грани доказательство аналогично.) Прежде всего заметим, что множество значений функции $f(x)$ ограничено (задача 26.15), поэтому точная верхняя грань M существует (задача 25.45). Следовательно, можно выбрать последовательность точек x_n отрезка $[a, b]$ так, что $M - \dfrac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M$. Выберем из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Если $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, то $a \leqslant x_0 \leqslant b$ и $f(x_0) = M$.

26.18. Достаточно доказать, что из неравенства (1) следует неравенство (2) для любого n. Если выполняется неравенство (1), то

$$4f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \leqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \leqslant \\ \leqslant f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4).$$

Аналогично доказывается, что неравенство выполняется для любого $n = 2^m$.

Остаётся доказать, что если неравенство выполняется для n, то оно выполняется и для $n - 1$. Пусть даны числа $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Положим $x_n = \dfrac{1}{n-1}(x_1 + \ldots + x_{n-1})$. Тогда

$$f(x_n) = f\left(\frac{(n-1)x_n + x_n}{n}\right) = f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)}{n}.$$

Следовательно, $f(x_n) \leqslant \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})}{n-1}$, что и требовалось.

26.19. а) Если числа p и q рациональные, то $p = \dfrac{m}{n}$ и $q = \dfrac{n-m}{n}$, где m, n и $n - m$ — натуральные числа. Применим неравенство из задачи 26.18 для

чисел $x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2$ (m чисел x_1 и $n-m$ чисел x_2). В результате получим требуемое.

б) Следует из задачи а), поскольку любое число является пределом последовательности рациональных чисел.

26.20. Решение аналогично решению задачи 26.19.

26.21. Требуется доказать, что если $x_1, x_2 > 0$, то $\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}$. Это неравенство эквивалентно неравенству $\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \exp\left(\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}\right) = \sqrt{x_1 x_2}$.

26.22. Функция $f(x) = \ln x$ вогнута (задача 26.21). Поэтому согласно неравенству Йенсена

$$\ln\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln A + \frac{1}{q}\ln A.$$

Это неравенство эквивалентно требуемому.

Замечание. *Другое доказательство приведено в решении задачи 8.45.*

26.23. а) Функция $f(x) = x^2$ на множестве всех действительных чисел не является равномерно непрерывной. Действительно, если бы эта функция была равномерно непрерывной, то тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно было бы выбрать $\delta > 0$ так, что для любого x выполняется неравенство $\left|\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon$, т.е. $\left|\delta x + \frac{\delta^2}{4}\right| < \varepsilon$. Но если x достаточно велико, то это неравенство не может выполняться.

б) Функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0,1)$ не является равномерно непрерывной. Действительно, предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ мы выбрали $\delta > 0$ так, что $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x+(\delta/2)}\right| < \varepsilon$ для всех x из интервала $\left(0, 1-\frac{\delta}{2}\right)$. Это неравенство можно переписать в виде $\frac{\delta}{2} < \varepsilon\left|x\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right|$. При $x \to 0$ получаем $\delta \leqslant 0$. Приходим к противоречию.

26.24. Предположим, что функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является непрерывной, но не равномерно непрерывной. Тогда существует положительное число ε_0, для которого для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x'(\delta)$ и $x''(\delta)$ из отрезка $[a,b]$, обладающие следующими свойствами: $|x'(\delta) - x''(\delta)| < \delta$ и $|f(x'(\delta)) - f(x''(\delta))| \geqslant \varepsilon_0$. Положим $x'_n = x'(1/n)$ и $x''_n = x''(1/n)$. Из ограниченной последовательности $\{x'_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x_0 отрезка $[a,b]$ (задача 25.12). Неравенство $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ показывает, что подпоследовательность $\{x''_{n_k}\}$ тоже сходится

к точке x_0. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$ и $f(x''_{n_k}) \to f(x_0)$. Но это противоречит неравенству $|f(x'(\delta)) - f(x''(\delta))| \geqslant \varepsilon_0$.

26.25. Непрерывность функции $f(x)$ доказана в решении задачи 26.10. Пусть $x_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $x_2 = \dfrac{1}{\pi}$, $x_3 = \dfrac{2}{3\pi}$, $x_4 = \dfrac{1}{2\pi}$, $x_5 = \dfrac{2}{5\pi}$, $x_6 = \dfrac{1}{3\pi}$, $x_7 = \dfrac{2}{7\pi}$, $x_8 = \dfrac{1}{4\pi}$, ... Тогда $f(x_{2k}) = 0$, поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(x_{k+1} - f(x_k)| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{5\pi} + \frac{2}{7\pi} + \ldots$$

Этот ряд расходится (задача 30.7).

26.26. Ясно, что если функция g неубывающая или невозрастающая, то $\mathrm{Var}_a^b(g) = |g(a) - g(b)|$; в частности, g — функция ограниченной вариации. Ясно также, что если g_1 и g_2 — функции ограниченной вариации, то $f = g_1 + g_2$ тоже функция ограниченной вариации.

Рассмотрим сумму $v = \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$. Пусть p — сумма тех слагаемых, для которых $f(x_{k+1}) - f(x_k) > 0$, а $(-n)$ — сумма тех слагаемых, для которых $f(x_{k+1}) - f(x_k) < 0$. Тогда $v = p + n$ и $f(a) - f(b) = p - n$, поэтому

$$v = 2p + f(a) - f(b) = 2n + f(b) - f(a).$$

Пусть V, P и N — точные верхние грани чисел v, p и n для всех наборов точек $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n < b = x_{n+1}$. Аналогично определим числа $V(x)$, $P(x)$ и $N(x)$, заменив отрезок $[a, b]$ на отрезок $[a, x]$. Ясно, что $P(x)$ и $N(x)$ — неубывающие функции на отрезке $[a, b]$. Ясно также, что

$$V(x) = 2P(x) + f(a) - f(x) = 2N(x) + f(x) - f(a),$$

поэтому $f(x) = f(a) + P(x) - N(x)$. Обе функции $f(a) + P(x)$ и $N(x)$ неубывающие.

26.27. Предположим сначала, что функция V непрерывна в точке x_0. Функция f является суммой двух монотонных функций, поэтому существуют односторонние пределы $f(x_0+)$ и $f(x_0-)$. Из определения функции V следует, что если $x_0 < x \leqslant b$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant V(x) - V(x_0),$$

поэтому $|f(x_0+) - f(x_0)| \leqslant V(x_0+) - V(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0+) = f(x_0)$. Аналогично доказывается, что $f(x_0-) = f(x_0)$.

Предположим теперь, что функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Для того же самого ε существует такое разбиение отрезка $[x_0, b]$, что

$$V(b) - V(a) < \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \varepsilon/2. \qquad (1)$$

Выражение, стоящее в правой части неравенства, при измельчении разбиения не уменьшается, поэтому можно считать, что $x_0 < x_1 < x_0+\delta$. В таком случае

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1})-f(x_k)| = |f(x_1)-f(x_0)|+\sum_{k=1}^{n} |f(x_{k+1})-f(x_k)| \leqslant \varepsilon/2+(V(b)-V(x_1)). \tag{2}$$

Сравнивая неравенства (1) и (2), получаем $V(x_1) - V(x_0) < \varepsilon$. Ясно также, что $V(x_1) \geqslant V(x_0)$. Следовательно, $V(x_0+) = V(x_0)$. Аналогично $V(x_0-) = V(x_0)$. Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то нужно рассматривать только один из односторонних пределов.

Глава 27.

Логарифм и показательная функция

27.1. Определение показательной функции и логарифма

Определим сначала показательную функцию a^x для рациональных x. (Показательную функцию мы определяем только для положительных a.) Пусть $a > 0$ и $x = p/q$, где p и q — натуральные числа. Определим a^x как $\sqrt[q]{a^p}$, где имеется в виду арифметическое (положительное) значение корня. Ясно, что $\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$. Действительно, это равенство эквивалентно равенству $(a^{np})^q = (a^p)^{nq}$. При $x < 0$ мы полагаем $a^x = 1/a^{-x}$.

27.1. а) Пусть $a > 1$. Докажите, что если $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$.

б) Пусть $a < 1$. Докажите, что если $x_1 > x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$.

27.2. Пусть $a > 1$. Докажите, что a^x может быть сколь угодно велико, если x достаточно велико.

27.3. Докажите, что $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$.

27.4. Докажите, что $a^{\lambda x} = (a^x)^\lambda$ для любого рационального λ.

27.5. Пусть a — положительное число, $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, причём $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

Пусть a — положительное число. Определим a^x для произвольного x следующим образом. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x. Положим $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$.

27.6. Докажите, что если существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, где $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, то существует предел $\lim_{n\to\infty} a^{x_n}$, причём этот предел зависит только от x.

Пусть a и x — положительные числа. *Логарифм* x по основанию a — это число $y = \log_a x$, для которого $a^y = x$.

27.7. Докажите, что $\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

27.2. Показательная функция

27.8. Решите уравнение $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

27.9. Решите уравнение $6^x - 2^x = 32$.

27.10. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

27.3. Тождества для логарифмов

27.11. а) Докажите, что $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

б) Докажите, что $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

27.12. Предположим, что $a^2 + b^2 = 7ab$ и $ab \neq 0$. Докажите, что

$$\lg\left|\frac{a+b}{3}\right| = \frac{1}{2}(\lg|a| + \lg|b|).$$

27.4. Неравенства и сравнения чисел

27.13. Докажите, что

$$2 < \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}.$$

27.14. Докажите, что $3/10 < \lg 2 < 1/3$.

27.15. Сравните числа $\log_{a-1} a$ и $\log_a(a+1)$, где $a > 1$.

27.16. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

27.17. Сравните числа $\log_{20} 80$ и $\log_{80} 640$.

27.18. Сравните числа $\log_5 7$ и $\log_{13} 17$.

27.19. Сравните числа $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

27.5. Иррациональность логарифмов

27.20. Докажите, что следующие числа иррациональны: а) $\log_2 3$; б) $\log_{\sqrt{2}} 3$; в) $\log_{5+3\sqrt{2}}(3+5\sqrt{2})$.

27.21. Приведите пример положительных иррациональных чисел a и b, для которых число a^b целое.

27.6. Некоторые замечательные пределы

27.22. Докажите, что $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

27.23. Докажите, что $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

27.24. Докажите, что $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = a$ для любого вещественного a.

27.25. Докажите, что $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ для любого положительного a.

27.7. Гиперболические функции

Такую же роль, какую играют для окружности тригонометрические функции, для гиперболы $x^2-y^2=1$ играют *гиперболические функции*:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (*гиперболический синус*);

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (*гиперболический косинус*);

$\operatorname{th} x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (*гиперболический тангенс*);

$\operatorname{cth} x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ (*гиперболический котангенс*).

Очевидно, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$.

27.26. Докажите, что точка с координатами $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ лежит на гиперболе $x^2 - y^2 = 1$.

27.27. Докажите, что

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Обратные гиперболические функции определяются следующим образом:

если $x = \operatorname{sh} y$, то $y = \operatorname{Arsh} x$ (*ареасинус*[1] *гиперболический*);
если $x = \operatorname{ch} y$, то $y = \operatorname{Arch} x$ (*ареакосинус гиперболический*) ;
если $x = \operatorname{th} y$, то $y = \operatorname{Arth} x$ (*ареатангенс гиперболический*) ;
если $x = \operatorname{cth} y$, то $y = \operatorname{Arcth} x$ (*ареакотангенс гиперболический*) .

27.28. Докажите, что

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1});$$
$$\operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) = \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1});$$
$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Гиперболической амплитудой числа x называют угол α $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$, для которого $\operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \alpha$.

27.29. Докажите следующие свойства гиперболической амплитуды:
а) $\operatorname{ch} x = 1/\cos\alpha$;
б) $\operatorname{th}(x/2) = \operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Решения

27.1. а) Можно считать, что $x_1 = p_1/q$ и $x_2 = p_2/q$. Тогда $a^{p_1} > a^{p_2}$, поскольку $a > 1$. Для положительных чисел α и β неравенство $\alpha > \beta$ эквивалентно неравенству $\alpha^q > \beta^q$. Поэтому $a^{p_1/q} > a^{p_2/q}$.

б) Решение аналогично, но в этом случае $a^{p_1} < a^{p_2}$, поскольку $a < 1$.

27.2. Положим $a = 1 + \delta$, где $\delta > 0$. Тогда

$$(1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \ldots > n\delta.$$

Поэтому если $n > y/\delta$, то $a^n > y$.

[1] От латинского area — площадь.

27.3. Можно считать, что $x_1 = p_1/q$ и $x_2 = p_2/q$. Ясно, что $a^{p_1+p_2} = a^{p_1}a^{p_2}$. Поэтому $a^{x_1+x_2} = \sqrt[q]{a^{p_1+p_2}} = \sqrt[q]{a^{p_1}} \cdot \sqrt[q]{a^{p_2}} = a^{x_1}a^{x_2}$.

27.4. Для натурального λ это следует из задачи 27.3. Если $\lambda = p/q$, то достаточно извлечь корень степени q из обеих частей равенства $a^{px} = (a^x)^p$.

27.5. Рассмотрим сначала следующий частный случай: $x_n = 1/n$. В этом случае требуемое утверждение доказано в решении задачи 25.20.

Можно построить последовательность натуральных чисел $k_n \to \infty$ так, что $-\frac{1}{k_n} < x_n < \frac{1}{k_n}$. Тогда $a^{-1/k_n} < a^{x_n} < a^{1/k_n}$ при $a > 1$ и $a^{1/k_n} < a^{x_n} < a^{-1/k_n}$ при $a < 1$. Остаётся заметить, что $\lim_{n\to\infty} a^{1/k_n} = 1 = \lim_{n\to\infty} a^{-1/k_n}$.

27.6. Будем считать, что $a > 1$; случай $a < 1$ разбирается аналогично. Рассмотрим вспомогательные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к x, причём $\{x'_n\}$ монотонно возрастает, а $\{x''_n\}$ монотонно убывает. Согласно задаче 27.1 последовательность $\{a^{x'_n}\}$ монотонно возрастает. Эта последовательность ограничена, поэтому существует предел $\lim_{n\to\infty} a^{x'_n} = c'$. Аналогично существует предел $\lim_{n\to\infty} a^{x''_n} = c''$. Ясно, что $x''_n - x'_n \to 0$, поэтому согласно задаче 27.6 $c''/c' = \lim_{n\to\infty} a^{x''_n - x'_n} = 1$, т.е. $c'' = c' = c$.

Теперь для исходной последовательности $\{x_n\}$ мы можем выбрать последовательность натуральных чисел $k_n \to \infty$ так, что $x'_{k_n} < x_n < x''_{k_n}$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = c$. Число c зависит только от x.

27.7. Это следует из соответствующего свойства показательной функции: $a^{y_1+y_2} = a^{y_1}a^{y_2}$ (задача 27.3).

27.8. Ответ: $x = 2$. Функция $f(x) = 5^{2x-1} + 5^{x+1}$ монотонно возрастает, поэтому она принимает значение 250 лишь при одном значении x. Ясно также, что $f(2) = 5^3 + 5^3 = 250$.

27.9. Ответ: $x = 2$. Поделив обе части уравнения на $2^x \neq 0$, перейдём к уравнению $3^x - 2 = 32 \cdot 2^{-x}$. Функция $f(x) = 3^x - 2$ монотонно возрастает, а функция $g(x) = 32 \cdot 2^{-x}$ монотонно убывает. Поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь больше одного решения. А одно решение легко угадывается.

27.10. Ответ: 31 цифру. Ясно, что $2^{100} = (1024)^{10} > 1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет не меньше 31 цифры. С другой стороны,

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \ldots \frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10;$$

Таким образом, $2^{100} = (1024)^{10} < 10 \cdot 1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет меньше 32 цифр.

27.11. а) По определению $a^{\log_a x} = x$. Прологарифмировав обе части этого равенства по основанию b, получим $\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x$.

б) Запишем тождество из задачи а) для $x = b$ и заметим, что $\log_b b = 1$.

27.12. Требуемое равенство можно переписать в виде $\lg\dfrac{(a+b)^2}{9} = \lg ab$ (мы воспользовались тем, что $ab > 0$). Из условия следует, что $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab = 9ab$.

27.13. Правая часть требуемого неравенства равна $\dfrac{\lg 2}{\lg\pi} + \dfrac{\lg 5}{\lg\pi}$. Поэтому нужно доказать, что $2\lg\pi < \lg 2 + \lg 5$, т.е. $\lg(\pi^2) < \lg 10$. Остаётся заметить, что $\pi^2 < 9,87$ (задача 33.4).

27.14. Неравенство $3/10 < \lg 2$ эквивалентно тому, что $10^3 < 2^{10} = 1024$, а неравенство $\lg 2 < 1/3$ эквивалентно тому, что $8 = 2^3 < 10$.

27.15. Неравенство $(a-1)(a+1) < a^2$ показывает, что $\log_a(a-1) + \log_a(a+1) < 2$. С другой стороны,

$$\log_a(a-1) + \log_a(a+1) > 2\sqrt{\log_a(a-1)\log_a(a+1)}.$$

Поэтому $\log_a(a-1)\log_a(a+1) < 1$, т.е. $\log_{a-1} a > \log_a(a+1)$.

27.16. Пусть $a = \log_2 3$ и $b = \log_3 5$. Тогда $2^a = 3$, поэтому $8^a = 3^3 > 5^2 = 9^b > 8^b$. Значит, $\log_2 3 > \log_3 5$.

27.17. Ясно, что $\log_{20} 80 = 1 + 2\log_{20} 2$ и $\log_{80} 640 = 1 + 3\log_{80} 2$. Далее, $\log_{20} 2 = \dfrac{1}{\log_2 20}$ и $\log_{80} 2 = \dfrac{1}{\log_2 80}$. Кроме того, $3\log_2 20 = \log_2 8000 > \log_2 6400 = 2\log_2 80$. Поэтому $\log_{20} 80 < \log_{80} 640$.

27.18. Ясно, что $\log_5 7 - 1 = \log_5\dfrac{7}{5}$ и $\log_{13} 17 - 1 = \log_{13}\dfrac{17}{13}$. Легко проверить, что $\dfrac{7}{5} > \dfrac{17}{13}$. Поэтому $\log_5\dfrac{7}{5} > \log_{13}\dfrac{7}{5}\log_{13}\dfrac{17}{13}$. В итоге получаем, что $\log_5 7 > \log_{13} 17$.

27.19. Ясно, что $\log_7 27 = 3\log_7 3 = \dfrac{3}{\log_3 7}$. Покажем, что $(\log_3 7)^2 > 3$, т.е. $\log_3 7 > \sqrt{3}$. Легко проверить, что $\sqrt{3} < 7/4$. Поэтому неравенство $7 > 3^{\sqrt{3}}$ следует из неравенства $7^4 > 3^7$, т.е. $2401 > 2187$ В итоге получаем, что $\log_3 7 > \log_7 27$.

27.20. а) Предположим, что $\log_2 3 = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда $2^{p/q} = 3$, т.е. $2^p = 3^q$. Этого не может быть.

б) Предположим, что $\log_{\sqrt{2}} 3 = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда $(\sqrt{2})^{p/q} = 3$, т.е. $2^p = 3^{2q}$. Этого не может быть.

в) Эта задача эквивалентна задаче 6.25.

27.21. Положим $a = \sqrt{2}$ и $b = \log_{\sqrt{2}} 3$. Числа a и b иррациональные (задачи 6.16 и 27.20). При этом $a^b = (\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$.

27.22. Мы воспользуемся тем, что $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ (задача 25.37). Для каждого $x \geqslant 1$ можно выбрать натуральное число n так, что $n \leqslant x < n +$

$+1$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right),$$
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}.$$

При $n \to \infty$ пределы правых частей обоих неравенств равны e.

Докажем теперь, что при $x \to -\infty$ предел получается тот же самый. Для этого положим $y = -x$ и заметим, что

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1+\frac{y}{y-1}\right).$$

При $y \to \infty$ правая часть стремится к e.

27.23. Согласно задаче 27.22 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Из этого, воспользовавшись непрерывностью логарифма, получаем $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = 1$.

27.24. Пусть $(1+x)^a = 1+y$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$. Далее, $a\ln(1+x) = \ln(1+y)$. Поэтому

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{a\ln(1+x)}{x}.$$

Воспользовавшись пределом из задачи 27.23, получаем требуемое.

27.25. Пусть $a^x - 1 = y$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$. Кроме того, $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$. Поэтому $\dfrac{a^x-1}{x} = \dfrac{y}{\ln(1+y)} \cdot \ln a$. Воспользовавшись пределом из задачи 27.23, получаем требуемое.

27.26. Формула для разности квадратов показывает, что

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 = e^t \cdot e^{-t} = 1.$$

27.27. Ясно, что

$$4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y},$$
$$4\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y},$$

Из этого легко получается первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично.

27.28. Пусть $y = \operatorname{Arsh} x$. Тогда $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Поэтому $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$. Решая это квадратное уравнение относительно e^y, получаем $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Но $e^y \geqslant 0$, поэтому $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, т.е. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Пусть $y = \operatorname{Arch} x$. Тогда $x = \operatorname{ch} y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Поэтому $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$, а значит, $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. Таким образом, $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. Равенство $(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$ показывает, что $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Пусть $y = \operatorname{Arth} x$. Тогда $x = \operatorname{th} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$. Поэтому $e^y(1 - x) = e^{-y}(1 + x)$, а значит, $e^{2y} = \dfrac{1 + x}{1 - x}$. Таким образом, $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

27.29. а) Ясно, что $1 = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{tg}^2 \alpha$. Поэтому $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$. Кроме того, $\operatorname{ch} x$ и $\cos \alpha$ положительны.

б) Ясно, что $e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \operatorname{tg} \alpha + \dfrac{1}{\cos \alpha} = \dfrac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Поэтому $x = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Формула для тангенса суммы показывает, что $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)}$. Таким образом,

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \operatorname{Arth}\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right),$$

что и требовалось.

Глава 28.

Производная

28.1. Определение производной

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 — это предел $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Если этот предел существует, то говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0.

Для функции $f(x)$, определённой на отрезке $[a, b]$, производные в точках a и b определяются как односторонние пределы.

Производную функции $g(x) = f'(x)$ называют*второй производной*, или *производной второго порядка* функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$. Аналогично определяется производная третьего порядка $f'''(x)$ и т.д. Производную n-го порядка обозначают $f^{(n)}(x)$.

28.1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Прямая, проходящая через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, задаётся уравнением $y - y_0 = k(x_1)(x - x_0)$. Докажите, что $\lim_{x_1\to x_0} k(x_1) = f'(x_0)$.

Прямую $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ называют *касательной* к графику $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

28.2. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

28.3. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то:

а) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

б) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$, где $(fg)(x) = f(x)g(x)$;

в) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$, если $g(x_0) \neq 0$.

Композицией функций f и g называют функцию $g \circ f(x) = g(f(x))$.

28.4. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Предположим, что у точки x_0 есть такая окрестность $U(x_0)$, что если x принадлежит $U(x_0)$ и $x \neq x_0$, то $f(x) \neq f(x_0)$. Докажите, что функция $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]f'(x_0)$.

Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда каждой точке y отрезка $[f(a), f(b)]$ соответствует единственная точка x отрезка $[a, b]$, для которой $y = f(x)$. Поэтому можно определить *обратную* функцию $g(y) = x$.

28.5. Пусть $f'(x_0) \neq 0$, $g(y)$ — обратная к $f(x)$ функция. Докажите, что если $y = f(x_0)$, то $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

28.2. Производные элементарных функций

28.6. Докажите, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого натурального n.

28.7. Докажите, что $(x^a)' = ax^{a-1}$ для любого вещественного a и положительного x.

28.8. Докажите, что $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$.

28.9. Докажите, что $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ при $x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ и $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ при $x \neq k\pi$.

28.10. Докажите, что $(a^x)' = a^x \ln a$ для $a > 0$.

28.11. Докажите, что $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

28.12. Докажите, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

28.13. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, причём функция $u(x)$ положительна. Докажите, что функция $u^v = u(x)^{v(x)}$ дифференцируема и найдите её производную.

28.14. Вычислите производную функции $f(x) = x^{\sin x}$ (для $x > 0$).

28.15. Вычислите производную функции $f(x) = \cos^x a - \sin^x a$, где $0 < a < \pi/2$ — постоянный угол.

28.3. Кратный корень многочлена

28.16. Докажите, что многочлен $f(x)$ степени $n \geqslant 2$ имеет кратный корень тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $f'(x)$ имеют общий корень.

28.17. Докажите, что если

$$\begin{aligned} x_0^4 + a_1x_0^3 + a_2x_0^2 + a_3x_0 + a_4 &= 0, \\ 4x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3 &= 0, \end{aligned}$$

то $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ делится на $(x - x_0)^2$.

28.18. Докажите, что многочлен

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

28.4. Производная многочлена

28.19. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что все коэффициенты его n-й производной $P^{(n)}(x)$ делятся на $n!$ для любого натурального n.

28.20. Докажите, что среднее арифметическое корней многочлена равно среднему арифметическому корней его производной.

28.21. Пусть f и g — многочлены степени n. Докажите, что $fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - f^{(3)}g^{(n-3)} + \ldots + (-1)^n f^{(n)}g$ — константа.

28.22. Пусть p и q — вещественные числа. Выясните, сколько вещественных корней имеет кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ в зависимости от знаков чисел p и $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$.

28.23. Пусть $f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$, где числа $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны и отличны от нуля. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{f'(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant n-2; \\ 1 & \text{при } k = n-1. \end{cases}$$

28.24. Пусть $P(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ — вещественные числа. Докажите, что $\bigl(P'(x)\bigr)^2 \geqslant P(x)P''(x)$ для всех вещественных x.

28.25. Четыре корня многочлена 4-й степени образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что корни его производной тоже образуют арифметическую прогрессию.

28.26. Докажите, что любой многочлен можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих многочленов.

28.27. Докажите, что многочлен $P(x) = a_0 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_nx^{k_n}$ имеет не более n положительных корней.

28.28. Докажите, что если все корни многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с вещественными коэффициентами вещественны и попарно различны, то

$$a_i^2 > \frac{n-i+1}{n-1}\frac{i+1}{i}a_{i-1}a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

(*Ньютон*)

28.5. Тождества

28.29. Пусть $(x+a)^n = A_0+A_1x+\dots+A_nx^n$. Найдите коэффициенты $A_0, \dots, A_n$ последовательным дифференцированием.

28.30. Вычислите сумму $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$, продифференцировав равенство $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

См. также задачи 14.13 и 30.14.

28.6. Касательная и нормаль

28.31. Касательная к кривой $y = e^x$ в точке (x_0, y_0) пересекает ось Ox в точке $(x_1, 0)$. Докажите, что разность $x_1 - x_0$ одна и та же для всех точек кривой.

28.32. На параболе, ось которой параллельна оси Oy, взяты точки A_1, A_2 и A_3. Пусть k_1 — тангенс угла наклона касательной в точке A_1, k_{ij} — тангенс угла наклона секущей A_iA_j. Докажите, что

$$k_1 = k_{12} + k_{13} - k_{23}.$$

Нормаль к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) — это прямая, которая проходит через точку (x_0, y_0) перпендикулярно касательной в этой точке.

28.33. Докажите, что нормаль к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) задаётся уравнением

$$-f'(x_0)(y - y_0) = x - x_0.$$

28.34. Нормаль к параболе $y = x^2$ в точке (x_0, y_0) пересекает ось Oy в точке $(0, y_1)$. Докажите, что разность $y_1 - y_0$ постоянна для всех точек параболы.

См. также задачу 8.18.

28.7. Функции, дифференцируемые на отрезке

28.35. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и в некоторой внутренней точке x_0 этого отрезка она достигает наибольшего или наименьшего значения. Докажите, что если в точке x_0 существует производная, то $f'(x_0) = 0$. (*Ферма*)

28.36. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причём $f(a) = f(b)$. Докажите, что существует внутренняя точка x_0 этого отрезка, для которой $f'(x_0) = 0$. (*Ролль*)

28.37. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Докажите, что существует внутренняя точка x_0 этого отрезка, для которой

$$f'(x_0) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}. \qquad \textit{(Лагранж)}$$

Теорему Лагранжа, записанную в виде $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$, часто называют *формулой конечных приращений.*

28.38. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причём $f'(x) = 0$ для всех точек x отрезка $[a, b]$. Докажите, что функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$.

28.39. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$.

а) Докажите, что эта функция неубывающая (на этом отрезке) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ для любой точки x интервала (a, b).

б) Докажите, что если $f'(x) \geqslant 0$ для любой точки x интервала (a, b) и не существует отрезка $[p, q]$, содержащегося в $[a, b]$, во всех точках которого f' обращается в нуль, то функция $f(x)$ возрастающая.

28.40. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Докажите, что если $f(a) = g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ для любой точки x интервала (a, b), то $f(x) > g(x)$ для любой точки x интервала (a, b).

28.41. Докажите, что если $x > 0$, то $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ и $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$.

28.42. Докажите, что если $0 < x < \pi/2$, то $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{1}{3}x^3$.

Замечание. *Доказательства неравенств из задач 28.41 и 28.42 основаны на том, что из неравенства для производных следует неравенство для функций. Другими словами, из неравенства для функций следует неравенство для первообразных (интегралов). Такой подход (по сути дела, эквивалентный) в некотором смысле более естествен: чтобы получить неравенство, нужно вычислить первообразную. Поэтому здесь мы привели только два неравенства. Более подробно этот метод доказательства неравенств обсуждается в §29.8.*

28.43. а) Пусть $0 < \alpha < 1$ и $x \geqslant 0$. Докажите, что $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$.

б) Пусть a, b, p и q — положительные числа, причём $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Докажите, что $ab \leqslant \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.

28.44. Функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, причём производная $g'(x)$ не обращается в нуль во внутренних точках этого отрезка. Докажите, что существует внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, для которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{a - b} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \qquad \text{(\textit{Коши})}$$

28.8. Неравенства

28.45. Докажите, что если $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, то $\alpha \sin\beta < \beta \sin\alpha$.

28.46. Докажите, что если $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, то $\alpha \operatorname{tg}\beta > \beta \operatorname{tg}\alpha$.

28.47. Докажите, что если $0 < \alpha < \pi/2$, то $2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha > 3\alpha$.

28.48. а) Докажите, что $e^x > 1 + x$ для любого $x \neq 0$.

б) Докажите, что $\dfrac{1}{n+1} < \ln\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n}$ для любого натурального n.

28.49. Пусть $x > 0$, $x \neq 1$. Докажите, что: а) $\ln x < x - 1$; б) $\ln x > \dfrac{x-1}{x}$.

28.50. а) Докажите, что $\ln x < n(x^{1/n} - 1) < x^{1/n}\ln x$ для любого положительного числа $x \neq 1$.

б) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1) = \ln x$ для любого положительного числа $x \neq 1$.

28.51. Пусть $x > 0$.

а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) = x$.

б) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

28.52. Докажите, что $e^x > x^e$ для любого положительного $x \neq e$.

28.53. Пусть a и b — положительные числа. Докажите, что $b \cdot 2^a + a \cdot 2^b \geqslant a + b$.

28.54. Пусть $a > b > 0$. Докажите, что

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}.$$

28.55. Докажите, что

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx > 0$$

при $0 < x < \pi$.

28.56. Пусть $0 < x < \pi/4$. Докажите, что

$$(\cos x)^{\cos^2 x} > (\sin x)^{\sin^2 x} \quad \text{и} \quad (\cos x)^{\cos^4 x} < (\sin x)^{\sin^4 x}.$$

28.57. Докажите, что если $x > -1$ и $x \neq 0$, то

$$\frac{2|x|}{2+x} < |\ln(1+x)| < \frac{|x|}{\sqrt{1+x}}.$$

28.9. Правило Лопиталя

28.58. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши (задача 28.44) и, кроме того, $f(a) = g(a) = 0$. Докажите, что если $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (*правило Лопиталя*).

28.59. Вычислите с помощью правила Лопиталя $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

28.60. Вычислите предел $\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$.

28.61. Вычислите предел $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

28.10. Количество корней уравнения

28.62. Сколько (вещественных) решений имеет уравнение $x^3 - 3x = a$ в зависимости от значения параметра a?

28.63. Сколько решений имеет уравнение $x^3 + 1 = ax$ в зависимости от значения параметра a?

28.64. Сколько решений имеет уравнение $e^x = ax$ в зависимости от значения параметра a?

28.65. Сколько решений имеет уравнение $a^x = x$ в зависимости от значения положительного параметра a?

28.66. Сколько решений имеет уравнение $a^x = \log_a x$ в зависимости от значения положительного параметра $a \neq 1$?

28.67. Сколько решений имеет уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$?

28.68. Докажите, что при чётном n многочлен

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет вещественных корней, а при нечётном n имеет ровно один вещественный корень.

28.11. Периодические функции

28.69. Докажите, что если $f(x)$ — периодическая функция, то $f'(x)$ тоже периодическая функция.

28.70. Докажите, что если α — положительное иррациональное число, то функция $f(x) = \sin x + \sin \alpha x$ непериодическая.

28.12. Нормированные симметрические функции

Элементарная симметрическая функция $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ содержит $\binom{n}{k}$ слагаемых. В связи с этим иногда рассматривают *нормированные* элементарные симметрические функции $\Sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)/\binom{n}{k}$. Удобно считать, что $\Sigma_0(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

28.71. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — корни его производной. Докажите, что $\Sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma_k(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

28.72. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — положительные числа и $\Sigma_k = \Sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$. Докажите, что

$$\Sigma_1 \geqslant \sqrt{\Sigma_2} \geqslant \sqrt[3]{\Sigma_3} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt[n]{\Sigma_n}$$

(*Маклорен*).

28.73. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — вещественные числа. Докажите, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ имеют место неравенства

$$\Sigma_k^2(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \Sigma_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)\Sigma_{k+1}(x_1, \ldots, x_n)$$

(*Ньютон*).

28.13. Алгебраические и трансцендентные функции

Функцию $f(x)$ называют *алгебраической*, если существуют многочлены $P_0(x), \ldots, P_n(x)$, для которых

$$P_0(x)\bigl(f(x)\bigr)^n + P_1(x)\bigl(f(x)\bigr)^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0,$$

причём многочлен $P_0(x)$ не равен тождественно нулю. В противном случае функцию $f(x)$ называют *трансцендентной*.

28.74. Докажите, что функция $f(x) = \sin x$ трансцендентная.

28.75. Докажите, что функция $f(x) = e^x$ трансцендентная.

28.14. Формула Тейлора

28.76. а) Пусть a — фиксированное число. Докажите, что любой многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ можно записать в виде

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n,$$

где A_0, A_1, ..., A_n — константы.

б) Докажите, что $A_0 = f(a)$, $A_1 = f'(a)$, $A_2 = \frac{f''(a)}{2!}$, ..., $A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

28.77. Пусть a — фиксированное число, $f(x)$ — функция, имеющая производные до порядка $n+1$ включительно для любого x между a и b (для некоторого b). Докажите, что если число x заключено между a и b и

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

то

$$f(x) - T(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

для некоторого θ между a и x (*формула Тейлора*).

Замечание. *Приводимые в задаче 28.78 следствия из формулы Тейлора можно получить и более простыми средствами. По этому поводу см.* *§29.8.*

28.78. а) Докажите, что разность между $\sin x$ и $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ не превосходит $\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

б) Докажите, что разность между $\cos x$ и $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ не превосходит $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

в) Докажите, что разность между e^x и $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не превосходит $e^x\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Решения

28.1. Рассматриваемая прямая задаётся уравнением $y - y_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, поэтому $k(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Теперь непосредственно из определения производной видно, что $\lim_{x_1 \to x_0} k(x_1) = f'(x_0)$.

28.2. Запишем тождество

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

При этом $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ и $\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$. Поэтому $\lim_{x \to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$. Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

28.3. а) Непосредственно следует из свойств предела суммы двух функций.

б) Пусть $h(x) = f(x)g(x)$. Тогда

$$h(x) - h(x_0) = f(x)\big(g(x) - g(x_0)\big) + g(x_0)\big(f(x) - f(x_0)\big).$$

Поделим обе части этого равенства на $x - x_0$ и заметим, что $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$.

в) Пусть $h(x) = f(x)/g(x)$. Тогда

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Устремляя x к x_0, получаем требуемое.

28.4. Тождество

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

показывает, что функция $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]f'(x_0)$.

28.5. Достаточно заметить, что $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}$.

28.6. Ясно, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}.$$

При $x \to x_0$ каждое из n слагаемых стремится к x_0^{n-1}.

28.7. Легко проверить, что

$$\frac{x^a - x_0^a}{x - x_0} = x_0^a \frac{\left(\frac{x^a}{x_0^a}\right) - 1}{x - x_0} = x_0^{a-1}\frac{(1 + y)^a - 1}{y},$$

где $y = \dfrac{x-x_0}{x_0}$. Ясно, что $y \to 0$ при $x \to x_0$. Кроме того, $\lim_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^a - 1}{y} = a$ (задача 27.24).

28.8. Ясно, что

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2},$$
$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}.$$

Остаётся заметить, что $\dfrac{1}{x-x_0}\sin\dfrac{x-x_0}{2} \to \dfrac{1}{2}$ при $x \to x_0$ (задача 26.6) и функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны (задача 26.9).

28.9. Согласно задаче 28.3 в)

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1.$$

Для $(\operatorname{ctg} x)'$ вычисления аналогичны.

28.10. Ясно, что $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$. Остаётся заметить, что $\lim_{x\to x_0} \dfrac{a^{x-x_0} - 1}{x-x_0} = \ln a$ согласно задаче 27.25.

28.11. Поскольку $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, достаточно проверить, что $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Равенство $\ln x - \ln x_0 = \ln\dfrac{x}{x_0} = \ln\left(1 + \dfrac{x-x_0}{x_0}\right)$ показывает, что $\dfrac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \dfrac{1}{x_0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}$, где $y = \dfrac{x-x_0}{x_0}$. Остаётся заметить, что $\lim_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ (задача 27.23).

28.12. Если $x = \sin y$, то $\arcsin x = y$. Поэтому $\arcsin$ — функция, обратная к $\sin$. Значит, согласно задаче 28.5,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

28.13. Ясно, что если $y = u^v$, то $\ln y = v\ln u$. Дифференцируя это равенство, получаем $\dfrac{y'}{y} = v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}$. Поэтому $y' = y\left(v'\ln u + \dfrac{vu'}{u}\right)$.

28.14. Согласно задаче 28.13 $f'(x) = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right)$.

28.15. Согласно задаче 28.13 $f'(x) = \cos^x a \cdot \ln\cos a - \sin^x a \cdot \ln\sin a = \cos^x a(\ln\cos a - \operatorname{tg}^x a \cdot \ln\sin a)$.

28.16. Предположим, что $f(x) = (x-x_0)^m g(x)$, где $m \geqslant 2$. Тогда многочлен $f'(x) = m(x-x_0)^{m-1}g(x) + (x-x_0)^m g'(x)$ имеет корень x_0.

Предположим, что $f(x) = (x-x_0)g(x)$, причём $g(x_0) \neq 0$. Тогда $f'(x) = g(x) + (x-x_0)g'(x)$, поэтому $f'(x_0) = g(x_0) \neq 0$. Таким образом, если

все корни многочлена $f(x)$ имеют кратность 1, то они не являются корнями многочлена $f'(x)$.

28.17. Пусть $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. По условию $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Следовательно, x_0 — двукратный корень многочлена $f(x)$, т.е. многочлен $f(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.

28.18. Предположим, что у многочлена $f_n(x)$ есть кратный корень. Тогда многочлены $f_n(x)$ и $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$ имеют общий корень x_0. Следовательно, $f_n(x_0) - f_{n-1}(x_0) = 0$. Но $f_n(x) - f_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n!}$, поэтому $x_0 = 0$. Приходим к противоречию, поскольку $f_n(0) \neq 0$.

28.19. Требуемое утверждение достаточно доказать для монома x^m. Ясно, что если $n \leqslant m$, то

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n} = \\ = n!\frac{m!}{n!(m-n)!}x^{m-n} = n!\binom{m}{n}x^{m-n}.$$

Число $n!\binom{m}{n}$, очевидно, целое, поскольку число $\binom{m}{n}$ целое. Если же $n > m$, то $(x^m)^{(n)} = 0$.

28.20. Пусть $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Тогда по теореме Виета сумма корней многочлена f равна $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, поэтому их среднее арифметическое равно $-\frac{a_{n-1}}{na_n}$. Сумма корней производной $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$ равна $-\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}$, поэтому их среднее арифметическое равно $-\frac{(n-1)a_{n-1}}{(n-1)na_n} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$.

28.21. Производная рассматриваемого выражения равна $fg^{(n+1)} + f'g^{(n)} - f'g^{(n)} - f''g^{(n-2)} + f''g^{(n-2)} + \ldots + (-1)^nf^{(n)}g' + (-1)^nf^{(n+1)}g$. Все промежуточные члены взаимно сокращаются, и остаются только $fg^{(n+1)} \pm f^{(n+1)}g$. Но f и g — многочлены степени n; поэтому их $(n+1)$-е производные равны нулю.

28.22. Положим $f(x) = x^3 + px + q$. Тогда $f'(x) = 3x^2 + p$. Если $p \geqslant 0$, то функция f монотонна, и её график пересекает ось x ровно в одной точке. В этом случае уравнение имеет ровно один вещественный корень. Отметим, что в этом случае $D \geqslant 0$.

Пусть теперь $p < 0$. Тогда функция f возрастает на участке от $-\infty$ до $-\sqrt{-p/3}$, затем убывает на участке от $-\sqrt{-p/3}$ до $\sqrt{-p/3}$, а после этого возрастает на участке от $\sqrt{-p/3}$ до ∞. Ясно, что $f(x)f(-x) = q^2 - x^2(x^2+p)^2$. При $x = \sqrt{-p/3}$ выражение в правой части превращается в $4D$. Поэтому если $D < 0$, то график функции f пересекает ось x на участке от $-\sqrt{-p/3}$ до $\sqrt{-p/3}$, на котором функция убывает. В этом случае уравнение имеет три

вещественных корня. Если $D > 0$, то уравнение имеет один вещественный корень. Если же $D = 0$, то уравнение имеет два вещественных корня.

28.23. Многочлен $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{g(x_i)f(x)}{f'(x_i)(x-x_i)}$ принимает в точках $x_1, \ldots, x_n$ значения $g(x_1), \ldots, g(x_n)$. Поэтому если $g(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, то $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{g(x_i)f(x)}{f'(x_i)(x-x_i)}$, т.е. $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{g(x_i)}{f'(x_i)(x-x_i)}$.

Положим $g(x) = x^{k+1}$, где $0 \leqslant k \leqslant n-2$. В результате получим $\dfrac{x^{k+1}}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^{k+1}}{f'(x_i)(x-x_i)}$. По условию $f(0) \neq 0$, поэтому, положив $x = 0$, получим требуемое равенство при $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

Положим теперь $g(x) = x^n - f(x)$. В результате получим $\dfrac{x^n - f(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^n}{f'(x_i)(x-x_i)}$, поскольку $f(x_i) = 0$. Положив $x = 0$, получим требуемое равенство для $k = n-1$.

28.24. Если $x = x_i$, то неравенство очевидно. Поэтому будем считать, что x — не корень многочлена P. Тогда

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}.$$

Продифференцировав обе части этого равенства, получаем

$$\frac{P''(x)P(x) - \bigl(P'(x)\bigr)^2}{\bigl(P(x)\bigr)^2} = -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \ldots - \frac{1}{(x-x_n)^2} < 0.$$

28.25. После замены x на $x + c$ можно считать, что рассматриваемый многочлен 4-й степени имеет корни $\pm a/2$, $\pm 3a/2$. Производная многочлена $\left(x^2 - \dfrac{a^2}{4}\right)\left(x^2 - \dfrac{9a^2}{4}\right)$ равна $4x^3 - 5ax^2$. Значит, корни производной равны $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$ и 0.

28.26. Пусть f — данный многочлен. Рассмотрим многочлены F и G, которые обладают следующими свойствами: $F' = \dfrac{(f')^2 + f' + 1}{2}$, $G' = \dfrac{(f')^2 - f' + 1}{2}$, $F(0) = f(0)$ и $G(0) = 0$. Тогда $f = F - G$, причём $F' > 0$ и $G' > 0$ (т.е. F и G монотонно возрастают), поскольку $(f')^2 \pm f' + 1 = \left(f' \pm \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geqslant \dfrac{3}{4}$.

28.27. Применим индукцию по n. При $n = 1$ получаем многочлен $a_0 + a_1x^k$, который имеет не более одного положительного корня. Предположим, что многочлен $P(x)$ имеет более n положительных корней. Между любыми

двумя положительными корнями многочлена есть по крайней мере один положительный корень его производной. Поэтому многочлен $P'(x) = b_1x^{k_1-1} + b_2x^{k_2-1} + \ldots + b_nx^{k_n-1}$ имеет более $n-1$ положительных корней. Можно считать, что $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Тогда многочлен $P'(x)$ можно сократить на x^{k_1-1} (при этом мы потеряем только корень $x = 0$). В результате получим, что многочлен $b_1 + b_2x^{k_2-k_1} + \ldots + b_nx^{k_n-k_1}$ более $n-1$ положительных корней. Это противоречит предположению индукции.

28.28. Положим $Q(y) = y^nP(y^{-1})$. Корни многочлена $Q(y)$ тоже вещественны и попарно различны, поэтому корни квадратного трёхчлена

$$Q^{(n-2)}(y) = (n-2)(n-3)\ldots 4\cdot 3\left[n(n-1)a_ny^2 + 2(n-1)a_{n-1}y + 2a_{n-2}\right]$$

вещественны и различны. Следовательно,

$$(n-1)^2a_{n-1}^2 > 2n(n-1)a_na_{n-2}.$$

При $i = n-1$ требуемое неравенство доказано.

Рассмотрим теперь многочлен

$$P^{(n-i-1)}(x) = b_0x^{i+1} + b_1x^i + \ldots + b_{i+1}x^2 + b_ix + b_{i-1}.$$

Применив к нему уже доказанное неравенство, получим

$$b_i^2 > \frac{2(i+1)}{i}b_{i-1}b_{i+1}.$$

А так как

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= (n-i+1)\ldots 4\cdot 3a_{i+1}, \\ b_i &= (n-i)\ldots 3\cdot 2a_i, \\ b_{i-1} &= (n-i-1)\ldots 2\cdot 1a_{i-1}, \end{aligned}$$

то

$$(2(n-i)a_i)^2 > \frac{2(i+1)}{i}2(n-i+1)(n-i)a_{i-1}a_{i+1}.$$

После сокращения получаем требуемое неравенство.

28.29. При $x = 0$ получаем $A_0 = a^n$. Продифференцировав исходное равенство, получим

$$n(x+a)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + \ldots + nA_nx^{n-1}.$$

При $x = 0$ получаем $A_1 = na^{n-1}$. Продифференцировав новое равенство, получим

$$n(n-1)(x+a)^{n-2} = 2\cdot 1A_2 + 3\cdot 2A_3x + \ldots + n(n-1)A_nx^{n-2}.$$

После m-кратного дифференцирования ($m \leqslant n$) получим

$$n(n-1)\ldots(n-m+1)(x+a)^{n-m} = m(m-1)\ldots 1A_m + \\ + (m+1)m\ldots 2A_{m+1}x + \ldots + n(n-1)\ldots(n-m+1)A_nx^{n-m}.$$

Значит, $n(n-1)\ldots(n-m+1)a^{n-m} = m(m-1)\ldots 1A_m$.

28.30. О т в е т: $\left(\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

Замечание. *Другое вычисление требуемой суммы приведено в решении задачи 9.6.*

28.31. Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) задаётся уравнением $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Поэтому для x_1 получаем уравнение $-y_0 = e^{x_0}(x_1 - x_0)$. Учитывая, что $y_0 = e^{x_0}$, получаем $x_0 - x_1 = 1$.

28.32. Числа k_1 и k_{ij} не изменяются при параллельном переносе осей координат, поэтому можно считать, что мы имеем дело с параболой $y = ax^2$. Пусть $A_i = (x_i, y_i)$. Тогда $k_1 = 2ax_1$ и

$$k_{ij} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} = a\frac{x_i^2 - x_j^2}{x_i - x_j} = a(x_i + x_j).$$

Теперь требуемое равенство легко проверяется.

28.33. Если прямая задаётся уравнением $\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$, то перпендикулярная ей прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), задаётся уравнением $\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{k}$, поскольку $\operatorname{tg}(\varphi + 90^\circ) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi)}$. Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) задаётся уравнением $\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$, поэтому нормаль в точке (x_0, y_0) задаётся уравнением $\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

28.34. Нормаль к параболе $y = x^2$ в точке (x_0, y_0) задаётся уравнением $\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{2x_0}$. Чтобы найти y_1, полагаем $x = 0$. В результате получаем $\frac{y_1 - y_0}{-x_0} = -\frac{1}{2x_0}$, т.е. $y_1 - y_0 = \frac{1}{2}$.

28.35. Пусть для определённости $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех x из отрезка $[a, b]$. Рассмотрим односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В обоих пределах числитель неотрицателен. При этом в первом пределе знаменатель положителен, а во втором отрицателен. Значит, первый предел неотрицателен, а второй неположителен. Но оба предела равны $f'(x_0)$.

28.36. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому по теореме Вейерштрасса (задача 26.17) среди её значений есть наибольшее M и наименьшее m. Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна, поэтому в качестве x_0 можно взять любую внутреннюю точку отрезка. Если же $M > m$, то одно из этих двух значений достигается не в конце отрезка, потому что по условию $f(a) = f(b)$. Значит, в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения, поэтому по теореме Ферма (задача 28.35) $f'(x_0) = 0$.

28.37. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)$. Эта функция дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $F(a) = F(b) = f(a)$. Поэтому к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля (задача 28.36). В результате получим, что существует внутренняя точка x_0 отрезка $[a,b]$, для которой $F'(x_0) = 0$, т.е. $f'(x_0) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 0$.

28.38. Пусть $a < x \leqslant b$. Применим теорему Лагранжа (задача 28.37) к функции f на отрезке $[a,x]$. В результате получим, что $f(x) - f(a) = f'(x_0)(x-a)$ для некоторой точки x_0 отрезка $[a,x]$. По условию $f'(x_0) = 0$, поэтому $f(x) = f(a)$.

28.39. а) Непосредственно из определения производной видно, что $f'(x) \geqslant 0$ для неубывающей функции $f(x)$.

Предположим теперь, что $f'(x) \geqslant 0$ для любой точки x интервала (a,b). Возьмём на отрезке $[a,b]$ две точки x и y так, что $x < y$. Применим теорему Лагранжа (задача 28.37) к отрезку $[x,y]$. В результате получим, что $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$ для некоторой точки z интервала (x,y). По условию $f'(z) \geqslant 0$, поэтому $f(y) \geqslant f(x)$.

б) Согласно задаче а) функция $f(x)$ неубывающая. Выберем на отрезке $[a,b]$ две точки x и y так, что $x < y$. Тогда для любой точки z отрезка $[x,y]$ имеют место неравенства $f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y)$. Поэтому если $f(x) = f(y)$, то функция f постоянна на отрезке $[x,y]$. Но тогда f' обращается в нуль на этом отрезке, что противоречит условию.

28.40. Согласно задаче 28.39 функция $f(x) - g(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a,b]$.

28.41. Пусть $f(x) = \cos x$ и $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Тогда $f(0) = g(0)$ и $f'(x) = -\sin x > -x = g'(x)$ при $x > 0$, поскольку $\sin x < x$ (задача 11.1). Поэтому $f(x) > g(x)$ при $x > 0$ согласно задаче 28.40.

Пусть теперь $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Тогда $f'(x) = \cos x$ и $g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Неравенство $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ только что было доказано.

28.42. Достаточно доказать, что $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 1 + x^2$, т.е. $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x > x^2$. Неравенство $\operatorname{tg} x > x$ доказано в решении задачи 11.1.

28.43. а) Пусть $f(x) = x^\alpha - \alpha x$. Тогда $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$. Поэтому $f'(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $f'(x) < 0$ при $x < 1$. Следовательно, $f(x)$ возрастает при $0 < x < 1$ и убывает при $x < 1$. Таким образом, для неотрицательных x наибольшее значение $f(x)$ равно $f(1) = 1 - \alpha$.

б) Непосредственно следует из а). Действительно, положим $\alpha = \frac{1}{p}$ и $x = \frac{a^p}{b^q}$. В результате получим $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$. Остаётся умножить обе

части неравенства на $b^{1+\frac{q}{p}} = b^q$.

28.44. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big).$$

Ясно, что

$$F'(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(x) - f'(x)\big(g(b) - g(a)\big)$$

и $F(a) = F(b) = 0$. Поэтому к функции $F(x)$ можно применить теорему Ролля (задача 28.36). В результате получим, что существует внутренняя точка x_0, для которой

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(x_0) - f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big) = 0. \tag{1}$$

По условию $g'(x_0) \neq 0$. Легко также видеть, что $g(b) - g(a) \neq 0$, поскольку иначе по теореме Ролля нашлась бы внутренняя точка x_1, для которой $g'(x_1) = 0$. Поэтому равенство (1) можно поделить на $g'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big)$ и получить требуемое.

28.45. Пусть $0 < x < \pi/2$. Тогда

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2 \cos x} < 0.$$

Поэтому если $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, то $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} > \dfrac{\sin\beta}{\beta}$.

28.46. Пусть $0 < x < \pi/2$. Тогда

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)' = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} > 0,$$

поскольку $\sin x < x$ и $\cos x < 1$.

28.47. Рассмотрим функцию $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} x - 3x$. Ясно, что

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(1-\cos x)(1 + \cos x - 2\cos^2 x)}{\cos^2 x}.$$

Если $0 < \alpha < \pi/2$, то $1 - \cos x > 0$ и $1 + \cos x - 2\cos^2 x = 1 - \cos^2 x + \cos x(1 - \cos x) > 0$. Поэтому если $0 < \alpha < \pi/2$, то $f(\alpha) > f(0) = 0$.

28.48. а) Пусть $f(x) = e^x - x$. Тогда $f'(x) = e^x - 1$. Поэтому $f'(x) > 0$ при $x > 0$ и $f'(x) < 0$ при $x < 0$. Значит, $f(x) > f(0) = 1$ для любого $x \neq 0$.

б) Из неравенства $e^x > 1 + x$ следует, что $x > \ln(1+x)$ при $1 + x > 0$, $x \neq 0$. Поэтому $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$ и $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) < -\dfrac{1}{n+1}$, т.е. $\ln\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{1}{n}$ и $\ln\dfrac{n}{n+1} < -\dfrac{1}{n+1}$.

28.49. а) Пусть $f(x) = x - \ln x$. Тогда $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Поэтому $f'(x) < 0$ при $x < 1$ и $f'(x) > 0$ при $x > 1$. Следовательно, если $x > 0$, $x \neq 1$, то $f(x) > f(1) = 0$. Это и есть требуемое неравенство.

б) В неравенстве $\ln t < t - 1$ положим $t = \frac{1}{x}$. В результате получим $-\ln x < \frac{1}{x} - 1$, т.е. $\ln x > \frac{x-1}{x}$.

28.50. а) Положим $y = x^{1/n}$. Тогда после сокращения на n требуемые неравенства запишутся в виде $\ln y < y - 1 < y \ln y$. Такие неравенства доказаны в решении задачи 28.49.

б) Непосредственно следует из а), поскольку $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$ (задача 25.20).

28.51. а) Согласно задаче 28.49

$$\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} < \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n},$$

поэтому $\frac{x}{1+\frac{x}{n}} < n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < x$.

б) Ясно, что $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Согласно задаче а) $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

28.52. Требуемое неравенство эквивалентно неравенству $x > e\ln x$, т.е. $\ln x/x < 1/e$. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x/x$. Легко проверить, что $f'(x) = (1-\ln x)/x^2$. Производная функции f обращается в нуль лишь в точке $x = e$. Кроме того, $\lim_{x\to+0}(\ln x/x) = -\infty$ и $\lim_{x\to+\infty}(\ln x/x) = 0$. Поэтому $f(x) \leqslant f(e) = \ln e/e = 1/e$, причём равенство достигается лишь при $x = e$.

28.53. Рассмотрим функцию $f(x) = b\cdot x^a + a\cdot x^b \geqslant a+b$, где $x \geqslant 1$. Ясно, что $f'(x) = ab(x^{a-1} - x^{-b-1}) > 0$ при $x > 1$, поскольку $x^{a-1}\cdot x^{-b-1} = x^{a+b} > 1$. Значит, функция f возрастающая и $f(2) \geqslant f(1)$, т.е. $b\cdot 2^a + a\cdot 2^b \geqslant a+b$.

28.54. Положим $a = bx$, где $x > 1$. Требуемое неравенство перепишется в виде

$$\sqrt{x} < \frac{x-1}{\ln x} < \frac{x+1}{2}, \text{ т.е. } 2\frac{x-1}{x+1} < \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

Если $x > 1$, то $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1}\left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right) > x^{-1} = (\ln x)'$ и $\left(2\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{4}{(x+1)^2} < \frac{1}{x}$. Остаётся заметить, что если $f(1) = g(1)$ и $f'(x) > g'(x)$ при $x > 1$, то $f(x) > g(x)$ при $x > 1$.

28.55. Применим индукцию по n. При $n = 1$ неравенство очевидно. При $n = 2$ получаем $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x(1+\cos x)$. Ясно, что $\sin x > 0$ и $1 + \cos x > 0$ при $0 < x < \pi$.

Предположим, что $f_{n-1}(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)x > 0$ при $0 < x < \pi$. Покажем, что тогда $f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{1}{n}\sin nx > 0$ при $0 < x < \pi$.

Пусть x_0 — точка отрезка $[0, \pi]$, в которой функция $f_n(x)$ принимает минимальное значение Предположим, что $f_n(x_0) \leqslant 0$, причём $x_0 \neq 0$ и π. Тогда $f_n'(x_0) = 0$. Но

$$f_n'(x_0) = \cos x_0 + \cos 2x_0 + \ldots + \cos nx_0 = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0 - \sin\frac{x_0}{2}}{\sin\frac{x_0}{2}}.$$

Поэтому $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0 = \sin\frac{x_0}{2}$, а значит, $\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0\right| = \cos\frac{x_0}{2}$. Далее,

$$f_n(x_0) - f_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0\cos\frac{x_0}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0\sin\frac{x_0}{2}\right).$$

Полученное выражение равно 0 или $\frac{2}{n}\sin\frac{x_0}{2}\cos\frac{x_0}{2} = \frac{1}{n}\sin x_0 > 0$. Таким образом, $f_n(x_0) - f_{n-1}(x_0) \geqslant 0$, а значит, $f_{n-1}(x_0) \leqslant f_n(x_0) \leqslant 0$. Получено противоречие.

28.56. Фиксируем число x ($0 < x < \pi/4$) и рассмотрим функцию $f(y) = \cos^y x - \sin^y x$ для $y \geqslant 0$. Ясно, что $f(0) = 0$, $f(y) > 0$ при $y > 0$ и $f(y) \to 0$ при $y \to \infty$. Далее, согласно задаче 28.15

$$f'(y) = \cos x^y(\ln\cos x - \operatorname{tg}^y x \ln\sin x).$$

Функция $g(y) = \operatorname{tg}^y x$ монотонна, поэтому равенство $f'(y) = 0$ выполняется для единственного положительного числа y. Равенство $f(2) = f(2)(\cos^2 x - \sin^2 x) = f(4)$ показывает, что это число заключено между 2 и 4, поэтому $f'(2) > 0$ и $f'(4) < 0$.

Неравенство $f'(2) > 0$ записывается следующим образом: $\cos^2 x\ln\cos x > \sin^2 x\ln\sin x$, т.е. $\ln\left((\cos x)^{\cos^2 x}\right) > \ln\left((\sin x)^{\sin^2 x}\right)$. Так мы получаем первое требуемое неравенство. Второе неравенство получается из неравенства $f'(4) < 0$.

Замечание. *Фактически мы доказали, что* $(\cos x)^{\cos^y x} > (\sin x)^{\sin^y x}$ *при* $0 < y \leqslant 2$ *и* $(\cos x)^{\cos^y x} < (\sin x)^{\sin^y x}$ *при* $y \geqslant 4$.

28.57. Рассмотрим функции

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x},$$
$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Легко проверить, что $f(0) = g(0) = 0$ и $g'(0) \leqslant 0 \leqslant f'(0)$, причём при $x \neq 0$ неравенства строгие. Действительно,

$$f(x)' = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \left(\frac{x}{2+x}\right)^2,$$
$$g(x)' = \frac{1}{1+x} - \frac{2+x}{2(1+x)^{3/2}} = -\frac{(1-\sqrt{1+x})^2}{2(1+x)^{3/2}}.$$

Таким образом, $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$. Из этого следует неравенство в правой части. Неравенство в левой части получается аналогично.

28.58. Фиксируем точку x, где $a < x \leqslant b$, и применим теорему Коши к отрезку $[a, x]$. В результате получим, что внутри этого отрезка есть точка x_1, для которой

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Если $x \to a$, то $x_1 \to a$. Из этого следует требуемое.

28.59. Применив правило Лопиталя дважды, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

28.60. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x\to a} (a^x - x^a)' = \lim_{x\to a} (\ln a \cdot a^x - ax^{a-1}) = \ln a \cdot a^a - a^a = a^a(\ln a - 1).$$

28.61. Ответ: 2. Преобразуем отношение производных:

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos x^2}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x}.$$

Последнее выражение стремится к 2 при $x \to 0$.

28.62. Ответ: если $a > 2$ или $a < -2$, то одно; если $a = \pm 2$, то два; если $-2 < a < 2$, то три.

Пусть $f(x) = x^3 - 3x$. Тогда $f'(x) = 3x^2 - 3$. Поэтому $f'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \pm 1$. Если $x < -1$, то $f'(x) > 0$; если $-1 < x < 1$, то $f'(x) < 0$; если $x > 1$, то $f'(x) > 0$. Таким образом, при $x < -1$ функция $f(x)$ возрастает, при $-1 < x < 1$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > 1$ функция $f(x)$ возрастает. Остаётся заметить, что $f(-1) = 2$ и $f(1) = -2$.

28.63. Ответ: если $a < \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, то одно; если $a = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, то два; если $a > \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, то три.

Ясно, что $x = 0$ не является решением данного уравнения, поэтому можно перейти к эквивалентному уравнению $x^2 + \frac{1}{x} = a$. Пусть $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. Тогда $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$. Поэтому $f'(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Таким образом, при $x < 0$ функция $f(x)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$; при $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ функция $f(x)$ убывает от $+\infty$ до $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$; при $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ функция $f(x)$ возрастает от $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ до $+\infty$.

28.64. Ответ: при $a < 0$ одно; при $0 \leqslant a < e$ решений нет; при $a = e$ одно; при $a > 2$ два.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - ax$. Ясно, что $f'(x) = e^x - a$. Поэтому если $a < 0$, то $f'(x) < 0$ для всех x. В этом случае функция $f(x)$ убывает от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому $f(x) = 0$ ровно для одного значения x. При $a = 0$ получаем уравнение $e^x = 0$, которое не имеет решений. Пусть теперь $a > 0$. Тогда уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственное решение $x_0 = \ln a$. При этом $f(x_0) = a(1-\ln a)$; значит, $f(x_0) > 0$ при $a < e$, $f(x_0) = 0$ при $a = e$ и $f(x_0) < 0$ при $a > e$. Функция $f(x)$ сначала монотонно убывает от $+\infty$ до $f(x_0)$, потом возрастает от $f(x_0)$ до $+\infty$.

28.65. Ответ: при $a > e^{1/e}$ решений нет; при $0 < a \leqslant 1$ или $a = e^{1/e}$ решение одно; при $1 < a \leqslant e^{1/e}$ два решения.

Рассмотрим функцию $f(x) = a^x - x$. Ясно, что $f'(x) = a^x \ln a - 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $f(x)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. При $a = 1$ решение единственно: $x = 1$. Если $a > 1$, то уравнение $f'(x_0) = 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\log_a(\ln a)$. При этом

$$f(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\ln a} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right).$$

Функция $f(x)$ сначала монотонно убывает от $+\infty$ до $f(x_0)$, потом монотонно возрастает от $f(x_0)$ до $+\infty$.

Ясно, что $f(x_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $a^{1/\ln a} = a^{\log_a(1/\ln a)}$, т.е. $a^{1/\ln a} = 1/\ln a$. Логарифмируя, получаем $\dfrac{1}{\ln a}\ln a = \ln\left(\dfrac{1}{\ln a}\right)$, т.е. $\ln\left(\dfrac{1}{\ln a}\right) = 1$. Таким образом, $1/\ln a = e$, т.е. $a = e^{1/e}$.

28.66. Ответ: при $0 < a < e^{-e}$ три решения; при $1 < a < e^{1/e}$ два решения; при $a = e^{1/e}$ или $e^{-e} \leqslant a < 1$ одно решение; при $a > e^{1/e}$ решений нет.

Рассмотрим сначала случай $a > 1$. В этом случае

$$a^x > x \Rightarrow x > \log_a x \Rightarrow a^x > \log_a x,$$
$$a^x < x \Rightarrow x < \log_a x \Rightarrow a^x < \log_a x,$$
$$a^x = x \Rightarrow x = \log_a x \Rightarrow a^x = \log_a x.$$

Поэтому количество решений уравнения $a^x = \log_a x$ равно количеству решений уравнения $a^x = x$. Это уравнение исследовано в решении задачи 28.65.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < a < 1$. Пусть $f(x) = \log_a x - a^x$. При изменении x от 0 до $+\infty$ функция $f(x)$ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому если $f'(x) < 0$ для всех $x > 0$, то рассматриваемое уравнение имеет единственное решение.

Если $x > 0$, то знак числа

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln a} - a^x \ln a = \frac{1 - (\ln a)^2 x a^x}{x \ln a}$$

совпадает со знаком числа $g(x) = (\ln a)^2 x a^x - 1$, поскольку $\ln a < 0$. Далее,

$$g'(x) = (\ln a)^2 a^x + (\ln a)^3 x a^x = a^x (\ln a)^2 (1 + x \ln a).$$

Значит, $g'(x)$ обращается в нуль в точке $x_0 = -1/\ln a$. При этом $g(x_0) = -\dfrac{\ln a}{e} - 1$. Таким образом, если $-\ln a < e$, т.е. $a > e^{-e}$, то $g(x) < 0$ для всех $x > 0$, поэтому функция $f(x)$ строго монотонна, и рассматриваемое уравнение имеет единственное решение. При $a = e^{-e}$ функция $f(x)$ тоже монотонна.

Остаётся рассмотреть случай, когда $0 < a < e^{-e}$. Решение уравнения $a^x = x$ всегда будет решением рассматриваемого уравнения. При $0 < a \leqslant 1$ это уравнение имеет единственное решение x_1. Докажем, что $g(x_1) > 0$, т.е. $(\ln a)^2 x_1 a^{x_1} > 1$. Поскольку $a^{x_1} = x_1$ и $a = x_1^{1/x_1}$, получаем $\ln a = \dfrac{1}{x_1} \ln x_1$ и $x_1 a^{x_1} = x_1^2$. Таким образом, приходим к неравенству $(\ln x_1)^2 > 1$. Поэтому достаточно доказать, что $x_1 < 1/e$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = x^{1/x}$. Ясно, что $\varphi(x_1) = x_1^{1/x_1} = a$ и $\varphi(1/e) = e^{-e}$. При $0 < x < 1/e$ функция $\varphi(x)$ возрастает, поскольку

$$\varphi'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) > 0.$$

Кроме того, $0 < a < e^{-e}$, т.е. $0 < \varphi(x_1) < \varphi(1/e)$. Значит, $x_1 < 1/e$.

При изменении x от 0 до $x_0 = -1/\ln a$ функция $g(x)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $g(x_0)$; затем она монотонно убывает до $-\infty$. Поэтому неравенство $g(x_1) > 0$ показывает, что $g(x)$ обращается в нуль в двух точках x_2 и x_3, причём $x_2 < x_1 < x_3$. Следовательно, $f(x_2) < 0$ и $f(x_3) > 0$. Учитывая то, что мы знаем о знаке $f'(x)$, получаем, что $f(x)$ обращается в нуль ровно в трёх точках: x_1, $x_2' < x_2$ и $x_3' > x_3$.

28.67. Ответ: три. Легко угадываются корни $x_1 = 1/2$ и $x_2 = 1/4$. Кроме того, есть корень уравнения $x = \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$. А больше трёх корней это уравнение иметь не может согласно задаче 28.66.

Замечание. *Если попытаться решить это уравнение графически, то может показаться, что у него только один корень. Но в действительности их графики пересекаются не в одной точке, а в трёх.*

28.68. Прежде всего заметим, что многочлен $f_n(x)$ не имеет кратных корней (задача 28.18). Предположим, что требуемое утверждение доказано для $n = 0, 1, \ldots, 2k$. (Мы начинаем с $k = 0$: для многочлена $f_0(x) = 1$ утверждение очевидно.) Докажем, что многочлен $f_{2k+1}(x)$ имеет ровно один вещественный корень. Степень этого многочлена нечётна, поэтому один корень у него есть, а если бы у него было два корня, то между ними был бы корень производной $f'_{2k+1}(x) = f_{2k}(x)$, чего не может быть.

Докажем теперь, что многочлен $f_{2k+2}(x)$ не имеет вещественных корней. Между любыми двумя корнями многочлена $f_{2k+2}(x)$ должен быть корень его производной $f'_{2k+2}(x) = f_{2k+1}(x)$, поэтому у многочлена $f_{2k+2}(x)$ не более двух корней. Степень многочлена $f_{2k+2}(x)$ чётна, поэтому у него не может быть ровно один корень. Итак, предположим, что у многочлена $f_{2k+2}(x)$ есть ровно два корня x_1 и x_2. Между ними расположен корень x_0 многочлена $f_{2k+1}(x)$. При этом

$$f_{2k+2}(x_0) = f_{2k+1}(x_0) + \frac{x_0^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{x_0^{2k+2}}{(2k+2)!} \geqslant 0.$$

Но x_0 — точка минимума функции $f_{2k+2}(x)$. Поэтому $f_{2k+2}(x) \geqslant 0$ для всех x. Это противоречит тому, что у $f_{2k+2}(x)$ есть два корня.

28.69. Положим $g(x) = f(x+T)$, где T — постоянное число. Тогда $g'(x) = (x+T)'f'(x+T) = f'(x+T)$. Поэтому если $f(x+T) = f(x)$, то $g'(x) = f'(x)$ и $f'(x) = f'(x+T)$.

28.70. Предположим, что функция $f(x) = \sin x + \sin \alpha x$ периодическая. Тогда согласно задаче 28.69 функция $f'(x) = \cos x + \alpha \cos \alpha x$ тоже периодическая. Но согласно задаче 26.2 эта функция непериодическая.

28.71. Пусть $P(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n) = x^n - \binom{n}{1}\Sigma_1(x_1, \dots, x_n)x^{n-1} + \binom{n}{2}\Sigma_2(x_1, \dots, x_n)x^{n-2} - \dots$. Тогда $\frac{1}{n}P'(x) = x^{n-1} - \frac{n-1}{n}\binom{n}{1}\Sigma_1(x_1, \dots, x_n)x^{n-2} + \frac{n-2}{n}\binom{n}{2}\Sigma_2(x_1, \dots, x_n)x^{n-3} - \dots$. С другой стороны, $\frac{1}{n}P'(x) = x^{n-1} - \binom{n-1}{1}\Sigma_1(y_1, \dots, y_{n-1})x^{n-2} + \binom{n-1}{2}\Sigma_2(y_1, \dots, y_{n-1})x^{n-3} - \dots$. Поэтому $\binom{n-1}{k}\Sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{n-k}{n}\binom{n}{k}\Sigma_k(y_1, \dots, y_{n-1})$. Но $\binom{n-1}{k} = \frac{n-k}{n}\binom{n}{k}$.

28.72. Применим индукцию по n. При $n = 2$ нужно доказать очевидное неравенство $\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}$. Пусть теперь $n \geqslant 3$. Достаточно рассмотреть случай, когда $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. В этом случае у производной многочлена $(x - x_1)\dots(x - x_n)$ есть $n - 1$ положительный корень $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$. Согласно задаче 28.71 $\Sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \Sigma_k(y_1, \dots, y_{n-1})$. Поэтому, применив к набору чисел $y_1, \dots, y_{n-1}$ предположение индукции, мы получим все требуемые неравенства, кроме неравенства $\sqrt[n-1]{\Sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n)} \geqslant \sqrt[n]{\Sigma_n(x_1, \dots, x_n)}$, т.е.

$$\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}\left(\frac{x_1 \dots x_n}{x_1} + \dots + \frac{x_1 \dots x_n}{x_n}\right)} \geqslant \sqrt[n]{\Sigma_n(x_1, \dots, x_n)}.$$

Возведём обе части этого неравенства в степень $n - 1$, а затем поделим результат на $x_1 \dots x_n$. В результате перейдём к неравенству

$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\ldots\frac{1}{x_n}}$, которое является неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

28.73. Применим индукцию по n. При $n = 2$ нужно доказать очевидное неравенство $(x_1+x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2$. Пусть теперь $n \geqslant 3$. Достаточно рассмотреть случай, когда $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. В этом случае у производной многочлена $(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ есть $n-1$ корень $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1}$. Согласно задаче 28.71 $\Sigma_k(x_1,\ldots,x_n) = \Sigma_k(y_1,\ldots,y_{n-1})$. Поэтому, если $k \leqslant n-2$, то можно применить предположение индукции к набору чисел $y_1, \ldots, y_{n-1}$ предположение индукции и получить требуемое неравенство.

Остаётся доказать, что

$$\Sigma_{n-1}^2(x_1,\ldots,x_n) \geqslant \Sigma_{n-2}(x_1,\ldots,x_n)\Sigma_n(x_1,\ldots,x_n).$$

Здесь $\Sigma_n(x_1,\ldots,x_n) = x_1\ldots x_n$. Поэтому можно считать, что $x_1\ldots x_n \neq 0$. Ясно, что

$$\frac{1}{x_1\ldots x_n}\Sigma_{n-k}(x_1,\ldots,x_n) = \Sigma_{n-k}\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right).$$

Поэтому мы переходим к неравенству

$$\Sigma_1^2\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \Sigma_2\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right),$$

которое уже доказано, поскольку $n \geqslant 3$.

28.74. Предположим, что $P_0(x)\sin^n x + P_1(x)\sin^{n-1} x + \ldots + P_n(x) = 0$, причём $P_0(x) \neq 0$ и n — наименьшее натуральное число, для которого имеет место тождество такого вида. Из минимальности n следует, что $P_n(x) \neq 0$. С другой стороны, если $x = k\pi$, где k — целое число, то $\sin x = 0$, поэтому $P_n(k\pi) = 0$ для всех целых k. Но многочлен P_n не может иметь бесконечно много корней. Получено противоречие.

28.75. Первое решение. Предположим, что

$$P_0(x)e^{nx} + P_1(x)e^{(n-1)x} + \ldots + P_n(x) = 0, \qquad (1)$$

причём $P_0(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$, $a_0 \neq 0$. Рассмотрим функцию $G(x) = \frac{1}{x^k e^{nx}}\big(P_0(x)e^{nx} + P_1(x)e^{(n-1)x} + \ldots + P_n(x)\big)$. С одной стороны, $G(x) = 0$ для всех x. С другой стороны, $G(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_x}{x^k} + \frac{1}{e^x}\frac{P_1(x)}{x^k} + \ldots + \frac{1}{e^{nx}}\frac{P_n(x)}{x^k}$, поэтому $\lim_{x\to\infty} G(x) = a_0 \neq 0$, поскольку $\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^x} = 0$. Получено противоречие.

Второе решение. Предположим, что выполняется тождество (1), причём из всех тождеств такого вида выбрано то, для которого n минимально. Из минимальности n следует, что многочлен $P_n(x)$ отличен от нуля. Поделив обе части тождества (1) на $P_n(x)$, получим

$$R_0(x)e^{nx} + R_1(x)e^{(n-1)x} + \ldots + R_{n-1}(x)e^x + 1 = 0,$$

где $R_0(x), \ldots, R_{n-1}(x)$ — рациональные функции, причём $R_0(x) \neq 0$. Продифференцировав это тождество и поделив обе части на e^x, получим тождество

$$(R_0' + nR_0)e^{(n-1)x} + (R_1' + (n-1)R_1)e^{(n-2)x} + \ldots + (R_{n-1}' + R_{n-1}) = 0. \quad (2)$$

Из этого тождества легко получить тождество для многочленов: достаточно умножить обе части на общий знаменатель рациональных функций. Поэтому из минимальности n следует, что $R_0' + nR_0 = 0, \ldots, R_{n-1}' + R_{n-1} = 0$. Пусть $R_0 = P/Q$, где P и Q — взаимно простые многочлены (мы знаем, что $P \neq 0$). Из равенства $R_0' + nR_0 = 0$ следует, что $P'Q - PQ' + nPQ = 0$. Многочлены $P'Q$ и PQ делятся на Q, поэтому PQ' делится на Q, а значит, Q' делится на Q. Это возможно лишь в том случае, когда Q — константа. Аналогично доказывается, что P — константа. Поэтому $R_0' = 0$, а значит, $R_0 = -R_0'/n = 0$. Получено противоречие.

28.76. а) Достаточно заметить, что

$$x^k = \big(a + (x-a)\big)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i (x-a)^{k-i}.$$

б) Чтобы найти A_0, положим $x = a$. В результате получим $f(a) = A_0$. Продифференцировав выражение для $f(x)$, получим

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + \ldots + nA_n(x-a)^{n-1}.$$

Положив $x = a$, получаем $f'(a) = A_1$. Теперь дифференцируем выражение для $f'(x)$:

$$f''(x) = 1 \cdot 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x-a) + \ldots + (n-1)nA_n(x-a)^{n-2}.$$

Снова подставляя $x = a$, получаем $f''(a) = 1 \cdot 2A_2$. Продолжая эти рассуждения дальше, будем получать $A_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ для $k \leqslant n$.

28.77. Ясно, что $T(a) = f(a)$. Далее,

$$T'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$
$$T''(x) = f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-2},$$
$$\ldots\ldots$$
$$T^{(n)}(x) = f^{(n)}(a),$$
$$T^{(n+1)}(x) = 0.$$

Поэтому $T'(a) = f'(a)$, $T''(a) = f''(a)$, $\ldots$, $T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ и $T^{(n+1)}(x) = 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - T(x)$. Для неё $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \ldots = \varphi^{(n)}(a) = 0$ и $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$. Рассмотрим

ещё вспомогательную функцию $\psi(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Для неё $\psi(a) = \psi'(a) = \psi''(a) = \ldots = \psi^{(n)}(a) = 0$ и $\psi^{(n+1)}(x) = 1$. Более того, ни сама функция ψ, ни её производные до $(n+1)$-й включительно не обращаются в нуль в точках, отличных от a.

Фиксируем точку $x \neq a$. Из равенств $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ следует, что $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}$. Поэтому по теореме Коши (задача 28.44) существует точка x_1 между a и x, для которой $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$. Из равенств $\varphi'(a) = \psi'(a) = 0$ следует, что $\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(a)}{\psi'(x)-\psi'(a)}$. Поэтому по теореме Коши существует точка x_2 между a и x_1 (а значит, между a и x), для которой $\dfrac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \dfrac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)}$. Продолжая эти рассуждения, получаем

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)} = \ldots = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})},$$

где точка x_{n+1} лежит между a и x.

Напомним, что $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ и $\psi^{(n+1)}(x) = 1$. Пусть $\theta = x_{n+1}$. Тогда $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = f^{(n+1)}(\theta)$, т.е. $f(x) - T(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

28.78. Эти утверждения непосредственно следуют из формулы Тейлора для $a = 0$ и соответствующих функций $f(x)$.

Глава 29.

Интеграл

29.1. Неопределённый интеграл

Функцию $F(x)$, для которой $F'(x) = f(x)$, называют *первообразной* или *неопределённым интегралом* функции $f(x)$. Для функции, определённой на отрезке (или на всей вещественной прямой), её первообразная определена с точностью до прибавления некоторой константы C. Действительно, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $f(x)$, а $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, то по условию $\varphi'(x) = 0$. Поэтому согласно задаче 28.38 функция $\varphi(x)$ постоянна.

Первообразную функции $f(x)$ обозначают $\int f(x)\,dx$.

29.1. Докажите, что $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a} + C$.

29.2. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, $\varphi(y)$ — дифференцируемая функция на отрезке $[p, q]$, причём $a \leqslant \varphi(y) \leqslant b$ для всех y из отрезка $[p, q]$. Докажите, что тогда $F(\varphi(y))$ — первообразная функции $f(\varphi(y))\varphi'(y)$.

Результат задачи 29.2 можно сформулировать следующим образом: если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy = F(\varphi(y)) + C$. Удобно ввести обозначение $\varphi'(y)\,dy = d\varphi(y)$.

29.3. Вычислите $\int \dfrac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$; $\int \dfrac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}}$; $\int \dfrac{\cos x\,dx}{1 + \sin^2 x}$.

29.4. Вычислите $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

29.5. Докажите, что $\int f(x)\,dx$ можно вычислить следующим образом. Пусть $x = \varphi(y)$ — дифференцируемая функция, имеющая обратную функцию $y = \psi(x)$. Вычислим $\int f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy = F(y)$ и положим $y = \psi(x)$. Тогда $F(\psi(x))$ — искомый интеграл.

29.6. Вычислите $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

29.7. Вычислите $\int \sqrt{1+x^2}dx$.

29.8. Вычислите $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

29.9. Докажите, что

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

(*формула интегрирования по частям*).

29.10. Вычислите с помощью интегрирования по частям: а) $\int x^3 \ln x\,dx$; б) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; в) $\int x\cos x\,dx$; г) $\int xe^x dx$.

29.11. Вычислите $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

29.12. Вычислите а) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$; б) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

29.13. Докажите, что

$$\int fg^{(n+1)}dx = fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \ldots + \\ + (-1)^n f^{(n)}g + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}g\,dx.$$

29.14. Пусть $P(x)$ — многочлен. Вычислите: а) $\int P(x)e^{ax}dx$; б) $\int P(x)\sin ax\,dx$; в) $\int P(x)\cos ax\,dx$.

29.2. Определённый интеграл

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Разобьём этот отрезок на части точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$. На каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и рассмотрим так называемую *интегральную сумму* $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$. Оказывается, что если функция $f(x)$ непрерывна и если наибольшая длина отрезка разбиения стремится к нулю, то интегральные суммы имеют конечный предел, который не зависит от выбора разбиения и от выбора точек ξ_k.

Этот предел называют *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$.

Функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, если для неё существует указанный предел интегральных сумм. Интегрируемыми могут быть не только непрерывные функции, но нас в основном будут интересовать непрерывные функции.

Чтобы доказать интегрируемость непрерывных функций, введём следующие вспомогательные понятия. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$ и задано некоторое разбиение этого отрезка. Для каждого отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ рассмотрим M_k и m_k — наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на этот отрезке. Суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

назовём *верхней* и *нижней интегральными суммами*; они уже зависят только от разбиения и не зависят от выбора точек ξ_k. Ясно, что каждая интегральная сумму заключена между верхней и нижней интегральными суммами для того же самого разбиения.

29.15. Докажите, что при добавлении новых точек разбиения нижняя интегральная сумма не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

29.16. Докажите, что любая нижняя интегральная сумма не больше любой верхней интегральной суммы.

29.17. Пусть I — точная верхняя грань нижних интегральных сумм, σ — произвольная интегральная сумма, s и S — нижняя и верхняя интегральные суммы, соответствующие тому же разбиению, что и σ. Докажите, что

$$|\sigma - I| \leqslant S - s.$$

29.18. Докажите, что любая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегрируема.

29.19. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Докажите, что на отрезке $[a, b]$ существует точка ξ, для которой $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

29.20. Докажите, что если непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. Более того, если $f(x_0) > 0$ для некоторой точки x_0 отрезка $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Часто бывает удобно рассматривать определённые интегралы $\int_b^a f(x)\,dx$ для $a < b$. А именно, мы полагаем $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. При таких соглашениях остаются верными формулы замены переменных и соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

29.21. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Докажите, что $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

29.22. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ (*формула Ньютона–Лейбница*).

Для $F(b) - F(a)$ мы будем использовать обозначение $F(x)|_a^b$.

29.3. Вычисление интегралов

29.23. Пусть $U_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$.

а) Докажите, что если n нечётно, то $U_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}$, а если n чётно, то $U_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}$, где $n!!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих с n одинаковую чётность.

б) Докажите, что $\pi = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$ (*формула Валлиса*).

29.24. Докажите, что $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

29.25. Пусть $f_1(x) = \int_a^x f(t)\,dx$, $f_2(x) = \int_a^x f_1(t)\,dx$, $\dots$, $f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)\,dx$. Докажите, что

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_a^x f(t)(t-x)^{n-1}dt.$$

29.4. Вычисление площадей

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неотрицательна. Член $f(\xi_k)(x_{k-1} - x_k)$ интегральной суммы заключён между $m(x_{k-1} - x_k)$ и $M(x_{k-1} - x_k)$, где m и M — наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Таким образом, этот член заключён между площадью прямоугольника, содержащегося в фигуре под графиком функции $y = f(x)$, и площадью прямоугольника, содержащего часть этой фигуры, расположенную над отрезком $[x_k, x_{k+1}]$. Поэтому определённый интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ — это *площадь* фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

29.26. Вычислите площадь круга радиуса 1 с помощью определённого интеграла.

29.27. Вычислите площадь под графиком функции $y = \sin x$ на отрезке от 0 до π.

29.5. Вычисление объёмов

Пусть тело расположено в пространстве с прямоугольными координатами $Oxyz$, причём проекция этого тела на ось Ox — это отрезок $[a, b]$. Предположим, что плоскость, проходящая через точку x отрезка $[a, b]$ перпендикулярно оси Ox, высекает на этом теле фигуру площади $S(x)$. Тогда *объём* этого тела определяется как $\int_a^b S(x)\,dx$.

29.28. Вычислите с помощью определённого интеграла объём V конуса с радиусом R высотой h.

29.29. Вычислите с помощью определённого интеграла объём V шара радиуса R.

29.30. Найдите объём фигуры, образованной при пересечении двух прямых круговых цилиндров радиуса R, оси которых перпендикулярны и пересекаются.

29.31. Найдите объём фигуры, отсекаемой от цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр его основания. Известны радиус цилиндра R и высота полученной фигуры h.

29.6. Длина кривой

Рассмотрим кривую $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Пусть $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ — точки на этом отрезке. Рассмотрим ломаную с вершинами $A_k = \big(x_k, f(x_k)\big)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Если длина этой ломаной стремится к конечному пределу l, когда длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю, то это число l называют *длиной* кривой.

29.32. Докажите, что если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную, то кривая $y = f(x)$ имеет длину $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$.

29.33. Вычислите с помощью определённого интеграла длину окружности радиуса R.

29.34. Вычислите длину дуги параболы $2y = x^2$ от точки $(0, 0)$ до точки $\left(x_0, \dfrac{x_0^2}{p}\right)$.

29.35. Вычислите длину дуги кривой $y = \operatorname{ch} x$, заключённой между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

29.36. Пусть график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ параметризован параметром t, т.е. задана монотонно возрастающая функция $x(t)$, причём $a = x(t_0)$ и $b = x(t_1)$, и мы полагаем $y(t) = f(x(t))$. Докажите, что длина этого графика равна $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$, где $x' = \dfrac{dx}{dt}$ и $y' = \dfrac{dy}{dt}$.

29.37. Вычислите длину *астроиды*, заданной уравнением $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

29.38. Вычислите длину ветви *циклоиды*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \text{где} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

29.7. Площадь поверхности

Пусть $f(x)$ — непрерывная положительная функция на отрезке $[a, b]$, $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ — некоторые точки на отрезке $[a, b]$. Будем вращать кривую $y = f(x)$ вокруг оси Ox. Ломаная с вершинами $A_k = (x_k, f(x_k))$ заметает при этом некоторую поверхность, состоящую из усечённых конусов. Если сумма площадей боковых поверхностей этих конусов имеет предел, когда длина наибольшего из отрезков

A_kA_{k+1} стремится к нулю, то этот предел называют *площадью поверхности вращения*, заметаемой кривой $y = f(x)$.

29.39. Докажите, что если положительная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную, то площадь поверхности вращения, заметаемой кривой $y = f(x)$, равна

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

29.40. Докажите, что площадь поверхности шара радиуса R, заключённой между двумя параллельными плоскостями (пересекающими шар), равна $2\pi Rh$, где h — расстояние между этими плоскостями.

29.8. Неравенства

29.41. Пусть $t > 0$.

а) Докажите, что $t - \frac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t$ и $1 - \frac{t^2}{4} \leqslant \cos t \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$.

б) Докажите, что

$$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots - \frac{t^{4n+3}}{(4n+3)!} \leqslant \sin t \leqslant t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + \frac{t^{4n+1}}{(4n+1)!},$$

$$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots - \frac{t^{4n+2}}{(4n+2)!} \leqslant \cos t \leqslant 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + \frac{t^{4n}}{(4n)!}.$$

29.42. Докажите, что если $0 < t \leqslant \pi/2$, то $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 > \cos t$.

29.43. Докажите, что если $0 < t \leqslant \pi/2$, то $\frac{1}{\sin^2 t} \leqslant \frac{1}{t^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}$.

29.44. Докажите, что $3\sin t < 2t + t\cos t$ для любого $t > 0$.

29.45. Пусть $t > -1$. Докажите, что

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots - \frac{t^{2n}}{2n} < \ln(1+t) < t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots + \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

29.46. Докажите, что для любого $t \neq 0$

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots - \frac{t^{4n-1}}{4n-1} < \operatorname{arctg} t < t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots + \frac{t^{4n+1}}{4n+1}.$$

29.47. а) Докажите, что если $0 \leqslant t \leqslant a$, то

$$1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} \leqslant e^t \leqslant 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + e^a \frac{t^n}{n!}.$$

б) Докажите, что если $0 \geqslant t \geqslant a$, то при нечётном n имеют место такие же неравенства, а при чётном n знаки неравенств заменяются на обратные.

* * *

29.48. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, длина которого равна π. Докажите, что на отрезке $[a, b]$ есть точка x, для которой $f'(x) - \bigl(f(x)\bigr)^2 < 1$.

29.9. Вычисление пределов

29.49. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{n}{n^2 + k^2}$.

29.50. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$.

29.51. Вычислите $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

29.52. Вычислите $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

См. также задачу 25.42.

29.10. Тождества

29.53. Докажите следующее тождество для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{1}\frac{1}{1} - \binom{n}{2}\frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

29.54. а) Вычислите $\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n dx$, где n — натуральное число, с помощью формулы из задачи 29.13.

б) Докажите, что

$$\frac{1}{2n+1} - \binom{n}{1}\frac{1}{2n-1} + \binom{n}{2}\frac{1}{2n-3} - \binom{n}{3}\frac{1}{2n-5} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

См. также задачу 14.14.

29.11. Примеры и конструкции

29.55. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 3$ существует многочлен $f(x)$ степени n с вещественными коэффициентами и корнями $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, для которого

$$\int_{a_1}^{a_2} |f(x)|\,dx = \int_{a_2}^{a_3} |f(x)|\,dx = \ldots = \int_{a_n}^{a_{n-1}} |f(x)|\,dx.$$

29.12. Несобственные интегралы

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называют *несобственным* в двух случаях:

(1) если функция $f(x)$ определена лишь на интервале (a, b), но не на всём отрезке $[a, b]$;

(2) если $a = -\infty$ и/или $b = \infty$.

Несобственный интеграл понимается как предел интеграла $\int_u^v f(x)\,dx$, когда $u \to a+$ (соответственно, $u \to -\infty$) и $v \to b-$ (соответственно, $v \to +\infty$). Имеется в виду, что u и v стремятся к указанным пределам независимо друг от друга.

29.56. Вычислите несобственный интеграл $\int_0^1 x^a dx$, где $-1 < a < 0$.

29.57. Докажите, что $\int_0^\infty x^k e^{-x} = k!$ для любого целого неотрицательного k.

Решения

29.1. Ясно, что $\left(\ln\dfrac{x-a}{x+a}\right)' = \bigl(\ln(x-a) - \ln(x+a)\bigr)' = \dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a} = $ $= \dfrac{2a}{x^2-a^2}$.

29.2. Формула для производной композиции функций (задача 28.4) показывает, что $\bigl(F(\varphi(y))\bigr)' = F'(\varphi(y))\varphi'(y)$. Остаётся заметить, что $F'(\varphi(y)) = $ $= f(\varphi(y))$.

29.3. Согласно задаче 29.2

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int \frac{d\ln x}{1+\ln^2 x} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}\ln x + C;$$

$$\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{de^x}{1+e^{2x}} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg} e^x + C;$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}\sin x + C.$$

29.4. Согласно задаче 29.2

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln\cos x + C.$$

29.5. Согласно задаче 29.2 $\int f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy = \int f(\varphi(y))\,d\varphi(y) = \int f(x)\,dx$.

29.6. Положим $x = \sin y$. Тогда, согласно задаче 29.5

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 y\,dy = \int \frac{1+\cos 2y}{2}dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2y\,d(2y) =$$

$$= \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

29.7. Положим $x = \operatorname{sh} y$. Тогда, согласно задаче 29.5

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int \operatorname{ch}^2 y\,dy = \int \frac{1+\operatorname{ch} 2y}{2}dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\int \operatorname{ch} 2y\,d(2y) =$$

$$= \frac{y}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2y}{4} + C = \frac{\operatorname{Arsh} x}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + C.$$

29.8. Положим $x = y^2$. Тогда, согласно задаче 29.5

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2y\,dy}{1+y} = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)dy =$$

$$= 2y - 2\ln(1+y) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

29.9. Требуется доказать, что

$$f(x)g'(x)\,dx = \big(f(x)g(x)\big)' - f'(x)g(x).$$

Это немедленно следует из формулы для производной произведения двух функций.

29.10. а) $\int x^3 \ln x\,dx = \int \ln x d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}d(\ln x) = = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$

б) $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$
в) $\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$
г) $\int xe^x dx = \int x\,d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

29.11. Применим формулу интегрирования по частям для $f(x) = g(x) = \ln x$. В результате получим

$$\int \ln x \frac{1}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\ln x\,dx.$$

Первообразная определена с точностью до константы, поэтому это равенство нужно понимать так: $I = (\ln x)^2 - (I + C)$, где $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$. Таким образом, $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$ (константа C здесь другая).

29.12. а) Интегрируя по частям, получаем

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx = \\ = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Для $I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$ мы получили соотношение

$$I = \frac{e^{ax}}{b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) - \frac{a^2}{b^2}(I + C).$$

Следовательно,

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

б) Аналогично получаем

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C.$$

29.13. Воспользуемся формулой из задачи 29.9, заменив в ней g на $g^{(n)}$:

$$\int fg^{(n+1)}dx = fg^{(n)} - \int f'g^{(n)}dx.$$

Аналогично получаем

$$\int f'g^{(n)}dx = f'g^{(n-1)} - \int f''g^{(n-1)}dx,$$

$$\int f''g^{(n-1)}dx = f''g^{(n-2)} - \int f'''g^{(n-2)}dx,$$

$$\ldots\ldots$$

$$\int f^{(n)}g'dx = f^{(n)}g - \int f^{(n+1)}g\,dx.$$

Из этих формул легко следует требуемое.

29.14. а) Воспользуемся формулой из задачи 29.13. Если $g^{(n+1)} = e^{ax}$, то $g^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}$, $g^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}$, ... Поэтому

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \ldots\right) + C.$$

б) Если $g^{(n+1)} = \sin ax$, то $g^{(n)} = -\frac{\cos ax}{a}$, $g^{(n-1)} = -\frac{\sin ax}{a^2}$, $g^{(n-2)} = \frac{\cos ax}{a^3}$, ... Поэтому

$$\int P(x)\sin ax\,dx = \sin ax\left(\frac{P'}{a^2} - \frac{P'''}{a^4} + \ldots\right) - \cos ax\left(\frac{P}{a} - \frac{P''}{a^3} - \ldots\right) + C.$$

в) Аналогично решению задачи б) получаем

$$\int P(x)\cos ax\,dx = \sin ax\left(\frac{P}{a} - \frac{P''}{a^3} - \ldots\right) + \cos ax\left(\frac{P'}{a^2} - \frac{P'''}{a^4} + \ldots\right) + C.$$

29.15. Достаточно рассмотреть случай, когда добавляется одна точка деления. Пусть на отрезке $[c, d]$ взята точка y и наибольшие значения функции $f(x)$ на отрезках $[c, d]$, $[c, y]$ и $[y, d]$ равны M, M_1 и M_2. Требуется доказать, что

$$M_1(y - c) + M_2(d - y) \leqslant M(d - c).$$

Ясно, что $M_1 \leqslant M$ и $M_2 \leqslant M$. Поэтому

$$M_1(y - c) + M_2(d - y) \leqslant M(y - c) + M(d - y) = M(d - c).$$

Для нижних интегральных сумм доказательство аналогично.

29.16. Пусть s_1 — нижняя интегральная сумма для одного разбиения, S_2 — верхняя интегральная сумма для другого разбиения. Разобьём отрезок всеми точками, входящими в эти разбиения. Пусть s и S — нижняя и верхняя интегральная суммы для полученного разбиения. Согласно задаче 29.15 $s_1 \leqslant s$ и $S \leqslant S_2$. Остаётся заметить, что $s \leqslant S$.

29.17. Прежде всего заметим, что точная верхняя грань нижних интегральных сумм существует, поскольку согласно задаче 29.16 любая нижняя интегральная сумма s не превосходит некоторой фиксированной интегральной суммы S_0. Из неравенства $s \leqslant S_0$ следует, что $I \leqslant S_0$. Это неравенство выполняется для произвольной верхней интегральной суммы S_0. Таким образом, $s \leqslant I \leqslant S_0$. Ясно также, что $s \leqslant \sigma \leqslant S_0$. Из этих двух неравенств следует требуемое неравенство.

29.18. Согласно задаче 29.17 достаточно доказать, что если наибольшая длина отрезка разбиения стремится к нулю, то разность $S - s$ стремится к нулю.

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$ (задача 26.24), поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, что если расстояние между

точками x' и x'' отрезка $[a, b]$ меньше δ, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Поэтому если наибольшая длина отрезка разбиения меньше δ, то $M_k - m_k < \varepsilon$, а значит,

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \varepsilon(b - a).$$

Таким образом, если наименьшая длина отрезка разбиения стремится к нулю, то разность $S - s$ стремится к нулю.

29.19. Пусть M и m — наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда каждая интегральная сумма заключена между $m(b-a)$ и $M(b - a)$. Поэтому $\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a)$, где число c заключено между m и M. Непрерывная функция на отрезке принимает все значения между m и M, поэтому $c = f(\xi)$ для некоторой точки ξ отрезка $[a, b]$.

29.20. Если $f(x) \geqslant 0$ для всех точек отрезка $[a, b]$, то все интегральные суммы неотрицательны, поэтому их предел тоже неотрицателен.

Предположим теперь, что $f(x_0) = c > 0$. Можно считать, что x_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Выберем $\delta > 0$ так, что $f(x) > c/2$ при $|x - x_0| < \delta$. Можно считать, что $a_0 + \delta \leqslant x_0 \leqslant b - \delta$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

Два крайних интеграла неотрицательны, а средний интеграл больше $2\delta \cdot \dfrac{c}{2} = c\delta > 0$.

29.21. Пусть точки x и $x + \Delta x$ лежат на отрезке $[a, b]$. Тогда $F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$. Согласно задаче 29.19 этот интеграл равен $f(\xi)\Delta x$, где ξ — некоторая точка между x и $x + \Delta x$. Следовательно, $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$, поскольку $\xi \to x$ при $\Delta x \to 0$.

29.22. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Ясно, что $\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Кроме того, согласно задаче 29.21 $\Phi'(x) = f(x)$. Поэтому $\Phi(x)$ тоже первообразная, а значит, $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая константа. Заметим, что $\Phi(a) = 0$. Поэтому $F(a) = -C$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

29.23. а) Ясно, что $U_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и $U_1 = \sin x|_0^{\pi/2} = 1$. Пусть теперь $n > 1$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$U_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, d\sin x = \sin x \cos^{n-1} x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, d\cos^{n-1} x.$$

Первый член равен нулю, поэтому

$$U_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\, dx,$$

т.е. $U_n = (n-1)(U_{n-2} - U_n)$. Таким образом, $U_n = \dfrac{n-1}{n}U_{n-2}$. Значит, $U_{n-2} = \dfrac{n-3}{n-2}U_{n-4}$ и т.д. Последовательно применяя эту формулу, получаем требуемое.

б) Если $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то

$$\cos^{2n+2} x \leqslant \cos^{2n+1} x \leqslant \cos^{2n} x,$$

поэтому $U_{2n+2} < U_{2n+1} < U_{2n}$. Используя формулы из задачи а), получаем

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1$ и $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$, получаем требуемое.

29.24. П е р в о е р е ш е н и е. Напомним, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

(задача 23.8 б). Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{2n}\ln\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-(n-1)\ln 2 + \frac{1}{2}\ln n}{n} \to -\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

поскольку $\dfrac{1}{n}\ln n \to 0$ (задача 25.17 б). Но указанная сумма — это интегральная сумма для разбиения отрезка $[0, \pi/2]$ на n равных отрезков.

В т о р о е р е ш е н и е. Заметим, что

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx,$$

поскольку $\ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \ln(\sin x\cos x) = \ln\left(\dfrac{\sin 2x}{2}\right)$. Далее,

$$\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

а

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2x)dx = \int_0^{\pi}\ln(\sin y)\frac{dy}{2} = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin y)dy.$$

Таким образом, для $a = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$ получаем соотношение $a = \frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\ln 2$, откуда $a = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

29.25. Согласно задаче 29.13

$$f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)\cdot 1\,dx =$$
$$= \left(f_{n-1}(t)(t-x) - f_{n-2}(t)\frac{(t-x)^2}{2!} + f_{n-3}(t)\frac{(t-x)^3}{3!} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{n-2}f_1(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\Bigg|_a^x - (-1)^{n-2}\int_a^x f(t)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}dt;$$

мы здесь воспользовались тем, что $\left(\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)^{(n-1)} = 1$. Все члены, кроме последнего, обращаются в нуль при $t = a$, поскольку $f_k(a) = 0$, и при $t = x$. Поэтому остаётся только последний член, и мы получаем требуемое.

29.26. Площадь круга в 2 раза больше площади полукруга, ограниченного графиком $y = \sqrt{1-x^2}$ и прямой $y = 0$. Далее, площадь полукруга равна

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x}{2}\bigg|_{-1}^1 + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\bigg|_{-1}^1$$

(см. задачу 29.6). Второе слагаемое обращается в нуль, а первое слагаемое равно $\frac{\pi}{2}$.

29.27. Искомая площадь равна $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x|_0^\pi = 2$.

29.28. О т в е т: $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Выберем в качестве оси Ox ось конуса и поместим начало координат в вершину конуса. Тогда $V = \int_0^h \pi\left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

29.29. О т в е т: $\frac{4}{3}\pi R^3$. Плоскость, удалённая от центра шара на расстояние x, высекает на шаре круг радиуса $\sqrt{R^2-x^2}$. Площадь этого круга равна $\pi(R^2-x^2)$, поэтому

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2-x^2)dx = 2\pi R^3 - \pi\frac{x^3}{3}\bigg|_{-R}^R = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

29.30. О т в е т: $\frac{16}{3}R^3$. Введём систему координат, направив оси Ox и Oy по осям цилиндров. Пересечение цилиндров задаётся неравенствами $x^2 + z^2 \leqslant R$ и $y^2 + z^2 \leqslant R$. Его сечение плоскостью $z = z_0$ задаётся неравенствами $x_0 \leqslant R^2 - z_0^2$ и $y_0 \leqslant R^2 - z_0^2$. Таким образом, сечение — квадрат со стороной

$2\sqrt{R^2 - z_0^2}$. Его площадь равна $4(R^2 - z_0^2)$. Поэтому объём рассматриваемой фигуры равен

$$\int_{-R}^{R} 4(R^2 - z_0^2)dz = 8R^3 - 4\frac{z^3}{3}\bigg|_{-R}^{R} = 8R^3 - \frac{8}{3}R^3 = \frac{16}{3}R^3.$$

29.31. Ответ: $\frac{2}{3}hR^2$. Рассматриваемая фигура задаётся неравенствами $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ и $0 \leqslant z \leqslant \frac{h}{R}x$. Сечение этой фигуры плоскостью $y = y_0$ представляет собой прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{R^2 - y_0^2}$ и $\frac{h}{R}\sqrt{R^2 - y_0^2}$. Его площадь равна $\frac{1}{2}\frac{h}{R}(R^2 - y_0^2)$. Поэтому объём рассматриваемой фигуры равен

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\frac{h}{R}(R^2 - y_0^2)dy = \frac{h}{2R}\left(2R^2 - \frac{y^3}{3}\bigg|_{-R}^{R}\right) = \frac{h}{2R}\cdot\frac{4R^3}{3}.$$

29.32. Ясно, что $A_kA_{k+1} = \sqrt{(x_{k_1} - x_k)^2 + \big(f(x_{k_1}) - f(x_k)\big)^2}$. По теореме Лагранжа

$$f(x_{k_1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k_1} - x_k)$$

для некоторой точки ξ_k отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Поэтому длина ломаной равна

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(x_{k_1} - x_k),$$

т.е. она равна интегральной сумме для непрерывной функции $\sqrt{1 + f'^2(x)}$. Остаётся заметить, что длина отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ не превосходит A_kA_{k+1}, поэтому длина наибольшего отрезка разбиения стремится к нулю, когда стремится к нулю наибольшая длина звена ломаной.

29.33. Длина окружности равна удвоенной длине полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Ясно, что $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, поэтому длина полуокружности равна

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon}\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} = \pi.$$

29.34. Длина рассматриваемой дуги параболы равна

$$\int_0^{x_0}\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^{x_0}\sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{x_0\sqrt{1 + x_0^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(x_0 + \sqrt{1 + x_0^2})$$

(см. задачу 29.7).

29.35. Ясно, что $y' = \operatorname{sh} x$ и $\sqrt{1 + (y')^2} = \operatorname{ch} x$. Поэтому длина рассматриваемой дуги равна $\int_{x_1}^{x_2}\operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x_2 - \operatorname{sh} x_1$ (предполагается, что $x_1 < x_2$).

29.36. По формуле замены переменных

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\frac{y'^2}{x'^2}}\,x'dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt;$$

при записи последнего равенства мы воспользовались тем, что $x' > 0$.

29.37. Ответ: $6a$. Астроиду можно задать параметрически: $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$. Достаточно вычислить длину четверти астроиды, для которой x и y неотрицательны. Ясно, что $x' = 3a\cos t\sin^2 t$ и $y' = -3a\sin t\cos^2 t$. Поэтому $\sqrt{x'^2+y'^2} = 3a\sin t\cos t$, а значит, длина четверти астроиды равна

$$3a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\,dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}.$$

Длина всей астроиды равна $6a$.

29.38. Ответ: $8a$. Ясно, что

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Поэтому длина ветви циклоиды равна

$$2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

29.39. Мы предполагаем известным из стереометрии, что площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению образующей на длину среднего сечения. Площадь боковой поверхности конуса, образованного вращением звена A_kA_{k+1}, равна

$$\pi\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big)\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)^2}.$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_{k+1})-f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

для некоторой точки ξ_k отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Поэтому сумма площадей боковых поверхностей конусов равна

$$\pi\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big)\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}(x_{k+1}-x_k).$$

Нужно сравнить эту сумму с интегральной суммой

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}(x_{k+1}-x_k).$$

Это сравнение несложно получить, основываясь на равномерной непрерывности функции $f(x)$ и ограниченности функции $\sqrt{1+(f'(x))^2}$.

29.40. Мы рассматриваем поверхность шара как фигуру, образованную при вращении кривой $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Ясно, что $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ и $\sqrt{1 + y'^2} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Поэтому рассматриваемая площадь равна

$$2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_a^{a+h} dx = 2\pi Rh.$$

29.41. Из очевидного неравенства $\cos x \leqslant 1$ следует, что $\int_0^t \cos x\,dx \leqslant \int_0^t 1\,dx$, т.е. $\sin t \leqslant t$. Из полученного неравенства следует, что $\int_0^t \sin x\,dx \leqslant \int_0^t x\,dx = \dfrac{t^2}{2}$, т.е. $1 - \cos t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$. Затем из неравенства $1 - \dfrac{t^2}{4} \leqslant \cos t$ аналогично получаем $t - \dfrac{t^3}{6} \leqslant \sin t$ и т.д.

29.42. Воспользуемся неравенствами $t - \dfrac{t^3}{6} \leqslant \sin t$ и $\cos t \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24}$ (задача 29.41). Из первого неравенства следует, что

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \geqslant \left(1 - \frac{t^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} - \frac{t^6}{216}.$$

Поэтому достаточно доказать, что $1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{12} - \dfrac{t^6}{216} > 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24}$. Это неравенство эквивалентно неравенству $\dfrac{t^4}{24} - \dfrac{t^6}{216} > 0$, т.е. $x^2 < 9$. При $0 < t \leqslant \pi/2$ это неравенство выполняется.

29.43. Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{1}{\sin^2 t} - \dfrac{1}{t^2}$. Ясно, что $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$. Кроме того,

$$f'(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{2\cos t}{\sin^3 t} = \frac{2}{\sin^3 t}\left(\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 - \cos t\right).$$

Поэтому согласно задаче 29.42 $f'(t) > 0$, т.е. на рассматриваемом интервале функция $f(t)$ монотонно возрастает. Значит, $f(t) \leqslant f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\dfrac{1}{\sin^2 t} - \dfrac{1}{t^2} \leqslant 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$.

29.44. Согласно задаче 29.41

$$3\sin t \leqslant 3t - \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{40},$$
$$2t + t\cos t \geqslant 3t - \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{24} - \frac{t^7}{720}.$$

Поэтому если $\dfrac{t^5}{24} - \dfrac{t^7}{720} > \dfrac{t^5}{40}$, т.е. $t^2 < 12$, то требуемое неравенство выполняется. С другой стороны, требуемое неравенство очевидным образом выполняется, если $2t > 3$, т.е. $t > 3/2$.

29.45. Если $x > -1$, то

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1} < \frac{1}{1+x} < 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n}.$$

Действительно,

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1})(1+x) = 1 - x^{2n} < 1,$$
$$(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n})(1+x) = 1 + x^{2n+1} > 1.$$

Кроме того, $1 + x > 0$ при $x > -1$. Требуемые неравенства следуют из того, что $\int_0^t \frac{dx}{1+x} = \ln(1+t)$ и $\int_0^t x^k dx = \frac{t^k}{k}$.

29.46. Мы воспользуемся тем, что $\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} t$. Для $\frac{1}{1+x^2}$ имеем неравенства

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - t^{4n-2} < \frac{1}{1+x^2} < 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + t^{4n}.$$

Интегрируя эти неравенства, получаем требуемое.

29.47. а) Так как $e > 1$, то $1 \leqslant e^x \leqslant e^a$ при $0 \leqslant x \leqslant t$. Поэтому $\int_0^t 1\,dx \leqslant \int_0^t e^x dx \leqslant \int_0^t e^a dx$, т.е. $t \leqslant e^t - 1 \leqslant e^a t$. Из неравенства $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + e^a x$ аналогично получаем $1 + t + \frac{t^2}{2} \leqslant e^t \leqslant 1 + t + e^a \frac{t^2}{2}$ и т.д.

б) Доказательство аналогично. При $0 \geqslant x \geqslant t$ получаем $1 \geqslant e^x \geqslant e^a$. Поэтому $\int_t^0 1\,dx \geqslant \int_t^0 e^x dx \geqslant \int_t^0 e^a dx$, т.е. $-t \geqslant 1 - e^t \geqslant -e^a t$. Последнее неравенство переписывается в виде $t \leqslant e^t - 1 \leqslant e^a t$. Из неравенства $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + e^a x$ аналогично получаем $1 + t + \frac{t^2}{2} \geqslant e^t \geqslant 1 + t + e^a \frac{t^2}{2}$ и т.д.

29.48. Предположим, что если $a \leqslant x \leqslant b$, то $f'(x) - \bigl(f(x)\bigr)^2 \geqslant 1$, т.е. $\frac{f'(x)}{1 + \bigl(f(x)\bigr)^2} \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $F(x) = \operatorname{arctg}\bigl(f(x)\bigr)$. Тогда $F'(x) = \frac{f'(x)}{1 + \bigl(f(x)\bigr)^2} \geqslant 1$, поскольку $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$. Значит, $\int_a^b F'(x)\,dx \geqslant b - a = \pi$, т.е. $F(b) - F(a) \geqslant \pi$. Но арктангенс принимает лишь значения, заключённые между $-\pi/2$ и $\pi/2$, поэтому $F(b) - F(a) < \pi$. Получено противоречие.

29.49. Рассматриваемую сумму можно записать в виде $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + (k/n)^2}$. При $n \to \infty$ эта сумма стремится к $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

29.50. Рассматриваемую сумму можно записать в виде $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. При $n \to \infty$ эта сумма стремится к $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

29.51. Ответ: $\ln 2$. Заметим, что рассматриваемая сумма равна

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{1 + 1/n} + \frac{1}{1 + 2/n} + \ldots + \frac{1}{1 + n/n}\right) \to \int_1^2 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Замечание. *Другое доказательство можно найти в решении задачи 30.8 а).*

29.52. Ответ: $\pi/2$. Рассматриваемую сумму можно записать в виде $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}}$. Эта сумма стремится к $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

29.53. Запишем тождество $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$ для $q=1-t$. В результате получим тождество $\sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k=\frac{1-(1-t)^n}{t}$. Требуемое тождество получается интегрированием этого тождества от 0 до 1. Действительно, $\int_0^1(1-t)^k dt=\int_0^1 x^k dx=\frac{1}{k+1}$ и

$$\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}dt=\int_0^1\left(\binom{n}{1}-\binom{n}{2}t+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}t^{n-1}\right)dt=$$
$$=\binom{n}{1}\frac{1}{1}-\binom{n}{2}\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n}.$$

29.54. а) Запишем подынтегральную функцию в виде $P(x)(x+1)^n$, где $P(x)=(x-1)^n$. Воспользовавшись формулой из задачи 29.13, получим

$$\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx=\left((x-1)^n\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}-n(x-1)^{n-1}\frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\ (-1)^n n!\frac{(x+1)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}\right)\Bigg|_{-1}^1.$$

При $x=-1$ все члены обращаются в нуль, а при $x=1$ обращаются в нуль все члены, кроме последнего. Поэтому

$$\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx=(-1)^n n!\frac{2^{2n+1}}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}=\frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

б) Заметим, что $(x^2-1)^n=x^{2n}-\binom{n}{1}x^{2n-2}+\binom{n}{2}x^{2n-4}-\ldots$ и проинтегрируем это выражение почленно. Остаётся приравнять полученное выражение выражению из задачи а).

29.55. У многочлена $f(x)$ нет кратных корней, поэтому эквивалентное условие таково: $\int_{a_1}^{a_2}f(x)\,dx=-\int_{a_2}^{a_3}f(x)\,dx=\ldots=\int_{a_3}^{a_4}f(x)\,dx=\ldots$ Пусть $f(x)=F'(x)$ для некоторого многочлена F. Тогда получим следующее условие: $F(a_2)-F(a_1)=F(a_2)-F(a_3)=F(a_4)-F(a_3)=F(a_4)-F(a_5)=\ldots$, т.е. $F(a_1)=F(a_3)=F(a_5)=\ldots$ и $F(a_2)=F(a_4)=F(a_6)=\ldots$

Покажем, что если $F(x)=T_{n+1}(x)$ — многочлен Чебышёва, то F обладает требуемым свойством. Из равенства $T_{n+1}(\cos\varphi)=\cos(n+1)\varphi$ следует, что $-\sin\varphi T'_{n+1}(\cos\varphi)=-(n+1)\sin(n+1)\varphi$. Поэтому если $T'_{n+1}(\cos\varphi)=0$, то

$\sin(n+1)\varphi = 0$, а значит, $T_{n+1}(\cos\varphi) = \cos(n+1)\varphi = \pm 1$. Ясно также, что при прохождении через корень $F(x)$ меняет знак.

29.56. Ясно, что $\int_0^1 x^a dx = \dfrac{1}{a+1} x^{a+1}\Big|_0^1$. Если $a > -1$, то $a+1 > 0$. Поэтому функция x^{a+1} обращается в нуль при $x = 0$. Таким образом, $\int_0^1 x^a dx = \dfrac{1}{a+1}$ при $-1 < a < 0$.

29.57. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} = -x^k e^{-x}\Big|_0^\infty + k\int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx.$$

Функция $x^k e^{-x}$ обращается в нуль как при $x = 0$, так и при $x = \infty$. Поэтому для $J_k = \int_0^\infty x^k e^{-x}$ получаем рекуррентное соотношение $J_k = kJ_{k-1}$. Остаётся заметить, что $\int_0^\infty e^{-x} = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$.

Глава 30.

Ряды

Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность, $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Если последовательность $\{b_n\}$ имеет предел, то говорят, что *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* (в противном случае — *расходится*). Число $\lim_{n\to\infty} b_n$ называют при этом *суммой ряда*.

30.1. Вычисление бесконечных сумм

30.1. Докажите, что $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \ldots = 1$.

30.2. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}$ для каждого натурального k.

30.3. Пусть $|x| < 1$. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

30.4. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin nx$.

30.2. Вычисление бесконечных произведений

30.5. Пусть $a_1 = 1$ и $a_n = n(a_{n-1} + 1)$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right) = e$.

30.3. Гармонический ряд

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называют *гармоническим*. Этот ряд расходящийся (задача 30.6). Мы будем использовать обозначение

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

30.6. Докажите, что для любого натурального n

$$\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln n.$$

30.7. Докажите, что ряд $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ расходится.

30.8. а) Пусть $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Вычислите предел $\lim_{n\to\infty} a_n$.

б) Пусть $b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} b_n = \ln 2$.

30.9. а) Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \ldots = \ln 2.$$

б) Докажите, что

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots = 1 - \ln 2.$$

30.10. Докажите, что

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{1}{2}\ln 2.$$

30.11. Пусть $a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\ln 2$.

30.12. Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 10\cdot 11} + \ldots = \frac{1}{4}\ln 2.$$

30.13. Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \ldots = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

30.14. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = H_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(x-1)^k}{k}.$$

30.15. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$ — последовательные простые числа.
а) Докажите, что

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-1} \ldots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)^{-1} > \sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n}.$$

б) Докажите, что $1 + \sum_{n=1}^{p_m} \dfrac{1}{p_n} > \ln \ln p_m$.

30.16. Докажите, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Предел $\gamma = 0,5772157\ldots$ из задачи 30.16 называют *постоянной Эйлера*.

30.17. Докажите, что $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + \frac{1}{n}} = e^{\gamma}$, где γ — постоянная Эйлера.

30.4. Ряд для логарифма

30.18. Докажите, что если $-1 < x < 1$, то

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

30.19. Докажите, что если $-1 < x < 1$, то

$$\ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right).$$

30.20. а) Докажите, что для любого натурального n

$$\ln(n + 1) = \ln n + 2 \left(\frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{3(2n + 1)^3} + \frac{1}{5(2n + 1)^5} + \ldots\right).$$

б) Докажите, что

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \ldots\right).$$

30.21. а) Докажите, что

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

б) Докажите, что последовательность $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ имеет (конечный) предел a.

в) Докажите, что $n! = an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$ для некоторого θ между 0 и 1.

30.22. Докажите, что число a из задачи 30.21 равно $\sqrt{2\pi}$, т.е.

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/12n}$$

(*формула Стирлинга*).

30.5. Ряды для числа π

30.23. Пусть $a_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots + (-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$.
а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi/4$.
б) Докажите, что $\dfrac{1}{2(4k+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{4} - a_{2k-1} \leqslant \dfrac{1}{4k+1}$.

30.24. Докажите, что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

30.25. а) Докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 < \frac{\pi^2}{6}(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2).$$

б) Докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4 < \pi^2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2)$$

(*неравенство Карлсона*).

30.6. Экспонента в комплексной области

Для любого комплексного числа z можно определить e^z как сумму ряда $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$.

30.26. Докажите, что этот ряд сходится для любого z.

30.27. Докажите, что $e^z e^w = e^{z+w}$ для любых комплексных z и w.

30.28. Докажите, что если x — вещественное число, то $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (*Эйлер*).

30.29. Докажите, что $e^{\pi i} = -1$ и $e^{2\pi i} = 1$.

Замечание. *В вещественной области функция $f(x) = e^x$ при разных x принимает разные значения. В комплексной области это свойство уже не выполняется. Например, $f(0) = 1 = f(2\pi i)$.*

30.7. Доказательства неравенств

30.30. Докажите, что при $0 < x < \pi/4$ выполняется неравенство $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$.

30.8. Сходящиеся и расходящиеся ряды

30.31. а) Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, в десятичной записи которых не встречается цифра 1. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ сходится.

б) Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, в десятичной записи которых не встречается подряд сто единиц. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ сходится.

30.32. а) Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, причём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ расходится. Докажите, что число $0,a_1a_2a_3\ldots$ иррационально.

б) Докажите, что число $0,12357111317\ldots$ (подряд записываются последовательные простые числа) иррационально.

30.9. Сходимость бесконечных произведений

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — действительные числа, отличные от -1. Бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ называют *сходящимся*, если существует (конечный) предел $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, причём этот предел отличен от нуля.

30.33. Докажите, что если $a_k \geqslant 0$, то бесконечное произведение $\prod(1+a_k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд $\sum a_k$.

30.34. Докажите, что если $0 \leqslant b_k < 1$, то бесконечное произведение $\prod(1-b_k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд $\sum b_k$.

Бесконечное произведение $\prod(1+a_k)$ называют *абсолютно сходящимся*, если бесконечное произведение $\prod(1+|a_k|)$ сходится. Задача 30.33 показывает, что произведение $\prod(1+a_k)$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum|a_k|$.

30.35. Докажите, что абсолютно сходящееся бесконечное произведение сходится.

Решения

30.1. Воспользуйтесь тем, что $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

30.2. Ответ: $\dfrac{1}{k\cdot k!}$. Легко проверить, что

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}\right).$$

30.3. Ответ: $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Согласно задаче 9.6

$$\sum_{n=1}^{m+1} nx^{n-1} = \frac{(m+1)x^{m+2}-(m+2)x^{m+1}+1}{(1-x)^2}.$$

Ясно также, что $\lim_{m\to\infty} x^m = 0$.

30.4. Ответ: 0 при $x = 2k\pi$ и $\dfrac{\pi - x}{2} + \left[\dfrac{x}{2\pi}\right]\pi$ в остальных случаях.

При замене x на $x + 2k\pi$ рассматриваемая сумма и предполагаемый ответ не изменяются. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $0 < x < 2\pi$. Напомним, что

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

(задача 11.28). Поэтому функция

$$f_n(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \frac{\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2}} + \frac{x}{2}$$

дифференцируема на интервале $(0, 2\pi)$ и

$$f_n'(x) = -\frac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{(4n+2)\sin^2\dfrac{x}{2}} \to 0.$$

Применим теорему Лагранжа к функции $f_n(y)$ на отрезке между x и π. В результате получим $f_n(x) - f_n(\pi) = f_n'(\xi)(x - \pi)$. При $n \to \infty$ это равенство принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\sin nx + \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

30.5. Из равенства $a_{n+1} = (n+1)(a_n + 1)$ следует, что $a_n + 1 = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$. Поэтому $P_N = \prod_{n=1}^{N}\left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right) = \prod_{n=1}^{N}\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} = \dfrac{a_{N+1}}{(N+1)!}$. Значит, $P_{N+1} = P_N\dfrac{a_{N+1}+1}{a_{N+1}} = P_N + \dfrac{P_N}{a_{N+1}} = P_N + \dfrac{1}{(N+1)!}$. Поэтому $P_N = (P_N - P_{N-1}) + (P_{N-2} - P_{N-3}) + \ldots + (P_2 - P_1) + P_1 = \dfrac{1}{N!} + \dfrac{1}{(N-1)!} + \ldots + \dfrac{1}{1!} + 1$.

30.6. Согласно задаче 28.48 б) $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \dfrac{1}{k}$ для любого натурального k. Складывая такие неравенства для $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$H_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < H_n.$$

30.7. Неравенство $\dfrac{1}{2n+1} > \dfrac{1}{2n}$ показывает, что если бы сходился ряд $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots$, то сходился бы и ряд $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots\right)$. Но согласно задаче 30.6 этот ряд расходится.

30.8. а) Согласно задаче 28.48 б) $\ln\dfrac{k+1}{k} < \dfrac{1}{k} < \ln\dfrac{k}{k-1}$. Сложим такие неравенства для $k = n, n+1, \ldots, 2n$. В результате получим $\ln\dfrac{2n+1}{n} < a_n < \ln\dfrac{2n}{n-1}$. Значит, $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

Замечание. *Другое доказательство можно найти в решении задачи 29.51.*

б) Согласно задаче 13.4 $b_n = a_n$.

30.9. а) Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Поэтому сумма ряда из задачи 30.8 б) равна сумме рассматриваемого ряда.

б) Непосредственно следует из задачи 30.1 и задачи а).

30.10. Достаточно доказать, что сумма первых $3n$ членов стремится к $\frac{1}{2}\ln 2$. Эта сумма равна

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4n} =$$
$$= H_{2n-1} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_{2n} = \frac{1}{2}(H_{2n-1} - H_{2n}) + \frac{1}{2}(H_{2n-1} - H_n).$$

Согласно задаче 30.8 $H_{2n-1} - H_n \to \ln 2$ при $n \to \infty$. Ясно также, что $H_{2n-1} - H_{2n} \to 0$.

30.11. Легко проверить, что

$$a_n = H_{4n-1} - H_{2n} - \frac{1}{2}(H_{2n-1} - H_n).$$

Согласно задаче 30.8 $H_{4n-1} - H_{2n} \to \ln 2$ и $H_{2n-1} - H_n \to \ln 2$.

30.12. Легко проверить, что члены ряда имеют вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n-1}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому сумма первых n членов ряда равна $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 30.11.

30.13. Заметим, что

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}.$$

Далее, сумма членов $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4}$, $\ldots$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{2n}$ равна

$$-\frac{1}{2} + H_{2n-1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n.$$

Остаётся заметить, что $H_{2n-1} - H_n \to \ln 2$ (задача 30.8).

30.14. Положим $f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k} - \binom{n}{k}\frac{(x-1)^k}{k}\right)$. Ясно, что $f(1) = H_n$. Поэтому достаточно доказать, что $f'(x) = 0$ для всех x. Ясно, что $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^{k-1}$. Пусть $g(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^{k-1}$. Тогда

$(x-1)g(x)+1 = (x-1+1)^n$, поэтому $g(x) = \dfrac{x^n-1}{x-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$, что и требовалось.

30.15. а) Ясно, что $\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{-1} = 1+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^3}+\ldots$. Поэтому рассматриваемое произведения является суммой чисел $\dfrac{1}{n}$, где n делится по крайней мере на одно из чисел 2, 3, ..., p_m (или $n=1$). Все числа $\dfrac{1}{n}$, где $1 \leqslant n \leqslant p_m$, в эту сумму входят.

б) Согласно задаче 28.48 б) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$. Поэтому $\sum_{n=1}^{p_m} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \sum_{n=1}^{p_m}\dfrac{1}{n} < \prod_{k=1}^{m}\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{m}\dfrac{p_k}{p_k-1} = \prod_{k=1}^{m}\left(1+\dfrac{1}{p_k-1}\right)$. Ясно также, что $\sum_{n=1}^{p_m}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{p_m}\bigl(\ln(n+1)-\ln n\bigr) = \ln(p_m+1)$. Поэтому $\ln\ln(p_m+1) < \sum_{k=1}^{m}\ln\left(1+\dfrac{1}{p_k-1}\right) < \sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{p_k-1}$. Далее, $\dfrac{1}{p_k-1} = \dfrac{1}{p_k}+\dfrac{1}{(p_k-1)p_k}$. Поэтому $\sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{p_k-1} < \sum_{k=1}^{m}\dfrac{1}{p_k}+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots$. Остаётся заметить, что $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots = 1$ согласно задаче 30.1.

30.16. Рассмотрим последовательность

$$u_m = \frac{1}{m} - \ln\frac{m+1}{m} = \int_0^1 \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+t}\right)dt.$$

Ясно, что если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то

$$0 \leqslant \frac{1}{m}-\frac{1}{m+t} = \frac{t}{m(m+t)} \leqslant \frac{1}{m^2},$$

поэтому $0 \leqslant u_m \leqslant 1/m^2$. Следовательно, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ сходится. Но

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = 1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}-\ln(n+1) = 1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}-\ln n+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Остаётся заметить, что $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = 0$.

30.17. Произведение первых n членов равно

$$\frac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{n}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}.$$

Остаётся заметить, что $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right) = \gamma$ и e^x — непрерывная функция.

30.18. Согласно задаче 29.45 достаточно доказать, что если $|x| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$. Но это очевидно, поскольку $\frac{|x|^n}{n} < \frac{1}{n}$.

30.19. Вычитая почленно из ряда

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \ln(1+x)$$

ряд

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots = \ln(1-x),$$

получаем требуемое.

30.20. а) Рассмотрим ряд из задачи 30.19 для $x = \frac{1}{2n+1}$. Поскольку $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$, получаем требуемое.

б) Непосредственно следует из а) при $n = 1$, поскольку $\ln 1 = 0$.

30.21. а) Формулу из задачи 30.20 а) можно переписать в виде

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \ldots$$

Остаётся заметить, что сумма этого ряда меньше

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

б) и в) Неравенство из задачи а) можно переписать в виде

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}. \qquad (1)$$

А так как

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

то из неравенств (1) получаем

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Таким образом, $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}$ и $a_n > a_{n+1}$. Поэтому последовательность $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ возрастает, а последовательность $\{a_n\}$ убывает. При этом $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_n$, поэтому обе последовательности имеют предел. Поскольку $e^{-\frac{1}{12n}} \to 0$, эти пределы равны одному и тому же числу a. Ясно, что $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$, т.е. $a = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}$ для некоторого θ между 0 и 1. Таким образом, $a = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\theta}{12n}}$.

30.22. Формулу Валлиса (задача 29.23) можно переписать следующим образом: $\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$. Далее,

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}.$$

Выразим $n!$ и $(2n)!$ как $a_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ и $a_{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}$ и подставим эти выражения в формулу Валлиса:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_n^2 n^{2n+1} e^{-2n} 2^{2n}}{a_{2n} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} 2^{2n+\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

В результате получим $a = \sqrt{2\pi}$.

30.23. Ясно, что $\lim_{n\to\infty}(a_{2k-1} - a_{2k}) = 0$, поэтому достаточно решить задачу б). Из тождества $\dfrac{1-t^{4k}}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots - t^{4k-2}$ следует, что

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1-t^{4k}}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{t^{4k}}{1+t^2}dt =$$
$$= \int_0^1 (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots - t^{4k-2})dt + R_k =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots - \frac{1}{4k-1} + R_k,$$

где $R_k = \int_0^1 \dfrac{t^{4k}}{1+t^2}dt$. Но $\dfrac{1}{2}t^{4k} \leqslant \dfrac{t^{4k}}{1+t^2} \leqslant t^{4k}$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, поэтому $\dfrac{1}{2(4k+1)} \leqslant R_k \leqslant \dfrac{1}{4k+1}$.

30.24. Согласно задаче 11.1 $\operatorname{ctg}^2 \alpha < \dfrac{1}{\alpha^2} < \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$ для $0 < \alpha < \pi/2$. Просуммируем такие неравенства для $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}, \dfrac{2\pi}{2n+1}, \ldots, \dfrac{n\pi}{2n+1}$. Воспользовавшись после этого результатом задачи 23.7, получим

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{2n(n+1)}{3},$$

т.е.

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2 2n(n+1)}{3(2n+1)^2}.$$

Остаётся заметить, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n(n+1)}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

30.25. а) Согласно неравенству Коши (задача 1.9)

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = \left(a_1 + 2a_2\frac{1}{2} + \ldots + na_n\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2).$$

Кроме того, $1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}$ (задача 30.24).

б) Пусть x — произвольное положительное число. Снова воспользуемся неравенством Коши, но только теперь представим a_k в виде $\sqrt{x + \frac{k^2}{x}} a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \frac{k^2}{x}}}$. В результате получим

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{2^2+x^2} + \ldots + \frac{x}{n^2+x^2} < \frac{\pi}{2}\right) \times$$
$$\times \left(x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \ldots + n^2 a_n^2)\right).$$

Согласно задаче 11.35 $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{2^2+x^2} + \ldots + \frac{x}{n^2+x^2} < \frac{\pi}{2}$. Выберем теперь x так, что $x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \ldots + n^2 a_n^2)$ и возведём обе части полученного неравенства в квадрат.

30.26. Пусть $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ и $m < n$. Ясно, что $|s_n - s_m| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!}$. Ряд $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, где $x = |z|$, сходится. Поэтому, воспользовавшись критерием Коши, получаем, что исходный ряд тоже сходится.

30.27. Пусть $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Равенство

$$\sum_{k+l=m} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^l}{l!} = \frac{1}{m!} \sum_{k+l=m} \binom{m}{k} z^k w^l = \frac{(z+w)^m}{m!}$$

показывает, что выражение для $f_n(z)f_n(w)$ содержит все слагаемые из выражения для $f_n(z+w)$ и ещё некоторые слагаемые из выражения для $\big(e^z - f_n(z)\big)\big(e^w - f_n(w)\big)$. Поэтому

$$|f_n(z)f_n(w) - f_n(z+w)| \leqslant \big(e^{|z|} - f_n(|z|)\big)\big(e^{|w|} - f_n(|w|)\big).$$

Выражение в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому $e^z e^w = \lim_{n\to\infty} f_n(z)f_n(w) = \lim_{n\to\infty} f_n(z+w) = e^{z+w}$.

30.28. По определению

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) =$$
$$= \cos x + i \sin x.$$

30.29. Непосредственно следует из задачи 30.28.

30.30. Нетривиальность доказательства этого неравенства связана с тем, что функция $f(t) = t^t$ не монотонна на интервале $(0, 1)$; она имеет минимум в точке $t_0 = 1/e \approx 0,\ 367879$.

Положим $u = \sin^2 x$ и $v = \cos^2 x$. Тогда $u + v = 1$ и $0 < u < \dfrac{1}{2} < v < 1$. Требуется доказать, что $(\sqrt{u})^{\sqrt{u}} < (\sqrt{v})^{\sqrt{v}}$, т.е. $\dfrac{1}{2}\sqrt{u}\ln u < \dfrac{1}{2}\sqrt{v}\ln v$ (логарифмы здесь отрицательны). Воспользуемся разложением логарифма в ряд и тем, что $u + v = 1$. В результате получим

$$\ln u = \ln(1 - v) = -\left(v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \ldots\right).$$

Таким образом, переходим к неравенству

$$\sqrt{u}\left(v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \ldots\right) > \sqrt{v}\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots\right).$$

После сокращения на $\sqrt{uv}$ получаем неравенство

$$\sqrt{v}\left(1 + \frac{v}{2} + \frac{v^2}{3} + \ldots\right) > \sqrt{u}\left(1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + \ldots\right).$$

Это неравенство очевидно, поскольку $v > u > 0$.

Замечание. *Более общее неравенство доказано в задаче 28.56.*

30.31. а) Если $a_k \leqslant 10^k - 1$, то $k \leqslant 9^k - 1$, поскольку на данных k местах могут стоять любые из девяти цифр, причём все цифры не могут быть одновременно нулями. Значит, если $n \geqslant 9^k$, то $a_n \geqslant 10^k - 1$ и $a_{n+1} \geqslant 10^n$. Поэтому $\sum_{n=9^k+1}^{9^{k+1}} \dfrac{1}{a_k} \leqslant \dfrac{9^{k+1} - 9^k}{10^k} = 8\left(\dfrac{9}{10}\right)^k$. Итак, рассматриваемая сумма не превосходит $8\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{9}{10}\right)^k < \infty$.

б) Получить нужные оценки можно такими же рассуждениями, как при решении задачи 21.29.

30.32. а) Те же самые рассуждения, что и при решении задачи 30.31 б), показывают, что любая последовательность цифр встречается в одном из чисел a_n (доказательство нужно слегка изменить для последовательности из одних нулей, но мы можем обойтись и без этой последовательности). Из этого легко выводится, что рассматриваемая десятичная дробь непериодична.

б) Согласно задаче 30.15 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$, где p_1, p_2, $\ldots$ — последовательные простые числа, расходится.

30.33. Последовательность $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$ неубывающая, поэтому она сходится либо к конечному положительному числу, либо к $+\infty$. Несложно доказать, что

$$a_1 + \ldots + a_n \leqslant (1 + a_1)\ldots(1 + a_n) \leqslant e^{a_1 + \ldots + a_n}. \qquad (1)$$

Первое неравенство доказывается раскрытием скобок, а второе неравенство следует из того, что $1 + a \leqslant e^a$ при $a \geqslant 0$. Неравенство (1) показывает, что $\prod(1 + a_k) = +\infty$ тогда и только тогда, когда $\sum a_k = +\infty$.

30.34. Последовательность $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1-b_k)$ невозрастающая, поэтому она сходится либо к положительному числу, любо к нулю. Легко проверить, что если $0 \leqslant b_k < 1$, то $1 - b \leqslant e^{-b}$. Поэтому

$$(1-b_1)\dots(1-b_n) \leqslant e^{-b_1-\dots-b_n}.$$

Это означает, что если ряд $\sum b_k$ расходится, то $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Предположим теперь, что ряд $\sum b_k$ сходится. Тогда существует такое натуральное число N, что $\sum_{k=N}^{\infty} b_k < 1/2$. Если $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, то

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) \geqslant 1 - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Пользуясь этим неравенством, индукцией по m легко показать, то если $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geqslant 0$, то

$$(1-\alpha_1)\dots(1-\alpha_m) \geqslant 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_m.$$

Таким образом, если $n > N$, то

$$\frac{p_n}{p_{N-1}} = (1-b_N)(1-b_{N+1})\dots(1-b_n) \geqslant 1 - b_N - \dots - b_n > \frac{1}{2}.$$

Эти неравенства показывают, что последовательность p_n невозрастающая и $p_n = p_{N-1}/2 > 0$. Поэтому предел $\lim_{n\to\infty} p_n$ существует и не равен нулю.

30.35. Пусть $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ и $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|)$. Тогда

$$|p_n - p_{n-1}| = |a_n| \prod_{k=1}^{n} |1+a_k| \leqslant |a_n| \prod_{k=1}^{n} (1+|a_k|) = P_n - P_{n-1}.$$

По условию существует предел $\lim_{n\to\infty} P_n$, поэтому ряд $\sum(P_n - P_{n-1})$ сходится. Но в таком случае должен сходиться и ряд $\sum(p_n - p_{n-1})$, поэтому существует предел $\lim_{n\to\infty} p_n$. Нужно лишь проверить, что этот предел отличен от нуля. Рассмотрим для этого ряд $\sum \left|\frac{a_k}{1+a_k}\right|$. Он сходится, поскольку сходится ряд $\sum |a_k|$ и последовательность $1 + a_k$ имеет предел, равный 1. Следовательно, бесконечное произведение $\prod \left(1 - \frac{a_k}{1+a_k}\right)$ сходится абсолютно, поэтому, как только что было доказано, последовательность $q_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_k}{1+a_k}\right)$ имеет конечный предел. Но $q_n = p_n^{-1}$, поэтому $\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$.

Глава 31.

Элементы теории чисел

31.1. Малая теорема Ферма

31.1. Докажите, что если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (*малая теорема Ферма*).

31.2. Пусть $p = 4k+3$ — простое число. Докажите, что если $a^2 + b^2$ делится на p, то оба числа a и b делятся на p.

31.3. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k + 1$.

31.4. а) Пусть p — простое число. Докажите, что если q — простой делитель числа $2^p - 1$, то $q - 1$ делится на p.

б) Приведите пример простого числа p, для которого число $2^p - 1$ не простое.

31.2. Псевдопростые числа

Согласно малой теореме Ферма для любого простого p число $2^p - 2$ делится на p. Натуральное число $n > 1$ называют *псевдопростым*, если $2^n - 2$ делится на n.

31.5. Докажите, что число $341 = 11 \cdot 31$ является псевдопростым.

31.6. Докажите, что если n — псевдопростое число, то число $2^n - 1$ тоже псевдопростое.

Замечание. *Существуют и чётные псевдопростые числа. Например, число* 161 038 *псевдопростое.*

31.3. Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(n)$ равна количеству тех из чисел $1, 2, \ldots, n-1$, которые взаимно просты с n. Например, если p — простое число, то $\varphi(p) = p - 1$.

31.7. а) Докажите, что если p — простое число, то $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

б) Докажите, что если числа m и n взаимно простые, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

31.8. Докажите, что если число a взаимно просто с n, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ (*теорема Эйлера*).

31.9. Числа a и n взаимно простые. Докажите, что для некоторого натурального числа m число $a^m - 1$ делится на n.

31.10. Докажите, что $n = \sum \varphi(d)$, где суммирование ведётся по всем числам d, делящим n.

31.11. а) Найдите остаток от деления 171^{2147} на 52.

б) Найдите остаток от деления 126^{1020} на 138.

31.12. Пусть a и m — взаимно простые числа, k — наименьшее натуральное число, для которого $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. Докажите, что $\varphi(m)$ делится на k.

31.13. Пусть $a \geqslant 2$ и n — натуральные числа. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n.

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение натурального числа n на простые множители. Назовём *обобщённой функцией Эйлера* функцию $L(n)$, которая равна 1 при $n = 1$ и $\text{НОК}\big(p_1^{\alpha_1 - 1}(p_k - 1), \ldots, p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)\big)$ при $n > 1$.

31.14. Докажите, что если числа x и n взаимно простые, то $x^{L(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

31.4. Теорема Вильсона

31.15. а) Докажите, что $(p-1)! + 1$ делится на p тогда и только тогда, когда число p простое (*теорема Вильсона*).

б) Докажите, что

$$\big((p-1)!\big)^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod p, & \text{если } p \text{ составное;} \\ 1 \pmod p, & \text{если } p \text{ простое.} \end{cases}$$

31.16. Пусть $a(n)$ и $b(n)$ — остатки от деления чисел $\big((n-1)!\big)^2$ и $\big((n-1)!+1\big)^2$ на n. Докажите, что $f(n) = na(n) + 2b(n)$ — простое число, причём любое простое число можно представить в таком виде.

31.5. Задачи о сравнениях

31.17. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{n_1}$, ..., $a \equiv b \pmod{n_k}$, то $a \equiv b \pmod n$, где $n = \text{НОК}(n_1, \dots, n_n)$.

31.18. Пусть p — простое число, n и a — натуральные числа, не делящиеся на p. Докажите, что если сравнение $x^n \equiv a \pmod p$ имеет решение, то сравнение $x^n \equiv a \pmod{p^r}$ имеет решение для любого натурального r.

31.19. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{p^n}$, где p — простое число, то $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$.

31.20. Пусть $a \geqslant 2$ и n — натуральные числа. Докажите, что $a^k \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$ тогда и только тогда, когда k делится на n.

* * *

31.21. Пусть p — простое число, $f(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степень которого по каждой переменной меньше p. Докажите, что если для всех целых x_1, ..., x_n выполняется сравнение $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod p$, то все коэффициенты многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$ делятся на p.

31.22. Пусть p — простое число, $f(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен с целыми коэффициентами, для которого $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod p$ для всех целых x_1, ..., x_n. Заменим в каждом мономе этого многочлена x_i^m, где $m \geqslant p$, на x_i^r, где r — остаток от деления m на p. Докажите, что в результате получится тождественное сравнение $0 \equiv 0 \pmod p$.

31.23. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен с целыми коэффициентами и со свободным членом, равным нулю. Докажите, что если степень этого многочлена меньше n, то сравнение $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod p$, где p — простое число, имеет решение, отличное от $(0, 0, \dots, 0)$. (*Шевалле*)

31.24. Пусть a, b, c — целые числа. Докажите, что сравнение $ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv 0 \pmod{p}$ имеет решение $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ для любого простого числа p.

31.6. Функция $\sigma_k(n)$. Делители

Пусть d_1, d_2, …— различные делители числа n, включая 1 и n. Функция $\sigma_k(n)$ определяется как сумма $d_1^k + d_2^k + \dots$. В частности, $\sigma_0(n)$ — количество делителей числа n, $\sigma_1(n)$ — сумма делителей числа n. Обычно используется обозначение $\sigma(n) = \sigma_1(n)$.

31.25. а) Докажите, что если p — простое число, то $\sigma_k(p^a) = 1 + p^k + p^{2k} + \dots + p^{ak}$.

б) Докажите, что если числа m и n взаимно простые, то $\sigma_k(mn) = \sigma_k(m)\sigma_k(n)$.

Число n называют *совершенным*, если $\sigma(n) = 2n$, т.е. сумма всех делителей числа n, отличных от n, равна самому числу n.

31.26. а) Докажите, что если число $2^p - 1$ простое, то число $2^{p-1}(2^p - 1)$ совершенное (*Евклид*).

б) Докажите, что если n — чётное совершенное число, то существует простое число вида $2^p - 1$, для которого $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ (*Эйлер*).

31.27. Докажите, что если n — нечётное число, у которого есть ровно два разных простых делителя, то $\sigma(n) < 2n$.

31.28. Докажите, что натуральное число n можно выбрать так, что отношение $\sigma(n)/n$ будет сколь угодно велико.

31.29. а) Приведите пример чисел $m \neq n$, для которых $\varphi(n) = \varphi(m)$.

б) Докажите, что если $m \neq n$, то $n\varphi(n) \neq m\varphi(m)$.

в) Приведите пример чисел $m \neq n$, для которых $n\sigma(n) = m\sigma(m)$.

31.30. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{2n} \sigma_0(k) - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2n}{k}\right] = n.$$

Функция Мёбиуса определяется следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1; \\ (-1)^k & \text{при } n = p_1 \dots p_k; \\ 0 & \text{при } n = p^2 m. \end{cases}$$

31.31. Докажите, что если $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$, то

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(n/d) = \sum_{d|n} \mu(n/d)F(d),$$

где сумма берётся по всем делителям d числа n (*Мёбиус*).

31.32. Докажите, что если $F(n) = \prod\limits_{d|n} f(d)$, то

$$f(n) = \prod_{d|n} F(n/d)^{\mu(d)} = \prod_{d|n} F(d)^{\mu(n/d)}.$$

31.7. Квадратичные вычеты

31.33. Пусть p — простое число, $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует не более n различных целых чисел x_i, для которых $0 \leqslant x_i \leqslant p-1$ и $f(x_i)$ делится на p (*Лагранж*).

Целое число a квадратичным *квадратичным вычетом* по модулю p, если $a \equiv b^2 \pmod{p}$ для некоторого целого числа b. В противном случае число a называют *квадратичным невычетом*.

31.34. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что среди чисел 1, 2, ..., $p-1$ ровно половина квадратичных вычетов и ровно половина квадратичных невычетов по модулю p.

31.35. Пусть $1 \leqslant a \leqslant p-1$, где $p > 2$ — простое число. Докажите, что число a является квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ (*Эйлер*).

31.36. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что число -1 является квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

31.37. Пусть r — это 2 или нечётное число, $p_1, \ldots, p_r$ — различные простые числа вида $4k+1$. Предположим, что $\left(\dfrac{p_i}{p_j}\right) = -1$ для всех $i \neq j$. Докажите, что уравнение $x^2 - dy^2 = -1$, где $d = p_1 \ldots p_r$, имеет решение в целых числах.

31.8. Квадратичный закон взаимности

Для простого числа p *символ Лежандра* $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ определяется следующим образом:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ делится на } p; \\ 1, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет;} \\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет.} \end{cases}$$

Символ Лежандра мы иногда будем обозначать (a/p).

Согласно задаче 31.35, если p — нечётное простое число, то $(a/p) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$. Следовательно, $(ab/p) = (a/p)(b/p)$ и

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 4k+1; \\ -1 & \text{при } p = 4k+3. \end{cases}$$

Квадратичный закон взаимности заключается в следующем. Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Тогда

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Кроме того, если p — нечётное простое число, то $\left(\dfrac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$.

Впервые квадратичный закон взаимности был доказан Гауссом. Сейчас известно много разных доказательств квадратичного закона взаимности. Как правило, они используют какие-то интерпретации символа Лежандра. Мы приведём две такие интерпретации, принадлежащие Гауссу (задача 31.38) и Золотарёву (задача 31.39).

31.38. Пусть p — нечётное простое число, а q — натуральное число, не делящееся на p. Для каждого натурального числа l от 1 до $\dfrac{p-1}{2}$ запишем $lq = \pm r_l \pmod p$, где $1 \leqslant r_l \leqslant \dfrac{p-1}{2}$. Пусть μ — количество всех встречающихся здесь минусов. Докажите, что $\left(\dfrac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu}$ (*Гаусс*).

31.39. Пусть p — нечётное простое число, a — число, взаимно простое с p, и $\pi_{a,p} : i \mapsto ai \pmod p$ — перестановка остатков от деления на p. Докажите, что тогда $\operatorname{sgn} \pi_{a,p} = (a/p)$, где $\operatorname{sgn} = 1$ для чётной перестановки и $\operatorname{sgn} = -1$ для нечётной перестановки. (*Золотарёв*)

31.40. Докажите квадратичный закон взаимности с помощью леммы Гаусса (задача 31.38) и тождества из задачи 5.28.

31.41. а) Докажите квадратичный закон взаимности с помощью задачи 31.39.

б) Пусть m — нечётное простое число. Докажите, что

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{(m^2-1)/8}.$$

31.42. Докажите квадратичный закон взаимности с помощью леммы Гаусса и тождества из задачи 11.31 (*Эйзенштейн*).

* * *

31.43. Пусть p — простое число. Докажите, что $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$ для $p = 12k \pm 1$ и $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$ для $p = 12k \pm 5$.

31.44. Пусть p — простое число. Докажите, что $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ для $p = 6k + 1$ и $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ для $p = 6k - 1$.

31.45. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $6k + 1$.

31.46. а) Пусть $p = 2^n - 1$ — простое число, причём $p > 3$. Докажите, что $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$.

б) Пусть $p = 2^n + 1$ — простое число, причём $p > 3$. Докажите, что $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$.

31.47. Докажите, что $3^n - 1$ не делится на $2^n - 1$ при $n > 1$.

31.9. Гауссовы суммы

Пусть p — нечётное простое число, $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$. Для каждого целого числа a можно рассмотреть *гауссову сумму* $g_a = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \varepsilon^{ak}$, где $\left(\frac{k}{p}\right)$ — символ Лежандра. Ясно, что g_a зависит только от остатка от деление a на p (и от самого числа p).

31.48. Докажите, что $g_0 = 0$.

31.49. Докажите, что $g_1^2 = \left(\dfrac{-1}{p}\right) p$.

31.50. Докажите, что

$$\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$
$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

31.51. Докажите, что $\sum_{n=1}^{p-2}\left(\dfrac{n(n+1)}{p}\right) = -1$.

31.52. Для каждого натурального $n \leqslant p-2$ пара $(n, n+1)$ имеет один из четырёх видов: (R, R), (N, N), (N, R), (R, N), где R означает вычет, а N — невычет. Пусть RR, NN, NR, RN — количества всех пар соответствующего вида.

а) Докажите, что $RR + NN - RN - NR = 1$.

б) Пусть $\varepsilon = (-1)^{(p-1)/2}$. Докажите, что

$$RR + RN = \frac{1}{2}(p - 2 - \varepsilon), \qquad RR + NR = \frac{1}{2}(p-1) - 1,$$
$$NR + NN = \frac{1}{2}(p - 2 + \varepsilon), \qquad RN + NN = \frac{1}{2}(p-1).$$

в) Докажите, что

$$RR = \frac{p}{4} - \frac{\varepsilon + 4}{4}, \quad RN = \frac{p}{4} - \frac{\varepsilon}{4}, \quad NN = NR = \frac{p}{4} + \frac{\varepsilon - 2}{4}.$$

31.10. Суммы двух квадратов

Здесь мы доказываем, что любое простое число $p = 4k + 1$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел. Различные подходы приведены в задачах 31.53–31.55. Другие доказательства этого утверждения можно найти в решении задачи 36.19 а) и на с. 507.

Представление простого числа $p = 4k + 1$ в виде суммы двух квадратов единственно (задача 31.56).

Напомним, что простое число $p = 4k + 3$ нельзя представить в виде суммы двух квадратов (задача 4.45 а). Кроме того, произведение двух чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, само представимо в виде суммы двух квадратов (задача 5.11).

31.53. Пусть $p = 4k + 1$ — простое число.

а) Докажите, что существует целое число x, для которого $x^2 + 1$ делится на p.

б) Докажите, что можно выбрать целые числа $0 \leqslant r_1, r_2 < \sqrt{p}$ и $0 \leqslant s_1, s_2 < \sqrt{p}$ так, что числа $r_1x + s_1$ и $r_2x + s_2$ будут давать одинаковые остатки при делении на p.

в) Докажите, что $p = (r_1 - r_2)^2 + (s_1 - s_2)^2$.

31.54. Докажите, что любое простое число $p = 4k + 1$ можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, воспользовавшись задачей 17.12.

31.55. Пусть $p = 4k + 1$ — простое число.

а) Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = mp$ имеет решение в натуральных числах x, y, m.

б) Докажите, что если $m > 1$, то можно построить решение с меньшим m.

31.56. Докажите, что представление простого числа $p = 4k + 1$ в виде суммы двух квадратов целых чисел единственно. (Мы не различаем представления $p = x^2 + y^2$, отличающиеся только перестановкой x и y или заменами знака x и y.)

31.11. Суммы четырёх квадратов

31.57. Докажите, что если каждое из чисел a и b является суммой четырёх квадратов целых чисел, то их произведение ab тоже является суммой четырёх квадратов целых чисел.

31.58. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что существуют целые числа x, y и m, для которых $1 + x^2 + y^2 = mp$, причём $0 < m < p$.

31.59. Пусть p — нечётное простое число.

а) Докажите, что можно выбрать натуральное число $m < p$ и целые числа x_1, x_2, x_3 и x_4 так, что $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mp$.

б) Докажите, что наименьшее такое m нечётно.

в) Докажите, что наименьшее такое m равно 1.

31.60. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы четырёх квадратов целых чисел (*Лагранж*).

31.12. Первообразные корни по простому модулю

Пусть p — простое число, x — натуральное число, не превосходящее $p-1$. Тогда согласно малой теореме Ферма $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Наименьшее натуральное число d, для которого $x^d \equiv 1 \pmod{p}$, называют *показателем*, которому принадлежит x по модулю p.

Число x называют *первообразным корнем* по модулю p, если его показатель равен $p-1$. Эквивалентное условие состоит в том, что числа x, x^2, $\ldots$, x^{p-1} дают разные остатки при делении на p. Первообразные корни существуют для любого простого числа p (задача 31.63).

31.61. Докажите, что показатель d делит число $p-1$.

31.62. Докажите, что если $x^m \equiv 1 \pmod{p}$, то показатель d делит число m.

31.63. а) Докажите, что к каждому показателю d принадлежит не более $\varphi(d)$ остатков от деления на p.

б) Докажите, что к каждому показателю d, делящему число $p-1$, принадлежит ровно $\varphi(d)$ остатков от деления на p.

в) Докажите, что для любого простого числа p существует ровно $\varphi(p-1)$ первообразных корней.

31.64. а) Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Докажите, что натуральное число d, для которого $x^{d+1} \equiv x \pmod{n}$ для всех целых x, существует тогда и только тогда, когда $n = p_1 \ldots p_k$, где p_1, $\ldots$, p_k — попарно различные простые числа.

б) Пусть $n = p_1 \ldots p_k$, где p_1, $\ldots$, p_k — попарно различные простые числа. Докажите, что наименьшее натуральное число d, для которого $x^{d+1} \equiv x \pmod{n}$ для всех целых x, равно $\text{НОК}(p_1 - 1, \ldots, p_k - 1)$.

31.65. Пусть p — нечётное простое число.

а) Докажите, что нечётные простые делители числа $a^p - 1$ делят $a-1$ или имеют вид $2px+1$.

б) Докажите, что нечётные простые делители числа $a^p + 1$ делят $a+1$ или имеют вид $2px+1$.

31.66. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $2px+1$.

31.67. Докажите, что все простые делители числа $2^{2^n}+1$ имеют вид $2^{n+1}x+1$.

31.68. Докажите, что 3 является первообразным корнем по модулю простого числа $p = 2^n + 1$, где $n > 1$.

31.69. Пусть p — простое число и $S = 1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$. Докажите, что

$$S \equiv \begin{cases} -1 \pmod p, & \text{если } n \text{ делится на } p-1, \\ 0 \pmod p, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1. \end{cases}$$

31.13. Первообразные корни по составному модулю

Первообразные корни можно рассмотреть и для составного модуля m. Будем называть число x ***первообразным корнем*** по модулю m, если числа $x, x^2, \ldots, x^{\varphi(m)}$ — это все различные остатки, взаимно простые с m. В серии задач 31.71–31.77 доказывается, что первообразный корень по модулю m существует тогда и только тогда, когда $m = 2$, 4, p^α или $2p^\alpha$, где p — нечётное простое число.

31.70. Докажите, что $(1 + km)^{m^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{m^\alpha}$ для любого m.

31.71. Пусть p — простое число. Докажите, что первообразный корень по модулю p^α является также первообразным корнем по модулю p.

31.72. Пусть x — первообразный корень по простому модулю p. Предположим, что $x^{p^{\alpha-2}(p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, где $\alpha \geqslant 2$. Докажите, что тогда x — первообразный корень по модулю p^α.

31.73. Пусть x — первообразный корень по нечётному простому модулю p. Докажите, что по крайней мере одно из чисел x и $x + p$ является первообразным корнем по модулю p^2.

31.74. Докажите, что если x — первообразный корень по модулю p^2, где p — нечётное простое число, то x — первообразный корень по модулю p^α для любого $\alpha \geqslant 2$.

31.75. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что для любого натурального α существует первообразный корень по модулю $2p^\alpha$.

31.76. Докажите, что первообразный корень по модулю 2^n существует тогда и только тогда, когда $n \leqslant 2$.

31.77. Докажите, что если m — это не число вида 2, 4, p^α или $2p^\alpha$, где p — нечётное простое число, то первообразных корней по модулю m не существует.

31.14. Теорема Чебышёва о простых числах

Пусть $\pi(n)$ — количество простых чисел, не превосходящих n.

31.78. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \pi(n)/n = 0$ (*Эйлер*).

31.79. Докажите, что $\frac{2}{3}\frac{n}{\ln n} < \pi(n)$ при $n > 200$.

31.80. Докажите, что $\pi(n) < 3\ln 2\frac{n}{\ln n}$ при $n > 55$.

Замечание. *Чебышёв доказал, что для достаточно больших n выполняются более точные неравенства*

$$0,92129\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1,10555\frac{n}{\ln n}.$$

Решения

31.1. Первое решение. Согласно задаче 4.62 набор остатков от деления на p чисел a, $2a$, ..., $(p-1)a$ совпадает с набором 1, 2, ..., $p-1$. Значит, $a^{p-1}\cdot 1\cdot 2\dots(p-1) \equiv 1\cdot 2\dots(p-1) \pmod p$. Число $b = 1\cdot 2\dots(p-1)$ не делится на p, поэтому $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Чтобы доказать это, нужно умножить обе части равенства на число $\bar b$, для которого $\bar b b \equiv 1 \pmod p$.

Второе решение. Покажем, что для любого натурального n число $n^p - n$ делится на p. Применим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $n^p - n$ делится на p. Тогда число $(n+1)^p - (n+1) = \binom{p}{1}n^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}n$ тоже делится на p, поскольку все числа $\binom{p}{k}$, где $1 \leqslant k \leqslant p-1$, делятся на p (задача 14.27).

Если число n не делится на p, то из того, что $n^p - n = n(n^{p-1}-1)$ делится на p, следует, что $n^{p-1}-1$ делится на p.

31.2. Предположим, что одно из чисел a и b не делится на p. Тогда другое число тоже не делится на p. Поэтому согласно малой теореме Ферма $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ и $b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Значит, $a^{p-1}+b^{p-1} \equiv 2 \pmod p$. С другой стороны, число $a^{p-1}+b^{p-1} = a^{4k+2}+b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}$ делится на a^2+b^2, поэтому оно делится на p.

31.3. Предположим, что $p_1, \ldots, p_r$ — все различные простые числа вида $4k+1$. Рассмотрим число $(2p_1 \ldots p_r)^2 + 1$. Оно нечётно, поэтому все его простые делители имеют вид $4k \pm 1$. Согласно задаче 31.2 у этого числа не может быть простых делителей вида $4k-1$. Остаётся заметить, что рассматриваемое число не делится на $p_1, \ldots, p_r$.

31.4. а) Предположим, что $2^p \equiv 1 \pmod{q}$, где q — простое число. Ясно, что $q \neq 2$. Если $q-1$ не делится на p, то наибольший общий делитель чисел $q-1$ и p равен 1, поэтому существуют целые числа a и b, для которых $ap+b(q-1) = 1$ (см. с. 43). Согласно малой теореме Ферма $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Поэтому $2 \equiv 2^{ap+b(q-1)} \equiv (2^p)^a (2^{q-1})^b \equiv 1 \pmod{q}$. Приходим к противоречию.

б) Ответ: $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

31.5. Число $2^{341} - 2 = 2(2^{340} - 2) = 2\big((2^{10})^{34} - 1\big)$ делится на $2^{10} - 1 = 1023$. Далее, $1023 = 3 \cdot 341$.

31.6. По условию $2^n - 2 = na$ для некоторого натурального a. Поэтому $2^{2^n-1} - 2 = 2\left(2^{2^n-2} - 1\right) = 2(2^{na} - 1)$. Это число делится на $2^n - 1$.

31.7. а) Среди чисел $1, 2, \ldots, p^n - 1$ на p делятся $p^{n-1} - 1$ чисел, а именно, числа $p, 2p, \ldots, p(p^{n-1} - 1)$. Поэтому $\varphi(p^n) = p^n - 1 - (p^{n-1} - 1) = p^n - p^{n-1}$.

б) Числа m и n взаимно простые, поэтому существуют целые числа u и v, для которых $um + vn = 1$ (эти числа можно найти с помощью алгоритма Евклида). Пусть a и b — некоторые остатки от деления на m и n, т.е. $0 \leqslant a \leqslant m-1$ и $0 \leqslant b \leqslant n-1$. Сопоставим паре (a, b) число c, которое является остатком от деления числа $avn + bum$ на mn. Ясно, что $c \equiv avn \equiv a \pmod{m}$ и $c \equiv bum \equiv b \pmod{n}$. Поэтому, в частности, разным парам (a, b) сопоставляются разные числа c. Мы получили взаимно однозначное отображение остатков от деления на m и n на остатки от деления на mn. При этом $\text{НОД}(c, m) = \text{НОД}(a, m)$ и $\text{НОД}(c, n) = \text{НОД}(b, n)$. Поэтому числа c и mn взаимно простые тогда и только тогда, когда числа a и m взаимно простые и числа b и n тоже взаимно простые.

Замечание. *Используя задачи а) и б), легко получить формулу для $\varphi(n)$, где $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$. Другое доказательство этой формулы приведено в решении задачи 14.33.*

31.8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}$ — все числа от 1 до $n-1$, которые взаимно просты с n. Сопоставим числу a_i остаток от деления числа aa_i на n. Число aa_i взаимно просто с n, поэтому мы снова получим одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}$. При этом число $a(a_i - a_j)$ при $i \neq j$ не может делиться на n. Значит, мы получаем некоторую перестановку чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}$. Поэтому

$$a^{\varphi(n)} a_1 \ldots a_{\varphi(n)} \equiv a_1 \ldots a_{\varphi(n)} \pmod{n}. \qquad (1)$$

Умножение на число $b = a_1 \dots a_{\varphi(n)}$ тоже задаёт некоторую перестановку чисел $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$. Поэтому $\bar{b}b \equiv 1 \pmod{n}$ для некоторого числа $\bar{b} = a_i$. Умножив обе части сравнения (1) на $\bar{b}$, получим требуемое.

31.9. Согласно теореме Эйлера (задача 31.8) можно положить $m = \varphi(n)$.

31.10. Первое решение. Рассмотрим дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$; их количество равно n. Заменим каждую из этих дробей на соответствующую несократимую дробь. При этом получатся дроби, знаменателями которых являются делители числа n, причём количество дробей со знаменателем d равно $\varphi(d)$.

Второе решение. Запишем разложение числа n на простые множители: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Любой делитель d числа n имеет вид $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$. Поэтому в силу свойства мультипликативности функции Эйлера (задача 31.7 б)

$$\sum \varphi(d) = \bigl(1 + \varphi(p_1) + \dots + \varphi(p_1^{\alpha_1})\bigr) \dots \bigl(1 + \varphi(p_k) + \dots + \varphi(p_k^{\alpha_k})\bigr).$$

Действительно, в правой части после раскрытия скобок мы получаем сумму всех слагаемых вида $\varphi(p_1^{\beta_1}) \dots \varphi(p_k^{\beta_k}) = \varphi(p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k})$. Остаётся заметить, что

$$1 + \varphi(p) + \dots + \varphi(p^\alpha) = 1 + (p-1) + (p^2 - p) + \dots + (p^\alpha - p^{\alpha-1}) = p^\alpha.$$

31.11. а) Числа 171 и 52 взаимно простые, поэтому $171^{\varphi(52)} \equiv 1 \pmod{52}$. Далее, $\varphi(52) = \varphi(4)\varphi(13) = 24$. Поэтому $171^{2147} \equiv 15^{24\cdot 89+11} \equiv 15^{11} \equiv 7 \pmod{52}$.

б) Числа 126 и 138 не взаимно простые: $\text{НОД}(126, 138) = 6$. Мы воспользуемся тем, что если $a \equiv b \pmod{23}$, то $6a \equiv 6b \pmod{138}$. Пусть $a = 21 \cdot 126^{1020}$. Тогда $a \equiv 21 \cdot 11^{22\cdot 46+7} \equiv -2 \cdot 11^7 \equiv 9 \pmod{23}$. Поэтому $6a \equiv 54 \pmod{138}$.

31.12. Согласно теореме Эйлера $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Поделим $\varphi(m)$ на k с остатком: $\varphi(m) = kq + r$, где $0 \leqslant r < k$. Тогда $1 \equiv a^{\varphi(m)} \equiv (a^k)^q a^r \equiv a^r \pmod{m}$. Следовательно, $r = 0$, поскольку иначе мы получили бы противоречие с минимальностью числа k.

31.13. Числа a и $a^n - 1$ взаимно простые. Поэтому согласно теореме Эйлера $a^{\varphi(a^n-1)} \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$. Из этого следует, что число $\varphi(a^n - 1)$ делится на n (см. задачу 31.20).

31.14. Согласно теореме Эйлера $x^{p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Возведём обе части этого равенства в степень $\dfrac{L(n)}{p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}$ (это число целое, поскольку $L(n)$ делится на $p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$). В результате получим $x^{L(n)} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Следовательно, число $x^{L(n)} - 1$ делится на $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_k^{\alpha_k}$, поэтому оно делится на n.

31.15. а) Предположим, что число p простое и $p > 2$ (для $p = 2$ требуемое утверждение очевидно). Пусть a — одно из чисел $1, 2, 3, \dots, p-1$. Для него

существует единственное число $\bar{a}$, $1 \leqslant \bar{a} \leqslant p-1$, для которого $a\bar{a} \equiv 1 \pmod p$ (см. решение задачи 4.63). Если $a = \bar{a}$, то $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ делится на p, поэтому $a = 1$ или $p-1$. Таким образом, числа 2, 3, ..., $p-2$ разбиваются на пары, произведения которых дают остаток 1 при делении на p. Значит, $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \pmod p$.

Предположим теперь, что $p = qr$, где $1 < r, q < p$. Тогда $(p-1)!$ делится на q, поэтому $(p-1)! \not\equiv -1 \pmod p$.

б) Предположим, что $p = qr$, где $1 < r < q < p$. Тогда $(p-1)!$ делится на $qr = p$. Остаётся рассмотреть случай, когда $p = q^2$, где q — простое число. Если $q = 2$, то $q^2 = 4$ и $(3!)^2 = 36$ делится на 4. Если же $q > 2$, то $(p-1)!$ делится на q и на $2q$, поэтому даже само число $(p-1)!$, а не только его квадрат, делится на $q^2 = p$.

31.16. Если число n простое, то согласно теореме Вильсона (задача 31.15 а) $a(n) = 1$ и $b(n) = 0$, поэтому $f(n) = n$. Если же число n составное, то, как следует из решения задачи 31.15 б), $\big((n-1)!\big)^2 \equiv 0 \pmod n$ и $2(n-1)! \equiv 0 \pmod n$. Поэтому $a(n) = 0$ и $b(n) = 1$, значит, $f(n) = 2$.

31.17. Число $a - b$ делится на n_1, n_2, ..., n_k, поэтому оно делится и на наименьшее общее кратное этих чисел.

31.18. Применим индукцию по r. Предположим, что $x_r^n = a + mp^r$. Будем искать целое число t так, чтобы для числа $x_{r+1} = x_r + tp^r$ выполнялось сравнение $x_{r+1}^n \equiv a \pmod{p^{r+1}}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} x_{r+1}^n &= (x_r + tp^r)^n = x_r^n + nx_r^{n-1}tp^r + \frac{n(n-1)}{2}x_r^{n-2}t^2p^{2r} + \ldots \\ &= a + mp^r + nx_r^{n-1}tp^r + \ldots \end{aligned}$$

Здесь многоточием обозначены члены, делящиеся на p^{r+1}. Таким образом, нужно выбрать t так, чтобы число $mp^r + nx_r^{n-1}tp^r$ делилось на p^{r+1}, т.е. число $m + nx_r^{n-1}t$ делилось на p. По условию числа n и a не делятся на p. Поэтому число nx_r^{n-1} тоже не делится на p. В таком случае для любого числа m можно выбрать число t так, что $nx_r^{n-1}t \equiv -m \pmod p$.

31.19. По условию $a = b + mp^n$, где m — целое число. Поэтому

$$a^p = b^p + pb^{p-1}mp^n + \frac{p(p-1)}{2}b^{p-2}(mp^n)^2 + \ldots$$

Все слагаемые $pb^{p-1}mp^n$, $\dfrac{p(p-1)}{2}b^{p-2}(mp^n)^2$, ... делятся на p^{n+1}.

31.20. Запишем k в виде $k = pn + r$, где $0 \leqslant r < n$. Ясно, что $a^n \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$, поэтому $a^k \equiv a^r \pmod{a^n - 1}$. Но если $r > 0$, то $a \leqslant a^r \leqslant a^{n-1} < a^n - 1$. Поэтому $a^r \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$ тогда и только тогда, когда $r = 0$, т.е. число k делится на n.

31.21. Применим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение верно. Действительно, если не все коэффициенты многочлена $f(x)$ делятся на p, то $cf(x) \equiv x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m \pmod p$ для некоторого целого числа c; здесь $m < p$. Поэтому согласно теореме Лагранжа (задача 31.33) сравнение $cf(x) \equiv 0 \pmod p$ имеет место не более чем для m различных по модулю p значений x. Поскольку $m < p$, найдётся x, для которого $f(x) \not\equiv 0 \pmod p$.

Предположим, что требуемое утверждение доказано для некоторого n. Рассмотрим тождественное сравнение $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \equiv 0 \pmod p$, у которого степень по каждой переменной меньше p. Запишем $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ в виде

$$g_m(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1}^m + g_{m-1}(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1}^{m-1} + \ldots + g_0(x_1, \ldots, x_n).$$

Фиксируем $x_1, \ldots, x_n$; пусть $a_m = g_m(x_1, \ldots, x_n), \ldots, a_0 = g_0(x_1, \ldots, x_n)$. Сравнение $a_mx_{n+1}^m + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod p$ выполняется для всех целых x_{n+1}, поэтому $a_0 \equiv \ldots \equiv a_m \equiv 0 \pmod p$. Таким образом, $g_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$ для всех целых $x_1, \ldots, x_n$. Поэтому по предположению индукции все коэффициенты многочлена $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ делятся на p.

31.22. Согласно малой теореме Ферма $x_i^p \equiv x_i \pmod p$, поэтому $x_i^m \equiv x_r \pmod p$. Значит, после указанных замен мы получим многочлен $g(x_1, \ldots, x_n)$, степень которого по каждой переменной строго меньше p, причём $g(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$ для все целых $x_1, \ldots, x_n$. Согласно задаче 31.21 все коэффициенты многочлена $g(x_1, \ldots, x_n)$ делятся на p.

31.23. Предположим, что сравнение $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$ имеет только решение $(0, \ldots, 0)$. Тогда сравнение

$$1 - \bigl(f(x_1, \ldots, x_n)\bigr)^{p-1} \equiv (1 - x_i^{p-1}) \ldots (1 - x_i^{p-1}) \pmod p \qquad (1)$$

выполняется тождественно. При $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ это очевидно, а при $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ это следует из малой теоремы Ферма.

Применим к обеим частям сравнения (1) замены, описанные в условии задачи 31.22. С одной стороны, согласно этой задаче в результате мы должны получить тождественное сравнение. С другой стороны, в правой части вообще никаких замен не делается, поэтому в правой части после замен стоит многочлен, моном высшей степени которого равен $\pm x_1^{p-1} \ldots x_n^{p-1}$. В левой же части первоначально стоит многочлен степени меньше $n(p-1)$; после указанных замен его степень может только уменьшиться. Получено противоречие.

31.24. Это утверждение очевидным образом следует из теоремы Шевалле (задача 31.23), поскольку степень рассматриваемого многочлена строго меньше числа его переменных.

31.25. а) Делителями числа p^a являются числа $1, p, p^2, \ldots, p^a$.

б) Пусть d и d' — делители чисел m и n. Тогда dd' — делитель числа mn. Для взаимно простых чисел m и n верно и обратное: любой делитель числа mn однозначно представляется в виде произведения делителей чисел

m и n. Поэтому если $\sigma_k(m) = \sum a_i^k$ и $\sigma_k(n) = \sum b_j^k$, то $\sigma_k(mn) = \sum a_i^k b_j^k = (\sum a_i^k)(\sum b_j^k) = \sigma_k(m)\sigma_k(n)$.

31.26. а) Числа 2^{p-1} и $(2^p - 1)$ взаимно простые, поэтому согласно задаче 31.25 б) $\sigma\big(2^{p-1}(2^p-1)\big) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p-1)$. Далее, согласно задаче 31.25 а) $\sigma(2^{p-1}) = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1$ и $\sigma(2^p - 1) = 1 + 2^p - 1 = 2^p$.

б) Пусть $n = 2^{p-1}m$, где m нечётно, — чётное совершенное число. Тогда $2^p m = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(m) = (2^p - 1)\sigma(m)$. Поэтому m делится на $2^p - 1$. Пусть $m = (2^p - 1)m'$. Тогда $2^p(2^p - 1)m' = 2^p m = \sigma(n) = 2^p\sigma(m)$, поэтому $\sigma(m) = 2^p m'$. Из равенства $m = (2^p - 1)m'$ следует, что $m + m' = 2^p m' = \sigma(m)$. С другой стороны, оба числа m и m' являются делителями числа m. Поэтому равенство $m + m' = \sigma(m)$ может выполняться лишь в том случае, когда число m простое и $m' = 1$.

31.27. Пусть $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}$, где p_1 и p_2 — простые числа, причём $p_1 \geqslant 3$ и $p_2 \geqslant 5$. Тогда из неравенства

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} < \frac{p_1^{a_1+1}}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}}{p_2 - 1} = n\frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1}$$

следует, что

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \leqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2.$$

31.28. Число $\sigma(n)/n$ является суммой всех чисел вида d/n, где d — делитель числа n. Но $d/n = d'$, где d' — некоторый делитель числа n, причём когда d пробегает все делители числа n, d' тоже пробегает все делители числа n. Значит, $\sigma(n)/n = \sum_d 1/d$, где сумма берётся по всем делителям числа n.

Положим $n = N!$. Тогда

$$\frac{\sigma(n)}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{N},$$

поскольку числа 1, 2, 3, ..., N являются делителями числа n. Остаётся заметить, что гармонический ряд расходится (задача 30.6).

31.29. а) Ответ: 5 и 8.

б) Пусть $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ и $p_1 > p_2 > \ldots > p_k$. Тогда $n\varphi(n) = \prod_{i=1}^k \big(p_i^{2a_i-1}(p_i - 1)\big)$ и наибольшее простое число, на которое делится $n\varphi(n)$ равно p_1. При этом максимальная степень числа p_1, на которую делится $n\varphi(n)$, равна $2a_1 - 1$. Таким образом, если известно число $n\varphi(n)$, то известны числа p_1 и a_1. Пусть $n = p_1^{a_1}n_2$. Тогда $n_2\varphi(n_2) = \dfrac{n\varphi(n)}{p_i^{2a_i-1}(p_i - 1)}$, поэтому известны числа p_2 и a_2 и т.д.

в) Ответ: 12 и 14.

31.30. Ясно, что $\left[\frac{2n+2}{k}\right]-\left[\frac{2n}{k}\right]=0$, если числа $2n+1$ и $2n+2$ не делятся на k. В противном случае эта разность равна 1. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n+2}\left[\frac{2n+2}{k}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2n}{k}\right]=\sigma_0(2n+1)+\sigma_0(2n+2)+1.$$

Поэтому если $f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\sigma_0(k)-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2n}{k}\right]$, то $f(n+1)-f(n)=1$. Ясно также, что $f(1)=1$.

31.31. Прежде всего проверим, что при всех $n>1$ выполняется соотношение $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=0$. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$. Тогда

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|p_1\ldots p_k}\mu(d)=1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\ldots+(-1)^k=(1-1)^k=0.$$

Ясно, что

$$\sum_{ab=n}F(a)\mu(b)=\sum_{d_1d_2b=n}f(d_1)\mu(b)=\sum_{d_1|n}\left(f(d_1)\sum_{d_2b=n/d_1}\mu(b)\right).$$

Пусть $n/d_1=m$. Тогда

$$\sum_{d_2b=m}\mu(b)=\sum_{b|m}\mu(b)=\begin{cases}1 & \text{при } n=d_1;\\ 0 & \text{при } n\neq d_1.\end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{d_1|n}\left(f(d_1)\sum_{d_2b=n/d_1}\mu(b)\right)=f(n).$$

31.32. Непосредственно сводится к задаче 31.31 с помощью логарифмирования.

31.33. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $f(x_1)$ и $f(x)$ делятся на p (x — целое число). Тогда $f(x)-f(x_1)=x^n-x_1^n+{}$ $+a_1(x^{n-1}-x_1^{n-1})+a_{n-1}(x-x_1)=(x-x_1)g(x)$ делится на p. При этом $g(x)=x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$ — многочлен с целыми коэффициентами, зависящими только от $a_1,\ldots,a_n$ и x. Если $0\leqslant x\leqslant p-1$ и $x\neq x_1$, то $x-x_1$ не делится на p. Поэтому на p должно делиться число $g(x)$, и мы можем воспользоваться предположением индукции.

31.34. Сопоставим каждому целому числу x, где $1\leqslant x\leqslant p-1$, остаток от деления на p числа x^2. Числам x и $p-x$ сопоставляется одно и то же число, причём $x\neq p-x$. Кроме того, согласно теореме Лагранжа (задача 31.33) сравнение $x^2\equiv c \pmod p$ не может иметь больше двух решений. Поэтому

образ рассматриваемого отображения состоит из $(p-1)/2$ элементов. А этот образ как раз и состоит из квадратичных вычетов.

31.35. Если $a \equiv b^2 \pmod p$, то согласно малой теореме Ферма (задача 31.1) $a^{(p-1)/2} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Поэтому любой квадратичный вычет является решением уравнения $x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$. Согласно теореме Лагранжа (задача 31.33) количество решений этого сравнения не превосходит $(p-1)/2$, а согласно задаче 31.34 количество квадратичных вычетов равно $(p-1)/2$. Поэтому квадратичные вычеты — это в точности решения сравнения $x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$.

Если a — квадратичный невычет, то $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$. Действительно, сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod p$ имеет только два решения: $x \equiv \pm 1 \pmod p$.

31.36. Воспользуемся критерием Эйлера (задача 31.35). Если $p = 4k+1$, то $(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{2k} = 1$, а если $p = 4k+3$, то $(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{2k+1} = -1$.

31.37. Предположим, что уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений в целых числах. Пусть (ξ, η) — фундаментальное решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Число d тоже имеет вид $4k+1$, поэтому $\xi^2 \equiv (\eta^2 + 1) \pmod 4$. Квадрат нечётного числа при делении на 4 даёт остаток 1, поэтому ξ нечётно, а η чётно. Равенство $\frac{(\xi-1)(\xi+1)}{4d} = \frac{\eta^2}{4}$ показывает, что $\eta^2/4$ (квадрат целого числа) можно представить в виде произведения двух квадратов целых чисел: $u^2 = \frac{(\xi-1)}{2d_1}$ и $v^2 = \frac{(\xi+1)}{2d_2}$, где d_1 и d_2 — делители числа d. Натуральные числа u и v взаимно простые, потому что НОД$(\xi-1, \xi+1) = 2$. Кроме того, $u \neq 0$, поскольку $\xi \neq 1$. Далее,

$$d_2 v^2 - d_1 u^2 = \frac{1}{2}(\xi+1) - \frac{1}{2}(\xi-1) = 1.$$

Предположим, что $d_1 \neq 1$ и $d_2 \neq 1$. По условию $r = 2$ или нечётно, поэтому d_1 или d_2 — произведение нечётного числа простых чисел.

Случай 1. d_1 — *произведение нечётного числа простых чисел.*

Пусть p — произвольный простой делитель числа d_2. Тогда

$$\left(\frac{d_1}{p}\right) = \left(\frac{p_{i_1}}{p}\right) \ldots \left(\frac{p_{i_{2k+1}}}{p}\right) = (-1)^{2k+1} = -1.$$

Но это противоречит тому, что $d_1 u^2 \equiv -1 \pmod p$, поскольку -1 является квадратичным вычетом по модулю p.

Случай 2. d_2 — *произведение нечётного числа простых чисел.*

Снова для произвольного простого делителя p числа d_1 получаем $\left(\frac{d_2}{p}\right) = -1$. Но это противоречит тому, что $d_2 v^2 \equiv 1 \pmod p$.

Полученные противоречия показывают, что либо $d_1 = 1$ и $d_2 = d$, либо $d_1 = d$ и $d_2 = 1$.

Случай 1. *$d_1 = 1$ и $d_2 = d$, т.е. $dv^2 - u^2 = 1$.*

Это противоречит предположению о том, что уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений.

Случай 2. *$d_1 = d$ и $d_2 = 1$, т.е. $v^2 - du^2 = 1$.*

Таким образом, (v, u) — решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. С другой стороны, $u^2v^2 = \dfrac{\xi^2 - 1}{4d} = \dfrac{\eta^2}{4}$, поэтому $uv = \dfrac{\eta}{2}$, а значит, $u < \eta$. Но это противоречит тому, что выбрано фундаментальное решение.

31.38. Прежде всего заметим, что если l и k — различные натуральные числа от 1 до $\dfrac{p-1}{2}$, то $r_l \neq r_k$. Действительно, если $r_l = r_k$, то $(l \pm k)q$ делится на p, поэтому $l \pm k$ делится на p. Но $|l \pm k| \leqslant p - 1$.

Таким образом, набор чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{(p-1)/2}$ совпадает с набором $1, 2, \ldots, \dfrac{p-1}{2}$. Поэтому, перемножив сравнения $q \equiv \pm r_1 \pmod p, \ldots, \dfrac{p-1}{2}q \equiv \pm r_{(p-1)/2} \pmod p$, получим

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} r_1 \ldots r_{(p-1)/2} = (-1)^{\mu}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p.$$

Следовательно, $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \pmod p$. Но $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\dfrac{q}{p}\right) \pmod p$ (задача 31.35).

31.39. Рассмотрим многочлен $A(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p}(x_i - x_j)$. Под действием чётной подстановки многочлен A не изменяется, а под действием нечётной подстановки он изменяет знак. Поэтому знак любой подстановки σ равен отношению $A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$ к $A(x_1, \ldots, x_p)$. Положим $x_1 = 1, \ldots, x_p = p$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \pi_{a,p} &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \frac{\pi_{a,p}(i) - \pi_{a,p}(j)}{i - j} \equiv \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} \frac{ai - aj}{i - j} = \\ &\equiv \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} a \equiv a^{p(p-1)/2} \pmod p. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a^p \equiv a \pmod p$, получаем $\operatorname{sgn} \pi_{a,p} \equiv a^{(p-1)/2} \equiv (a/p) \pmod p$.

31.40. Пусть $lq \equiv \varepsilon_l r_l \pmod p$, где $\varepsilon_l = \pm 1$ и $1 \leqslant r_l \leqslant \dfrac{p-1}{2}$. Докажем, что $\varepsilon_l = (-1)^{[2lq/p]}$. Действительно, $\varepsilon_l = 1$ тогда и только тогда, когда $\{lq/p\} < 1/2$. С другой стороны, для любого положительного α число $[2\alpha] = [2[\alpha] + 2\{\alpha\}] = 2[\alpha] + [2\{\alpha\}]$ чётно тогда и только тогда, когда $\{\alpha\} < 1/2$. Полагая $\alpha = \{lq/p\}$, получаем, что число $[2ql/p]$ чётно тогда и только тогда,

когда $\{lq/p\} < 1/2$. Итак, лемму Гаусса можно записать следующим образом: $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^m$, где $m = \sum_{l=1}^{(p-1)/2}[2lq/p]$.

Для любого нечётного числа a число $a+p$ чётно, поэтому

$$\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{2a}{p}\right) = \left(\frac{4}{p}\right)\left(\frac{(a+p)/2}{p}\right) = \left(\frac{(a+p)/2}{p}\right) = (-1)^s, \qquad (1)$$

где

$$s = \sum_{l=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{(a+p)l}{p}\right] = \sum_{l=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{al}{p}\right] + \sum_{l=1}^{(p-1)/2} l = \sum_{l=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{al}{p}\right] + \frac{p^2-1}{8}.$$

В частности, при $a = 1$ получаем $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$. Подставив это выражение в (1), после сокращения получим $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^M$, где $M = \sum_{l=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{al}{p}\right]$.

Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Тогда

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{l=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{ql}{p}\right] + \sum_{l=1}^{(q-1)/2}\left[\frac{pl}{q}\right]}$$

Остаётся заметить, что

$$\sum_{l=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{ql}{p}\right] + \sum_{l=1}^{(q-1)/2}\left[\frac{pl}{q}\right] = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$$

согласно задаче 5.28.

31.41. а) Пусть $P = \{0, 1, \ldots, pq-1\}$ и $\overline{P} = \{\,(a,b) \mid 0 \leqslant a < p,\ 0 \leqslant b < q\}$. Согласно китайской теореме об остатках отображение $c \mapsto \bar{c} = (c \pmod p), c \pmod q))$ является взаимно однозначным отображением P на $\overline{P}$.

Рассмотрим отображения $\mu, \nu : \overline{P} \to \overline{P}$, заданные формулами $\mu(a,b) = \overline{a+pb}$ и $\nu(a,b) = \overline{qa+b}$. Ясно, что $\mu(a,b) = (a,\ a+pb \pmod q))$, поэтому отображение μ переставляет элементы вида (a_0, b), где a_0 фиксировано. Следовательно, μ — перестановка множества $\overline{P}$ и $\operatorname{sgn}\mu = \left(\frac{p}{q}\right)^p = \left(\frac{p}{q}\right)$. Аналогично $\operatorname{sgn}\nu = \left(\frac{q}{p}\right)$.

Рассмотрим теперь на множестве P перестановку $\nu^{-1}\mu : qa+b \mapsto a+pb$. Знак этой перестановки равен $(-1)^k$, где k — количество пар элементов множества $\overline{P}$, для которых выполняются неравенства $qa+b > qa'+b'$ и $a+pb < a'+pb'$. По условию $|b-b'| < q$ и $|a-a'| < p$, поэтому приходим к

следующим неравенствам: $a > a'$ и $b < b'$. Таким образом, $k = \binom{q}{2}\binom{p}{2} = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$. В итоге получаем

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \operatorname{sgn}\mu \operatorname{sgn}\nu = \operatorname{sgn}\nu^{-1}\mu = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

б) При $m = 3$ требуемое равенство легко проверяется. Предположим, что $m \geqslant 3$ — нечётное натуральное число, для которого выполняется требуемое равенство. Тогда

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{m+2}\right) &= \left(\frac{-1}{m+2}\right)\left(\frac{m}{m+2}\right) = (-1)^{\frac{m+1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m+1}{2}}\left(\frac{m+2}{m}\right) = \\ &= (-1)^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m+1}{2}}(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(m+2)^2-1}{8}}.\end{aligned}$$

31.42. Пусть $lq \equiv \varepsilon_l r_l \pmod p$, где $\varepsilon_l = \pm 1$ и $1 \leqslant r_l \leqslant \frac{p-1}{2}$. Тогда $\sin\frac{2\pi lq}{p} = \varepsilon_l \sin\frac{2\pi r_l}{p}$. Перемножим такие равенства для $l = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. При доказательстве леммы Гаусса было показано, что набор чисел $r_1, \ldots, r_{(p-1)/2}$ совпадает с набором $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Поэтому после сокращения получаем

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{(p-1)/2} = \prod_{1\leqslant l\leqslant (p-1)/2} \sin\frac{2\pi lq}{p} \Big/ \sin\frac{2\pi l}{p}.$$

Воспользуемся тождеством из задачи 11.31 для $2k+1 = q$ и $\varphi = \sin\frac{2\pi l}{p}$. В результате получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{q}{p}\right) &= \prod_{1\leqslant l\leqslant (p-1)/2} (-4)^{(q-1)/2} \prod_{1\leqslant m\leqslant (q-1)/2}\left(\sin^2\frac{2\pi l}{p} - \sin^2\frac{2\pi k}{q}\right) = \\ &= (-4)^{(p-1)(q-1)/4}\prod_{l,m}\left(\sin^2\frac{2\pi l}{p} - \sin^2\frac{2\pi k}{q}\right).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-4)^{(p-1)(q-1)/4}\prod_{l,m}\left(\sin^2\frac{2\pi k}{q} - \sin^2\frac{2\pi l}{p}\right).$$

Таким образом, чтобы получить из выражения для $\left(\frac{p}{q}\right)$ выражение для $\left(\frac{q}{p}\right)$, нужно поменять знак у каждого из $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ сомножителей. Следовательно, $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}\left(\frac{q}{p}\right)$.

31.43. Согласно квадратичному закону взаимности $\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$. Ясно также, что $\left(\frac{\pm 1}{3}\right) = \pm 1$. Поэтому для $p = 12k\pm 1$ получаем $\pm\left(\frac{3}{p}\right) = \pm 1$, а для $p = 12k \pm 5$ получаем $\mp\left(\frac{3}{p}\right) = \pm 1$.

31.44. Ясно, что $\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{3}{p}\right)$. Далее, $(-1)^{(p-1)/2} = 1$ для $p = 12k+1$ и $p = 12k+5$, $(-1)^{(p-1)/2} = -1$ для $p = 12k-1$ и $p = 12k-5$. Воспользовавшись результатом задачи 31.43, получим требуемое.

31.45. Предположим, что существует лишь конечное число простых чисел вида $6k+1$. Пусть N — их произведение, а p — простой делитель числа $4N^2 + +3$. Число p нечётно и $p \neq 3$, так как N не делится на 3. Поскольку $(2N)^2 \equiv -3 \pmod 3$, то $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$. Согласно задаче 31.44 число p имеет вид $6k+1$. Но в таком случае число N должно делиться на p. Итак, числа N и $4N^2+3$ делятся на p. Следовательно, 3 делится на p, т.е. $p = 3$. Приходим к противоречию.

31.46. а) Ясно, что $p \equiv -1 \pmod 4$. Кроме того, $p \equiv 1 \pmod 3$. Действительно, n нечётно, поскольку число $2^{2m} - 1$ делится $2^m - 1$, а потому не может быть простым при $m > 1$. А так как $2^2 \equiv 1 \pmod 3$, то $2^n - 1 \equiv 1 \pmod 3$ для любого нечётного n. В результате получаем, что $p \equiv 7 \pmod{12}$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 31.43.

б) Ясно, что $p \equiv 1 \pmod 4$. Кроме того, $p \equiv -1 \pmod 3$. Действительно, n чётно, поскольку иначе число $2^n + 1$ делится $2 + 1 = 3$. А так как $2^2 \equiv 1 \pmod 3$, то $2^n + 1 \equiv -1 \pmod 3$ для любого нечётного n. В результате получаем, что $p \equiv 5 \pmod{12}$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 31.43.

31.47. Если $n = 2m$, то $2^n - 1$ делится на $2^2 - 1 = 3$. Но число $3^n - 1$ не делится на 3. Поэтому остаётся рассмотреть случай, когда $n = 2m + 1$. Поскольку $2^4 \equiv 2^2 \pmod{12}$, то $2^{2m} \equiv 4 \pmod{12}$, а значит, $2^n - 1 \equiv 7 \pmod{12}$. Любое простое число $p > 3$ при делении на 12 даёт остаток ± 1 или ± 5. У числа $2^n - 1$ должен быть простой делитель $p > 3$, дающий при делении на 12 остаток ± 5.

Предположим, что $3^n - 1$ делится на $2^n - 1$. Тогда, в частности, $3^n - 1$ делится на p. Следовательно, $3^{2(m+1)} = 3^{n+1} \equiv 3 \pmod p$. Таким образом, $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$. Но это противоречит квадратичному закону взаимности (см. задачу 31.43).

31.48. Ясно, что $g_0 = \sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)$. Половина чисел от 1 до $p-1$ являются квадратичными вычетами, а остальные — невычетами.

31.49. Ясно, что

$$g_1^2 = \sum_{k,l=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right)\varepsilon^{k+l} = \sum_{k,l=1}^{p-1} \left(\frac{kl}{p}\right)\varepsilon^{k+l}.$$

При фиксированном l отображение $k \mapsto kl$ является перестановкой остатков от деления на p, поэтому

$$\sum_{k,l} \left(\frac{kl}{p}\right)\varepsilon^{k+l} = \sum_{k,l} \left(\frac{kl^2}{p}\right)\varepsilon^{kl+l} = \sum_{k,l} \left(\frac{k}{p}\right)\varepsilon^{l(k+1)} =$$
$$= \sum_{l} \left(\frac{-1}{p}\right)\varepsilon^{0} + \sum_{k\neq -1} \left(\frac{k}{p}\right)\sum_{l}\varepsilon^{l(k+1)} =$$
$$= \left(\frac{-1}{p}\right)(p-1) + (-1)\sum_{k\neq -1} \left(\frac{k}{p}\right),$$

поскольку при фиксированном $k \neq -1$ остатки от деления чисел $l(k+1)$ на p образуют набор $1, 2, \ldots, p-1$ и $\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{p-1} = -1$. Ясно также, что $\left(\frac{-1}{p}\right) + \sum_{k\neq -1}\left(\frac{k}{p}\right) = g_0 = 0$.

31.50. Запишем тождество $g_1^2 = \left(\frac{-1}{p}\right)p$ для $p = 5$ и 7. Для $p = 5$ получим $g_1 = \pm\sqrt{5}$, а для $p = 7$ получим $g_1 = \pm i\sqrt{7}$. Легко видеть, что это и есть требуемые тождества с точностью до знака. Знак в обоих случаях легко выясняется.

31.51. Для каждого натурального числа $n \leqslant p-1$ существует единственное натуральное число $\bar{n} \leqslant p-1$, для которого $n\bar{n} \equiv 1 \pmod{p}$. При этом $\overline{p-1} = p-1$. Поэтому когда n пробегает числа от 1 до $p-2$, $\bar{n}$ тоже пробегает числа от 1 до $p-2$ (в другом порядке). Ясно также, что $n^2(1+\bar{n}) \equiv n^2 + n \equiv n(n+1) \pmod{p}$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{p-2}\left(\frac{n(n+1)}{p}\right) = \sum_{n=1}^{p-2}\left(\frac{n^2(1+\bar{n})}{p}\right) = \sum_{n=1}^{p-2}\left(\frac{1+\bar{n}}{p}\right) = g_0 - \left(\frac{1}{p}\right) = -1,$$

поскольку $g_0 = 0$ (задача 31.48).

31.52. а) Ясно, что $\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n+1}{p}\right) = 1$ в случаях RR и NN, а в случаях NR и RN это произведение равно -1. Следовательно, $RR+NN-RN-NR = \sum_{n=1}^{p-2}\left(\frac{n(n+1)}{p}\right)$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 31.51.

б) Количество вычетов среди чисел $2, 3, \ldots, p-1$ равно $RR+NR$, а количество невычетов равно $RN+NN$. Среди чисел $1, 2, 3, \ldots, p-1$ вычетов

и невычетов поровну. Кроме того, 1 — вычет. Поэтому $RN+NN = \frac{1}{2}(p-1)$ и $RR+NR = \frac{1}{2}(p-1)-1$.

Количество вычетов среди чисел 1, 2, ..., $p-2$ равно $RR+RN$, а количество невычетов равно $NR+NN$. Кроме того, $\left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = \varepsilon$. Поэтому $RR+RN = \frac{1}{2}(p-2-\varepsilon)$ и $NR+NN = \frac{1}{2}(p-2+\varepsilon)$.

в) Сложим равенства $RR+NN-RN-NR = 1$, $RR+RN = \frac{1}{2}(p-2-\varepsilon)$ и $NR+NN = \frac{1}{2}(p-2+\varepsilon)$. В результате получим $RR+NN = \frac{1}{2}(p-3)$. Вычитая из равенства $RR+RN = \frac{1}{2}(p-2-\varepsilon)$ равенство $RN+NN = \frac{1}{2}(p-1)$, получаем $RR-NN = -\frac{1}{2}(\varepsilon+1)$. Следовательно, $RR = \frac{p}{4} - \frac{\varepsilon+4}{4}$ и $NN = \frac{p}{4} + \frac{\varepsilon-2}{4}$. После этого легко находим $RN = \frac{p}{4} - \frac{\varepsilon}{4}$ и $NR = \frac{p}{4} + \frac{\varepsilon-2}{4}$.

Замечание. *Равенства из задачи б) не являются независимыми: сумма равенств с* ε *равна* $RR+NN+RN+NR = p-2$; *сумма равенств без* ε *та же самая.*

31.53. а) Непосредственно следует из задачи 31.36.

б) Если целое число r удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant r < \sqrt{p}$, то r может принимать больше $\sqrt{p}$ различных значений (поскольку r может принимать значение 0). Таким образом, количество различных допустимых пар (r, s) больше $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = p$. Следовательно, для каких-то двух пар числа $rx+s$ дают одинаковые остатки при делении на p.

в) Пусть $r_1x + s_1 \equiv r_2x + s_2 \pmod{p}$, т.е. $(r_1 - r_2)x \equiv (s_2 - s_1) \pmod{p}$. Положим $u = |r_1 - r_2|$ и $v = |s_1 - s_2|$. По построению числа u и v не могут быть одновременно равны нулю; кроме того, $u, v < \sqrt{p}$. Так как $ux \equiv \pm v \pmod{p}$, то $u^2x^2 \equiv v^2 \pmod{p}$. Но $x^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$, поэтому $0 \equiv u^2(x^2+1) \equiv u^2x^2 + u^2 \equiv v^2 + u^2 \pmod{p}$. С другой стороны, $u^2 + v^2 < (\sqrt{p})^2 + (\sqrt{p})^2 = 2p$, поэтому $u^2+v^2 = p$.

31.54. Согласно задаче 31.36 можно выбрать натуральное число q так, что $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Рассмотрим число $\alpha = q/p$. Пусть $C = \sqrt{p}$. Согласно задаче 17.12 можно выбрать натуральное число $x < C = \sqrt{p}$ и целое число y так, что $|x\alpha - y| \leqslant 1/C$, т.е. $\left|x\frac{q}{p} - y\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$. Положим $r = xq - yp$. Тогда $\frac{|r|}{p} = \left|x\frac{q}{p} - y\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$, поэтому $|r| \leqslant \sqrt{p}$. Следовательно, $0 < x^2 + r^2 < 2p$. С другой стороны, $x^2 + r^2 \equiv x^2 + x^2q^2 \equiv x^2(1+q^2) \equiv 0 \pmod{p}$. Поэтому $x^2 + r^2 = p$.

31.55. а) Согласно задаче 31.36 можно выбрать натуральное число x так, что $x^2 \equiv -1 \pmod p$, т.е. $x^2+1=mp$. Таким образом, мы нашли требуемое решение, даже с дополнительным условием $y=1$.

б) Пусть m_0 — наименьшее натуральное число, для которого имеет место равенство

$$x^2+y^2=m_0p. \qquad (1)$$

К x и y можно добавлять кратные p, поэтому можно считать, что $|x|<p/2$ и $|y|<p/2$. Следовательно, $x^2+y^2<p^2/2$, а значит, $m_0<p/2$.

Пусть $m_0>1$. Предположим, что m_0 делит x. Тогда m_0 не делит y, поскольку иначе $\dfrac{x^2+y^2}{m_0^2}=\dfrac{m_0p}{m_0^2}=\dfrac{p}{m_0}$ — целое число, а это противоречит тому, что $1<m_0<p/2$.

Выберем целые числа c и d так, чтобы числа $x_1=x-cm_0$ и $y_1=y-dm_0$ удовлетворяли неравенствам $|x_1|<m_0/2$ и $|y_1|<m_0/2$. Как только что было доказано, числа x_1 и y_1 не могут быть равны нулю одновременно. Таким образом, $0<x_1^2+y_1^2<2\dfrac{m_0^2}{4}=\dfrac{m_0}{2}m_0$ и $x_1^2+y_1^2\equiv x^2+y^2\equiv 0 \pmod{m_0}$. Следовательно,

$$x_1^2+y_1^2=m_0m_1, \qquad (2)$$

где $0<m_1<m_0/2$. Перемножим равенства (1) и (2). В результате получим

$$m_0^2m_1p=(x^2+y^2)(x_1^2+y_1^2)=(xx_1+yy_1)^2+(xy_1-yx_1)^2.$$

При этом

$$\begin{aligned}
xx_1+yy_1&=x(x-cm_0)+y(y-dm_0)=\\
&=x^2+y^2-m_0(cx+dy)=\\
&=m_0(p-cx-dy),\\
xy_1-yx_1&=x(y-dm_0)-y(x-cm_0)=\\
&=m_0(cy-dx).
\end{aligned}$$

Таким образом, $m_0^2m_1p=m_0^2(X^2+Y^2)$, где $X=p-cx-dy$ и $Y=cy-dx$. Сокращая на m_0^2, получаем $X^2+Y^2=m_1p$, причём $0<m_1<m_0/2$.

31.56. Предположим, что $p=x^2+y^2=a^2+b^2$. Сравнение $z^2\equiv -1 \pmod p$ имеет ровно два решения: $z\equiv \pm h \pmod p$. Поэтому $x\equiv \pm hy \pmod p$ и $a\equiv \pm hb \pmod p$. У чисел x и a можно поменять знаки, поэтому будем считать, что $x\equiv hy \pmod p$ и $a\equiv hb \pmod p$. Тогда $xb\equiv ya \pmod p$.

Ясно, что

$$p^2=(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(xa+yb)^2+(xb-ya)^2. \qquad (1)$$

Но $xb-ya\equiv 0 \pmod p$, поэтому $(xa+yb)^2$ делится на p^2. Итак, обе части равенства (1) можно сократить на p^2. В результате получим представление числа 1 в виде суммы двух квадратов целых чисел. Такое представление единственно, поэтому либо $xa+yb=0$, либо $xb-ya=0$. Числа x и y взаимно

простые, числа a и b тоже взаимно простые. Поэтому если $xb = ya$, то либо $x = a$ и $y = b$, либо $x = -a$ и $y = -b$. Если же $xa = -yb$, то либо $x = b$ и $y = -a$, либо $x = -b$ и $y = a$.

31.57. Пусть $a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ и $b = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$. Несложно проверить, что $ab = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$, где

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \\ z_2 &= x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\ z_3 &= x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4, \\ z_4 &= x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2. \end{aligned}$$

31.58. Числа x^2, где x — целое число и $0 \leqslant x \leqslant \frac{p-1}{2}$, дают разные остатки при делении на p. Действительно, если $x_1^2 \equiv x_2^2 \pmod{p}$, то $x_1 \pm x_2 \equiv 0 \pmod{p}$. Но в рассматриваемой ситуации $0 < x_1 + x_2 < p$. Аналогично числа $-1 - y^2$, где $0 \leqslant y \leqslant \frac{p-1}{2}$, дают разные остатки при делении на p. Количество чисел в обеих группах равно $p + 1$, поэтому какие-то два числа дают одинаковые остатки при делении на p. Эти числа должны быть из разных групп. Таким образом, $x^2 \equiv -1 - y^2 \pmod{p}$, т.е. $1 + x^2 + y^2 = mp$, причём $x^2,\ y^2 \leqslant \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Следовательно, $1 + x^2 + y^2 < 1 + 2\left(\frac{p}{2}\right)^2 < p^2$, а значит, $0 < m < p$.

31.59. а) Непосредственно следует из задачи 31.58: можно положить $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ и $x_4 = 0$.

б) Предположим, что число $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ чётно. Тогда количество нечётных чисел среди x_1, x_2, x_3 и x_4 чётно. Поэтому можно считать, что числа x_1 и x_2 одной чётности и числа x_3 и x_4 тоже одной чётности. Тогда тождество

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 = \frac{m}{2}p$$

показывает, что чётное число m можно заменить на меньшее число $m/2$.

в) Предположим, что m_0 — наименьшее из рассматриваемых чисел m, причём $m_0 \neq 1$. Согласно задаче б) число m_0 нечётно. Поэтому каждое число x_i можно представить в виде $x_i = m_0b_i + y_i$, где $|y_i| < m_0/2$. Действительно, если r_i — остаток от деления x_i на m_0, то одно из чисел r_i или $m_0 - r_i$ меньше m_0.

Числа x_1, x_2, x_3 и x_4 не могут все делиться на m_0, поскольку иначе $m_0p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ делится на m_0, а значит, p делится на m_0. Но $1 < m_0 < p$. Следовательно, хотя бы одно из чисел y_1, y_2, y_3 и y_4 отлично от нуля. Таким образом,

$$0 < y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 < 4\left(\frac{1}{2}m_0\right)^2 = m_0. \tag{1}$$

Кроме того, $y_i \equiv x_i \pmod{m_0}$, поэтому

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = m_0 p \equiv 0 \pmod{m_0}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем, что $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = m_0 m_1$, где $0 < m_1 < m_0$.

Умножим число $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = m_0 p$ на $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = m_0 m_1$ и воспользуемся тождеством из решения задачи 31.57. В результате получим равенство вида $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = m_0^2 m_1 p$. Несложно проверить, что каждое из чисел z_1, z_2, z_3, z_4 делится на m_0. Действительно,

$$z_1 = \sum x_i(x_i - b_i m_0) \equiv \sum x_i^2 \equiv m_0 p \equiv 0 \pmod{m_0},$$

$$z_2 = x_1(x_2 - b_2 m_0) - x_2(x_1 - b_1 m_0) + x_3(x_4 - b_4 m_0) - x_4(x_3 - b_3 m_0) =$$
$$= m_0(-x_1 b_2 + x_2 b_1 - x_3 b_4 + x_4 b_3) \equiv 0 \pmod{m_0}.$$

Для z_3 и z_4 доказательство аналогично.

Положим $t_i = z_i/m_0$. Тогда $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = m_1 p$, где $0 < m_1 < m_0$. Это противоречит предположению о том, что число m_0 наименьшее.

31.60. Согласно задаче 31.59 любое нечётное простое число можно представить в виде суммы четырёх квадратов целых чисел. Число 2 можно представить так: $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$. Остаётся воспользоваться результатом задачи 31.57.

31.61. Пусть $p - 1 = qd + r$, где $0 \leqslant r < d$. Тогда $1 \equiv x^{p-1} \equiv x^{qd+r} \equiv x^r \pmod{p}$. Но d — это наименьшее натуральное число, для которого $x^d \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, $r = 0$.

31.62. Решение аналогично решению задачи 31.61.

31.63. а) Пусть остаток x принадлежит показателю d. Тогда d остатков $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{d-1}$ различны и все они удовлетворяют уравнению $X^d \equiv 1 \pmod{p}$. Поэтому никаких других остатков, удовлетворяющих этому уравнению степени d, нет (задача 31.33). Любой остаток y, принадлежащий показателю d, удовлетворяет уравнению $y^d \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, y — это один из остатков $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{d-1}$. Но x^k принадлежит показателю d тогда и только тогда, когда числа d и k взаимно просты. Действительно, остатки $x^k, x^{2k}, \ldots, x^{(d-1)k}$ не равны 1 тогда и только тогда, когда числа k, $2k, \ldots, (d-1)k$ не делятся на d.

Мы доказали, что если к показателю d принадлежит хотя бы один остаток, то ему принадлежит ровно $\varphi(d)$ остатков.

б) Каждый остаток x принадлежит некоторому показателю d, делящему $p - 1$. Согласно задаче а) показателю d принадлежит не более $\varphi(d)$ остатков. Поэтому $p - 1 \leqslant \sum \varphi(d)$, где суммирование ведётся по всем числам d, делящим $p - 1$. При этом если хотя бы одному показателю d, делящему $p - 1$, принадлежит менее $\varphi(d)$ остатков, то неравенство строгое: $p - 1 < \sum \varphi(d)$. С другой стороны, согласно задаче 31.10 $p - 1 = \sum \varphi(d)$. Поэтому каждому показателю d, делящему $p - 1$, принадлежит ровно $\varphi(d)$ остатков.

в) Непосредственно следует из задачи б): достаточно положить $d = p - 1$.

31.64. а) Предположим сначала, что $n = p^2q$. Пусть $x = pq$. Тогда $x \not\equiv 0 \pmod{n}$, но $x^{d+1} \equiv 0 \pmod{n}$ для любого натурального числа d.

Предположим теперь, что $n = p_1 \dots p_k$, где $p_1, \dots, p_k$ — попарно различные простые числа. Тогда если число $x^{d+1} - x$ делится на $p_1, \dots, p_k$, то оно делится и на n. Если число p простое, то согласно малой теореме Ферма $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, поэтому $x^{(p-1)m+1} \equiv x \pmod{p}$. Значит, $x^{d+1} \equiv x \pmod{p}$ для любого числа d, делящегося на $p - 1$. Таким образом, в качестве d можно взять $\text{НОК}(p_1 - 1, \dots, p_k - 1)$.

б) В решении задачи а) уже доказано, что если $d = \text{НОК}(p_1 - 1, \dots, p_k - 1)$, то $x^{d+1} \equiv x \pmod{n}$ для всех x. Остаётся доказать, что если $x^{d+1} \equiv x \pmod{n}$ для всех целых x, то d делится на $\text{НОК}(p_1 - 1, \dots, p_k - 1)$. Для этого достаточно доказать, что d делится на каждое из чисел $p_1 - 1, \dots, p_k - 1$.

Если $x^{d+1} \equiv x \pmod{n}$, то $x^{d+1} \equiv x \pmod{p_i}$. Пусть x_i — первообразный корень по модулю p_i. В таком случае $x_i^r \equiv 1 \pmod{p_i}$ тогда и только тогда, когда r делится на $p_i - 1$. Если $x_i^{d+1} \equiv x_i \pmod{p_i}$, то

$$x_i^d \equiv x_i^{d+p_i-1} \equiv x_i^{d+1+(p_i-2)} \equiv x_i \cdot x_i^{p_i-2} \equiv x_i^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}.$$

Поэтому d делится на $p_i - 1$.

31.65. а) Пусть q — нечётный простой делитель числа $a^p - 1$. Тогда $a^p \equiv 1 \pmod{q}$. Поэтому согласно задаче 31.62 показатель d числа a по модулю q является делителем числа p, т.е. $d = 1$ или $d = p$. Если $d = 1$, то $a \equiv 1 \pmod{q}$, поэтому q — делитель числа $a - 1$. Если $d = p$, то согласно задаче 31.61 p — делитель числа $q - 1$. Учитывая, что число $q - 1$ чётно, получаем $q - 1 = 2px$.

б) Пусть q — нечётный простой делитель числа $a^p + 1$. Тогда $a^p \equiv -1 \pmod{q}$. Поэтому $a^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$. Следовательно, показатель d числа a по модулю q является делителем числа $2p$. Ясно, что $a \not\equiv 1 \pmod{q}$ и $a^p \not\equiv 1 \pmod{q}$, поэтому $d = 2$ или $d = 2p$. Если $a^2 \equiv 1 \pmod{q}$, то $a \equiv -1 \pmod{q}$, т.е. q — делитель числа $a + 1$. Если $d = 2p$, то $2p$ — делитель числа $q - 1$. Поэтому $q - 1 = 2px$.

31.66. Прежде всего заметим, что такие простые числа есть: согласно задаче 31.65 а) все простые делители числа $2^p - 1$ имеют такой вид. Предположим, что существует лишь конечное число простых чисел вида $2px + 1$, а именно, числа $p_1, \dots, p_n$. Рассмотрим число $(p_1 \dots p_n)^p - 1$. Согласно задаче 31.65 а) это число имеет простой делитель вида $2px + 1$. Ясно также, что число $(p_1 \dots p_n)^p - 1$ взаимно просто с $p_1, \dots, p_n$. Мы получили простое число вида $2px + 1$, отличное от $p_1, \dots, p_n$, что противоречит предположению.

31.67. Пусть q — простой делитель числа $2^{2^n} + 1$. Тогда $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{q}$, поэтому $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{q}$. Согласно задаче 31.62 показатель d числа 2 по модулю q является делителем числа 2^{n+1}. Следовательно, $d = 2^{n+1}$, поскольку $2^{2^n} \not\equiv 1 \pmod{q}$. Таким образом, число 2^{n+1} является делителем числа $q - 1$.

31.68. При $n > 1$ числа 3 и p взаимно простые. Согласно задаче 31.46 б) $\left(\dfrac{3}{p}\right) = -1$, поэтому $3^{2^{n-1}} \equiv -1 \pmod{2^n+1}$. Показатель числа 3 по модулю $2^n + 1$ является делителем числа 2^n, причём он больше 2^{n-1}. Следовательно, показатель числа 3 по модулю $2^n + 1$ равен 2^n.

31.69. Если n делится на $p-1$, то $a^n \equiv 1 \pmod{p}$ для любого a, взаимно простого с p. Значит, $S \equiv p - 1 \equiv -1 \pmod{p}$.

Предположим теперь, что n не делится на $p-1$. Пусть x — первообразный корень по модулю p. Тогда согласно задаче 31.62 $x^n \not\equiv 1 \pmod{p}$. Число x взаимно просто с p, поэтому набор остатков при делении на p чисел x, $2x$, $3x$, ..., $(p-1)x$ совпадает с набором 1, 2, ..., $p-1$. Следовательно, $S \equiv x^n S \pmod{p}$. Учитывая, что $x^n \not\equiv 1 \pmod{p}$, получаем $S \equiv 0 \pmod{p}$.

31.70. Докажем сначала, что если $r \geqslant 1$, то $(1+km^r)^m \equiv 1 \pmod{m^{r+1}}$. Действительно, $(1+km^r)^m = 1+\binom{m}{1}km^r + \binom{m}{2}k^2m^{2r} + \ldots$ В этой сумме слагаемое $\binom{m}{1}km^r = km^{r+1}$ делится на m^{r+1}. Последующие слагаемые делятся на m^{2r}, поэтому они тоже делятся на m^{r+1}. Таким образом, $(1+km^r)^m = 1 + k_1m^2$, $(1+km^r)^{m^2} = (1+k_1m^2)^m = 1 + k_2m^3$ и т.д.

31.71. Если x — первообразный корень по модулю p^α, то не существует натурального числа $s < p^{\alpha-1}(p-1)$, для которого $x^s \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Предположим, что $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ для некоторого натурального $t < p-1$. Тогда согласно задаче 31.70 $x^{tp^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Получено противоречие, поэтому x — первообразный корень по модулю p.

31.72. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого $x^k \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Тогда $p^{\alpha-1}(p-1)$ делится на k (задача 31.12). Ясно, что $x^k \equiv 1 \pmod{p}$, поэтому k делится на $p-1$. Таким образом, $k = p^\beta(p-1)$, где $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha-1$. Предположим, что $\beta \leqslant \alpha-2$. Тогда, возведя обе части сравнения $x^{p^\beta(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ в степень $p^{\alpha-2-\beta}$, получим $x^{p^{\alpha-2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, что противоречит условию. Следовательно, $\beta = p-1$, т.е. $k = p^{\alpha-1}(p-1) = \varphi(p^\alpha)$.

31.73. Предположим, что числа x и $x+p$ не являются первообразными корнями по модулю p^2. Оба эти числа являются первообразными корнями по модулю p, поэтому согласно задаче 31.72 $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ и $(x+p)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Следовательно, число $(x+p)^{p-1} - x^{p-1} = (p-1)x^{p-2}p + \binom{p-1}{2}x^{p-3}p^2 + \ldots$ делится на p^2, а значит, $p(p-1)x^{p-2}$ делится на p^2, т.е. $(p-1)x^{p-2}$ делится на p. Но это противоречит тому, что $p-1$ и x взаимно просты с p.

31.74. Числа x и p взаимно простые, поэтому согласно малой теореме Ферма $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, т.е. $x^{p-1} = 1 + pt$. Наименьшее натуральное k, для которого $x^k \equiv 1 \pmod{p^2}$, равно $p(p-1)$, поэтому t не делится на p.

Возведём равенство $x^{p-1} = 1 + pt$ в степень $n = p^{\alpha-2}$, где $\alpha > 2$. В результате получим

$$x^{p^{\alpha-2}(p-1)} = (1+pt)^n = 1 + npt + \binom{n}{2}p^2t^2 + \ldots + \binom{n}{n}p^nt^n.$$

Согласно задаче 14.30 $\binom{n}{s}p^s$ делится на p^α при $s \geqslant 2$. С другой стороны, $npt = p^{\alpha-1}t$ не делится на p^α. Поэтому $x^{p^{\alpha-2}(p-1)} \equiv 1 + npt \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$. Значит, согласно задаче 31.72 x — первообразный корень по модулю p^α.

31.75. Ясно, что $\varphi(2p^\alpha) = \varphi(p^\alpha)$. Пусть x — первообразный корень по модулю p^α. Заменив при необходимости x на $x + p^\alpha$, можно считать, что x нечётно. Достаточно доказать, что $x^k \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ тогда и только тогда, когда $x^k \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$. Если $x^k \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ и $x^k \equiv 1 \pmod{2}$, то $x^k \equiv 1 \pmod{2p^\alpha}$. Утверждение в обратную сторону очевидно.

31.76. Числа 1 и 3 являются первообразными корнями по модулям 2 и 4. Остаётся доказать, что если $n \geqslant 3$, то примитивного корня по модулю 2^n не существует.

Поскольку $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$, достаточно доказать, что $x^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n}$ при $n \geqslant 3$ для любого нечётного x. Пусть $x = 1+2t$. Тогда $x^2 = 1+4t(t+1) \equiv 1 \pmod{8}$. При $n = 3$ требуемое утверждение доказано. Предположим теперь, что $x^{2^{n-2}} = 1 + 2^nt$, где $n \geqslant 3$. Тогда $x^{2^{n-1}} = (1+2^nt)^2 = 1 + 2^{n+1}t + 2^{2n}t^2 \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

31.77. Предположим, что x — число, взаимно простое с m. Согласно задаче 31.14 $x^{L(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, где $L(m)$ — обобщённая функция Эйлера. Поэтому достаточно доказать, что если число m не имеет указанного в условии задачи вида, то $L(m) < \varphi(m)$.

Если число m имеет два различных нечётных простых делителя p_1 и p_2, то числа $p_1 - 1$ и $p_2 - 1$ имеют нетривиальный общий делитель. Поэтому $\text{НОК}(p_1 - 1, p_2 - 1) < (p_1 - 1)(p_2 - 1)$, а значит, $L(m) < \varphi(m)$.

Если $m = 2^\alpha p^\beta$, где $\alpha \geqslant 2$, $\beta \geqslant 1$ и p — нечётное простое число, то $\varphi(m) = 2^{\alpha-1}p^{\beta-1}(p-1)$ и $L(m) = \text{НОК}\big(2^{\alpha-1}, p^{\beta-1}(p-1)\big)$. Числа $2^{\alpha-1}$ и $p-1$ имеют общий делитель 2, поэтому $L(m) < \varphi(m)$.

31.78. Для каждого натурального числа n можно выбрать натуральное число k так, что $2^{2k-2} < n \leqslant 2^{2k}$. Тогда

$$\pi(n)/n \leqslant \pi(2^{2k})/n < \pi(2^{2k})/2^{2k-2} = 4\pi(2^{2k})/2^{2k}.$$

Поэтому достаточно доказать, что $\lim_{k\to\infty} \pi(2^{2k})/2^{2k} = 0$.

Каждое простое число p, удовлетворяющее неравенствам $2^{m-1} < p \leqslant 2^m$, является делителем биномиального коэффициента $\binom{2^m}{2^{m-1}} = \dfrac{(2^m)!}{\left((2^{m-1})!\right)^2}$, поэтому

$$2^{2^m} \geqslant \binom{2^m}{2^{m-1}} \geqslant \prod_{2^{m-1}<p\leqslant 2^m} p \geqslant (2^{m-1})^{\pi(2^m)-\pi(2^{m-1})}.$$

Следовательно,
$$\pi(2^m) - \pi(2^{m-1}) \leqslant 2^m/(m-1). \qquad (1)$$
Просуммируем неравенства (1) для $m = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2k$ и воспользуемся тем, что в этом случае $m - 1 \geqslant k$, т.е. $2^m/(m-1) \leqslant 2^m/k$. В результате получим
$$\pi(2^m) - \pi(2^{m-1}) \leqslant \frac{2^{k+1} + 2^{k+2} + \ldots + 2^{2k}}{k} \leqslant \frac{2^{2k+1}}{k}.$$
Ясно также, что $\pi(2^k) \leqslant 2^k$. Поэтому
$$\frac{\pi(2^{2k})}{2^{2k}} \leqslant \frac{2^k}{2^{2k}} + \frac{2^{2k+1}}{k2^{2k}} = \frac{1}{2^k} + \frac{2}{k}.$$

31.79. Согласно задаче 14.31, если p^m делит $\binom{n}{k}$, то $p^m \leqslant n$. Поэтому $\binom{n}{k} = \prod_{p \leqslant n} p^m \leqslant n^{\pi(n)}$. Запишем такие неравенства для всех биномиальных коэффициентов с фиксированным n и сложим их. В результате получим
$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant (n+1)n^{\pi(n)},$$
т.е. $\pi(n) \geqslant \dfrac{n \ln 2 - \ln(n+1)}{\ln n}$. Поэтому достаточно доказать, что если $n \geqslant 201$, то $n \ln 2 - \ln(n+1) > \dfrac{2}{3}n$, т.е. $\ln 2 - \dfrac{2}{3} > \dfrac{\ln(n+1)}{n}$. При $x > 2$ производная функции $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ отрицательна, поэтому указанное неравенство достаточно проверить для $n = 201$. Это делается непосредственными вычислениями: $\ln 2 - \dfrac{2}{3} \approx 0{,}02648$ и $\dfrac{\ln 202}{201} \approx 0{,}02641$.

31.80. Каждое число p, удовлетворяющее неравенствам $n < p \leqslant 2n$, является делителем биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$, поэтому
$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leqslant \prod_{n<p\leqslant 2n} p \leqslant \binom{2n}{n} < 2^{2n}.$$
Прологарифмировав это неравенство, получаем
$$\pi(2n) - \pi(n) < \frac{2n \ln 2}{\ln n}. \qquad (1)$$
Предположим, что для некоторого n уже доказано неравенство $\pi(n) < 3 \ln 2 \dfrac{n}{\ln n}$. Тогда из неравенства (1) следует, что
$$\pi(2n) < 3\ln 2 \frac{n}{\ln n} + 2 \ln 2 \frac{n}{\ln n} = 5 \ln 2 \frac{n}{\ln n}.$$
Мы хотим доказать неравенство $\pi(2n) < 3 \ln 2 \dfrac{2n}{\ln(2n)}$. Для этого достаточно доказать неравенство
$$5 \ln 2 \frac{n}{\ln n} \leqslant 3 \ln 2 \frac{2n}{\ln(2n)}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{5}{\ln n} \leqslant \frac{6}{\ln 2 + \ln n}.$$

Последнее неравенство переписывается в виде $\ln n \geqslant 5 \ln 2$. Оно выполняется при $n \geqslant 2^5$.

Чтобы можно было применить индукцию, нужно ещё доказать неравенство

$$\pi(2n+1) < 3 \ln 2 \frac{2n+1}{\ln(2n+1)}.$$

Заметим, что из неравенства (1) и очевидного неравенства $\pi(2n+1) \leqslant \pi(2n) + 1$ следует, что

$$\pi(2n+1) < \pi(n) + \frac{2n \ln 2}{\ln n} + 1 < \frac{3n \ln 2}{\ln n} + \frac{2n \ln 2}{\ln n} + 1.$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство

$$5 \ln 2 \frac{n}{\ln n} + 1 < 3 \ln 2 \frac{2n+1}{\ln(2n+1)},$$

т.е.

$$5 + \frac{\ln n}{n \ln 2} < 3 \frac{2n+1}{n} \frac{\ln n}{\ln(2n+1)}.$$

Ясно, что $3\dfrac{2n+1}{n} > 6$, поэтому достаточно доказать неравенство

$$5 + \frac{\ln n}{n \ln 2} < 6 \frac{\ln n}{\ln(2n+1)}.$$

Если $n \geqslant 55$, то выражение в правой части больше $5,1053$, а выражение в левой части меньше $5,1052$.

Чтобы завершить доказательство, нужно непосредственно проверить, что утверждение верно для всех n от 55 до 109. После этого можно воспользоваться тем, что если утверждение верно для некоторого n, то оно верно для $2n$ и $2n+1$.

Глава 32.

Многочлены II

Основная теорема алгебры заключается в том, что любой многочлен имеет по крайней мере один (комплексный) корень. Из этого с помощью теоремы Безу (задача 10.2) легко выводится, что многочлен степени n имеет ровно n корней с учётом их кратностей.

У основной теоремы алгебры есть много разных доказательств. Одно из возможных использует следующую теорему Руше, которая имеет и самостоятельный интерес.

32.1. Пусть f и g — многочлены и γ — замкнутая несамопересекающаяся кривая на комплексной плоскости. Докажите, что если

$$\bigl|f(z) - g(z)\bigr| < \bigl|f(z)\bigr| + \bigl|g(z)\bigr| \qquad (1)$$

при всех $z \in \gamma$, то внутри кривой γ расположено одинаковое количество корней многочленов f и g с учётом их кратностей (*Руше*).

32.2. Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где a_i — комплексные числа. Докажите, что тогда внутри круга $|z| = 1 + \max\limits_i |a_i|$ расположено ровно n корней многочлена f (с учётом их кратностей).

32.1. Разделение корней

Здесь мы обсудим различные утверждения, позволяющие вычислить или хотя бы оценить сверху количество вещественных корней многочлена, расположенных на интервале (a, b). Формулировки таких теорем часто используют понятие *числа перемен знака* в последовательности a_0,

$a_1, \dots, a_n$, где $a_0 a_n \neq 0$. Это число определяется следующим образом. Все нулевые члены рассматриваемой последовательности исключаются, а для оставшихся ненулевых членов вычисляется количество пар соседних членов разного знака.

32.3. Пусть $N(x)$ — число перемен знака в последовательности $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$, где f — многочлен степени n. Докажите, что тогда число корней многочлена f (с учётом их кратности), заключённых между a и b, где $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ и $a < b$, не превосходит $N(a) - N(b)$, причём число корней может отличаться от $N(a) - N(b)$ лишь на чётное число (*Фурье–Бюдан*).

32.4. Докажите, что количество положительных корней многочлена $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n$ (*правило Декарта*).

32.5. Докажите, что если в многочлене отсутствуют $2m$ последовательных членов (т.е. коэффициенты при этих членах равны нулю), то у этого многочлена не менее $2m$ мнимых корней, а если отсутствуют $2m + 1$ последовательных членов, то в случае, когда их заключают члены разного знака, многочлен имеет не менее $2m$ мнимых корней, а в случае, когда их заключают члены одного знака, многочлен имеет не менее $2m + 2$ мнимых корней (*де Гуа*).

Рассмотрим многочлены $f(x)$ и $f_1(x) = f'(x)$. Будем искать наибольший общий делитель многочленов f и f_1 по алгоритму Евклида:

$$\begin{aligned} f &= q_1 f_1 - f_2, \\ f_1 &= q_2 f_2 - f_3, \\ \dots&\dots \\ f_{n-2} &= q_{n-1} f_{n-1} - f_n, \\ f_{n-1} &= q_n f_n. \end{aligned}$$

Последовательность $f, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$ называют *последовательностью Штурма* многочлена f.

32.6. Пусть $w(x)$ — число перемен знака в последовательности $f(x)$, $f_1(x), \dots, f_n(x)$. Докажите, что количество корней многочлена f (без учёта их кратности), заключённых между a и b, где $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ и $a < b$, в точности равно $w(a) - w(b)$ (*Штурм*).

32.7. Докажите, что корни производной многочлена P принадлежат выпуклой оболочке корней самого многочлена P (*Гаусс–Люка*) .

32.8. Пусть $P(z) = (z-x_1)\cdot\ldots\cdot(z-x_n)$, где $x_1 < \ldots < x_n$. Докажите, что если некоторый корень x_i заменяется на $x_i' \in (x_i, x_{i+1})$, то все корни производной многочлена P увеличиваются.

32.2. Неприводимые многочлены

Иногда возникает потребность рассматривать многочлены не только с действительными или целыми коэффициентами, но и с коэффициентами в произвольном поле или коммутативном кольце. Кольца и поля — это множества, в которых есть операции сложения и умножения. В кольцах, в отличие от полей, нет операции деления. Например, действительные или рациональные числа образуют поле, а целые числа — только кольцо, потому что отношение двух целых чисел не всегда является целым числом.

Точные определения таковы. *Кольцо* K — это множество, в котором для любых двух элементов x и y определены их сумма $x+y$ и произведение xy (они тоже являются элементами K). Эти операции обладают следующими свойствами:

- $x + y = y + x$ (*коммутативность* сложения);
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность*);
- в K существует *нулевой элемент* 0, для которого $x + 0 = x$ для любого x из K;
- для любого элемента x из K существует *противоположный элемент* $-x$, для которого $x + (-x) = 0$;
- $x(y + z) = xy + xz$ и $(x + y)z = xz + yz$ (*дистрибутивность* умножения относительно сложения).

Кольцо K называют *коммутативным*, если умножение в нём коммутативно, т.е. $xy = yx$ для любых элементов x и y из K.

Кольцо K называют *ассоциативным*, если умножение в нём ассоциативно, т.е. $(xy)z = x(yz)$ для любых x, y и z из K.

Элемент 1 кольца K называют *единицей*, если $1x = x1 = x$ для любого элемента x кольца K.

Говоря о кольцах, мы всегда будем подразумевать коммутативные ассоциативные кольца с единицей.

Полем называют коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором для каждого элемента $x \neq 0$ существует *обратный* элемент x^{-1}, для которого $xx^{-1} = 1$.

Поле k называют *подполем* поля K (обозначение: $k \subset K$; K при этом называют *расширением* поля k), если каждый элемент поля k одновременно является элементом поля K, причём операции сложения и умножения для элементов k будут теми же самыми, если мы рассмотрим их как элементы K; нулевой элемент и единица в k те же самые, что и в K. Например, поле рациональных чисел является подполем поля действительных чисел.

Пусть f и g — многочлены с коэффициентами из поля k. Говорят, что многочлен f *делится* на многочлен g, если $f = gh$, где h — некоторый многочлен (с коэффициентами из поля k).

Многочлен d называют *общим делителем* многочленов f и g, если f и g делятся на d. Общий делитель d многочленов f и g называют *наибольшим общим делителем* многочленов f и g, если он делится на любой общий делитель многочленов f и g. Ясно, что наибольший общий делитель определён однозначно с точностью до умножения на ненулевой элемент поля k.

Наибольший общий делитель $d = (f, g)$ многочленов f и g можно найти с помощью следующего *алгоритма Евклида.* Для определённости будем считать, что $\deg f \geqslant \deg g$. Пусть r_1 — остаток от деления f на g, r_2 — остаток от деления g на r_1, ..., r_{k+1} — остаток от деления r_{k-1} на r_k. Степени многочленов r_i строго убывают, поэтому для некоторого n получим $r_{n+1} = 0$, т.е. r_{n-1} делится на r_n. При этом f и g делятся на r_n, так как на r_n делятся многочлены $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots$ Кроме того, если f и g делятся на некоторый многочлен h, то r_n делится на h, так как на h делятся многочлены $r_1, r_2, \ldots$ Таким образом, $r_n = (f, g)$.

Непосредственно из алгоритма Евклида вытекают важные следствия, которые мы сформулируем отдельно.

а) Если d — наибольший общий делитель многочленов f и g, то найдутся такие многочлены a и b, что $d = af + bg$.

б) Пусть f и g многочлены над полем $k \subset K$. Тогда если у многочленов f и g есть нетривиальный общий делитель над полем K, то у них есть нетривиальный общий делитель и над полем k.

Многочлен f с коэффициентами из кольца k называют *приводимым* над k, если $f = gh$, где g и h — многочлены положительной степени с коэффициентами из кольца k. В противном случае многочлен f назы-

вают *неприводимым* над k.

Пусть $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_s$ — некоторое разложение многочлена f над полем k на множители $f_1, \ldots, f_s$, являющиеся многочленами над полем k. От разложения на множители с произвольными коэффициентами можно перейти к разложению со старшим коэффициентом 1. В самом деле, если $f_i(x) = a_i x^i + \ldots$ — многочлен над полем k, то $g_i = a_i^{-1} f_i$ — тоже многочлен над полем k, причём его старший коэффициент равен 1. Поэтому разложение $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_s$ можно заменить на разложение $f = a g_1 \cdot \ldots \cdot g_s$, где $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_s$. Мы не будем различать два разложения такого вида, отличающиеся лишь порядком множителей.

32.9. Докажите, что если многочлен qr делится на неприводимый многочлен p, то один из многочленов q и r делится на p.

32.10. Пусть k — поле. Докажите, что у многочлена $f(x)$ с коэффициентами из k есть разложение на неприводимые множители, причём это разложение единственно.

Для кольца целых чисел неприводимость многочленов определяется точно так же, как и в случае поля, т.е. многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *неприводим* над кольцом целых чисел, если его нельзя представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами. Но в случае кольца целых чисел не всегда можно поделить коэффициенты многочлена на старший коэффициент; можно лишь поделить коэффициенты на наибольший общий делитель всех коэффициентов. Это приводит к следующему определению. Пусть $f(x) = \sum a_i x^i$, где a_i — целые числа. Наибольший общий делитель коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$ называют *содержанием* многочлена f. Содержание многочлена f обозначают $\mathrm{cont}(f)$. Ясно, что $f(x) = \mathrm{cont}(f) g(x)$, где g — многочлен с целыми коэффициентами и с содержанием 1.

32.11. Докажите, что $\mathrm{cont}(fg) = \mathrm{cont}(f)\,\mathrm{cont}(g)$ (*лемма Гаусса*).

32.12. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами неприводим над кольцом целых чисел тогда и только тогда, когда он неприводим над полем рациональных чисел.

32.13. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём для некоторого простого числа p коэффициент a_n не делится на p, коэффициенты $a_0, \ldots, a_{n-1}$ делятся на p, но коэффициент a_0 не делится на p^2. Тогда f — неприводимый многочлен (*признак Эйзенштейна*).

32.14. Докажите, что если p — простое число, то многочлен $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим.

32.3. Симметрические многочлены

Многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ называют *симметрическим*, если для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняется равенство

$$f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Основным примером симметрических многочленов служат *элементарные* симметрические многочлены

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$; удобно считать, что $\sigma_0 = 1$ и $\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ при $k > n$.

Элементарные симметрические многочлены можно задавать с помощью *производящей функции*

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + tx_i).$$

Если $x_1, \dots, x_n$ — корни многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, то $\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = (-1)^k a_k$.

Другим примером симметрических многочленов служат *полные однородные* симметрические многочлены

$$p_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}.$$

Им соответствует производящая функция

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 - tx_i)^{-1}.$$

Важным примером симметрических многочленов служат также *степенные суммы*

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + \dots + x_n^k.$$

Им соответствует производящая функция

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i (1 - tx_i)^{-1}.$$

Иногда используются *мономиальные* симметрические многочлены

$$m_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}^{i_n}.$$

32.15. Докажите, что если $a+b+c+d=2$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2$, то

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-d}=2.$$

* * *

32.16. Докажите, что

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r p_{n-r}=0.$$

32.17. Докажите, что

$$np_n=\sum_{r=1}^{n}s_r p_{n-r}.$$

32.18. Пусть $s_k=x_1^k+\ldots+x_n^k$. Докажите, что

$$n\sigma_n=s_1\sigma_{n-1}-s_2\sigma_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}s_n\sigma_0$$

(*формулы Ньютона*).

32.19. Сумма трёх целых чисел x, y, z равна нулю. Докажите, что $2(x^4+y^4+z^4)$ — квадрат целого числа.

32.20. Целые числа $x_1, \ldots x_5$ таковы, что $x_1+\ldots+x_5$ и $x_1^2+\ldots+x_5^2$ делятся на нечётное число n. Докажите, что $x_1^5+\ldots+x_5^5-5x_1\ldots x_5$ тоже делится на n.

* * *

32.21. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена x^3+px+q. Вычислите $s_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$ для $n=1, 2, \ldots, 10$.

32.22. Пусть $x_1=b+c+d$, $x_2=-(a+b+c)$, $x_3=a-d$, $y_1=a+c+d$, $y_2=-(a+b+d)$ и $y_3=b-c$. Пусть, далее, $t^3+p_1t+q_1$ и $t^3+p_2t+q_2$ — многочлены с корнями x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 соответственно. Докажите, что $p_1=p_2$ тогда и только тогда, когда $ad=bc$.

32.23. Пусть $f_{2n}=(b+c+d)^{2n}+(a+b+c)^{2n}+(a-d)^{2n}-(a+ +c+d)^{2n}-(a+b+d)^{2n}-(b-c)^{2n}$, причём $ad=bc$. Докажите, что $f_2=f_4=0$ и $64f_6f_{10}=45f_8^2$ (*тождества Рамануджана*).

* * *

32.24. а) Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — симметрический многочлен. Докажите, что существует многочлен $g(y_1, \dots, y_n)$, для которого $f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. При этом многочлен g единствен (*основная теорема о симметрических многочленах*).

б) Докажите, что если $f(x_1, \dots, x_n)$ — симметрический многочлен с целыми коэффициентами, то $f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где g — тоже многочлен с целыми коэффициентами.

Из основной теоремы о симметрических многочленах следует, что если $x_1, \dots, x_n$ — корни многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, то величина

$$D = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2,$$

представляющая собой симметрический многочлен от $x_1, \dots, x_n$, полиномиально выражается через $a_1, \dots, a_n$. Эту величину называют *дискриминантом* многочлена.

Назовём многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ *кососимметрическим*, если

$$f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots),$$

т.е. при перестановке любых двух переменных x_i и x_j многочлен меняет знак. Примером кососимметрического многочлена служит $\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$.

32.25. Докажите, что любой кососимметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n),$$

где g — симметрический многочлен.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — *разбиение*, т.е. упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Положим $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Будем считать, что $\lambda \geqslant \mu$, если $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \dots + \mu_k$ при $k = 1, 2, \dots, n$.

Каждому набору λ можно сопоставить однородный симметрический многочлен

$$M_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_{\sigma(n)}}. \quad (1)$$

Степень этого многочлена равна $|\lambda|$.

Например, если $\lambda = (1, \ldots, 1)$, то $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. В самом деле, сумма (1) в этом случае состоит из $n!$ слагаемых $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. А если $\lambda = (n, 0, \ldots, 0)$, то $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^n \cdot \ldots \cdot x_n^n)/n$. В самом деле, сумма (1) в этом случае состоит из $(n-1)!$ слагаемых x_1^n, $(n-1)!$ слагаемых x_2^n и т.д.

32.26. Докажите, что неравенство

$$M_\lambda(x) \geqslant M_\mu(x) \tag{2}$$

выполняется при всех $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с положительными $x_1, \ldots, x_n$ в том и только том случае, когда $|\lambda| = |\mu|$ и $\lambda \geqslant \mu$. При этом равенство достигается лишь в том случае, когда $\lambda = \mu$ и $x_1 = \ldots = x_n$ (*Мюрхед*).

32.4. Многочлены Чебышёва

32.27. Докажите, что $\cos n\varphi$ полиномиально выражается через $\cos\varphi$, т. е. существует такой многочлен $T_n(x)$, что $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos\varphi$.

Многочлены $T_n(x)$ из задачи 32.27 называют *многочленами Чебышёва*.

32.28. Вычислите многочлены Чебышёва $T_n(x)$ при $n \leqslant 5$.

32.29. Докажите, что $|T_n(x)| \leqslant 1$ при $x \leqslant 1$.

32.30. Докажите, что $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — целые числа.

32.31. Пусть $P_n(x) = x^n + \ldots$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, причём $|P_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ при $|x| \leqslant 1$. Тогда $P_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$. (Иными словами, многочлен $\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ — наименее уклоняющийся от нуля на интервале $[-1, 1]$ многочлен степени n со старшим коэффициентом 1.)

32.32. Докажите, что многочлены Чебышёва $T_n(x)$ и $T_m(x)$ обладают следующим свойством: $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$.

32.33. а) Пусть $n = 2k + 1$. Докажите, что число $\cos\left(\dfrac{2l\pi}{n}\right)$ для любого целого l является корнем многочлена $T_{k+1}(x) - T_k(x)$.

б) Пусть $n = 2k$. Докажите, что число $\cos\left(\dfrac{2l\pi}{n}\right)$ для любого целого l является корнем многочлена $T_{k+1}(x) - T_{k-1}(x)$.

32.34. а) Вычислите многочлены $T_{k+1}(x) - T_k(x)$ при $k \leqslant 4$.

б) Докажите, что числа $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{4\pi}{5}$ являются корнями многочлена $4x^2 + 2x - 1$.

в) Докажите, что числа $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ и $\cos\frac{6\pi}{7}$ являются корнями многочлена $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$.

г) Докажите, что числа $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$ являются корнями многочлена $8x^3 - 6x + 1$.

В некоторых случаях вместо многочлена $T_n(x)$ удобно рассматривать многочлен $P_n(x) = 2T_n(x/2)$ со старшим коэффициентом 1. Многочлены $P_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$, поэтому $P_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, то $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$ и $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$. Поэтому $P(z + z^{-1}) = 2T_n(\cos\varphi) = 2\cos n\varphi = z^n + z^{-n}$, т. е. многочлен $P_n(x)$ соответствует полиномиальному выражению величины $z^n + z^{-n}$ через $z + z^{-1}$.

32.35. С помощью многочленов P_n докажите следующее утверждение: если оба числа α и $\cos(\alpha\pi)$ рациональны, то число $2\cos(\alpha\pi)$ целое, т. е. $\cos(\alpha\pi) = 0$, $\pm 1/2$ или ± 1.

См. также задачу 29.55.

32.5. Алгебраические и трансцендентные числа

Комплексное число α называют *алгебраическим*, если оно является корнем неприводимого многочлена с рациональными коэффициентами. Если старший коэффициент этого многочлена равен 1, а все остальные коэффициенты — целые числа, то число α называют *целым алгебраическим*.

Комплексное число α, которое не является алгебраическим, называют *трансцендентным*.

Каждому алгебраическому числу α соответствует единственный неприводимый многочлен f со старшим коэффициентом 1. Корни этого многочлена называют числами, *сопряжёнными* с α.

Назовём многочлен *унитарным* если его старший коэффициент равен 1. Несложно показать, что если α — корень произвольного (т.е. не

обязательно неприводимого) унитарного многочлена с целыми коэффициентами, то α — целое алгебраическое число. Иными словами, если унитарный многочлен с целочисленными коэффициентами представлен в виде произведения двух унитарных многочленов с рациональными коэффициентами, то все эти рациональные коэффициенты — целые числа. Это утверждение — одна из возможных формулировок леммы Гаусса (задача 32.11).

32.36. Пусть x_0 — корень многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами a_0, a_1, $\ldots$, a_n. Докажите, что число a_0x_0 целое алгебраическое.

32.37. Пусть α — корень неприводимого многочлена $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, где $n \geqslant 2$. Докажите, что существует такое число $c > 0$ (зависящее только от α), что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$ для любого целого p и натурального q (*теорема Лиувилля*).

32.38. Докажите, что число $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{k!}$ трансцендентное (*Лиувилль*).

32.39. а) Пусть α и β — алгебраические числа, $\varphi(x, y)$ — произвольный многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что тогда $\varphi(\alpha, \beta)$ — алгебраическое число.

б) Пусть α и β — целые алгебраические числа, $\varphi(x, y)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда $\varphi(\alpha, \beta)$ — целое алгебраическое число.

В частности, если α и β — алгебраические числа (целые алгебраические числа), то $\alpha\beta$ и $\alpha \pm \beta$ тоже алгебраические числа (целые алгебраические числа). Кроме того, если $\alpha \neq 0$ — алгебраическое число, то α^{-1} тоже алгебраическое число. В самом деле, если α — корень многочлена $\sum a_kx^k$ степени n, то α^{-1} — корень многочлена $\sum a_kx^{n-k}$. Но если α — целое алгебраическое число, то число α^{-1} не обязательно целое алгебраическое. Таким образом, алгебраические числа образуют поле, а целые алгебраические числа образуют кольцо.

32.40. Пусть α и β — алгебраические числа, связанные соотношением $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, где φ — многочлен с рациональными коэффициентами. Тогда для любого числа α_i, сопряжённого с α, найдётся число β_j, сопряжённое с β, для которого $\varphi(\alpha_i, \beta_j) = 0$.

32.41. Пусть α — корень многочлена
$$f(x) = x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta_0,$$
где $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ — целые алгебраические числа. Тогда α — целое алгебраическое число.

Алгебраическое число α называют *вполне вещественным*, если все сопряжённые с ним числа вещественны. Иными словами, все корни неприводимого многочлена с корнем α вещественны.

32.42. Докажите, что число $\alpha = 2\cos(k\pi/n)$ вполне вещественно.

32.6. Присоединение корня многочлена

Пусть k — подполе поля комплексных чисел, $f(x)$ — многочлен с коэффициентами из k. Если корень α многочлена $f(x)$ не принадлежит k, то можно рассмотреть наименьшее поле, которое одновременно содержит k и α. Это поле обозначают $k(\alpha)$. При этом говорят, что оно получено из k *присоединением* α. Поле, которое получается присоединением всех корней многочлена $f(x)$ называют *полем разложения* этого многочлена (над полем k).

32.43. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, α — некоторый его корень. Докажите, что поле $k(\alpha)$ состоит из чисел вида $c_{n-1}\alpha^{n-1} + c_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + c_1\alpha + c_0$, где $c_0, \ldots, c_{n-1}$ — числа из поля k.

32.44. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, α — некоторый его корень. Докажите, что если $\sum_{m=0}^{n-1} c_m\alpha^m = \sum_{m=0}^{n-1} d_m\alpha^m$, где $c_0, \ldots, c_{n-1}$ и $d_0, \ldots, d_{n-1}$ — числа из поля k, то $c_m = d_m$ для $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Решения

32.1. Рассмотрим на комплексной плоскости векторные поля $v(z) = f(z)$ и $w(z) = g(z)$. Из условия (1) следует, что ни в какой точке кривой γ векторы v и w не являются противоположно направленными.

Индексом[1] кривой γ относительно векторного поля v называют количество оборотов вектора $v(z)$ при полном обходе точки z вдоль кривой γ. Рассмотрим векторное поле $v_t = tv + (1-t)w$. При этом $v_0 = w$ и $v_1 = v$. Ясно

[1] Для более подробного знакомства со свойствами индекса мы советуем обратиться к главе 6 книги В.В.Прасолов, *Наглядная топология*, МЦНМО 1995.

также, что в любой точке $z \in \gamma$ вектор $v_t(z)$ ненулевой. Это означает, что для кривой γ определён индекс $\operatorname{ind}(t)$ относительно векторного поля v_t. Целое число $\operatorname{ind}(t)$ непрерывно зависит от t, поэтому $\operatorname{ind}(t) = \text{const}$. В частности, индексы кривой γ относительно векторных полей v и w совпадают.

Несложно показать, что индекс кривой γ относительно векторного поля v равен сумме индексов *особых* точек, в которых $v(z) = 0$. (Индекс особой точки z_0 определяется как индекс кривой $|z - z_0| = \varepsilon$, где ε достаточно мало.) Для векторного поля $v(z) = f(z)$ индекс особой точки z_0 равен кратности корня z_0 многочлена f. Таким образом, из совпадения индексов кривой γ относительно векторных полей $v(z) = f(z)$ и $w(z) = g(z)$ следует, что внутри кривой γ расположено одинаковое количество корней многочленов f и g.

32.2. Пусть $a = \max\limits_i |a_i|$. Многочлен $g(z) = z^n$ имеет внутри рассматриваемого круга корень 0 кратности n. Поэтому достаточно проверить, что если $|z| = 1 + a$, то $\bigl|f(z) - g(z)\bigr| < \bigl|f(z)\bigr| + \bigl|g(z)\bigr|$. Мы даже докажем, что $\bigl|f(z) - g(z)\bigr| < \bigl|g(z)\bigr|$, т.е.

$$|a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n| < |z|^n.$$

Ясно, что если $|z| = 1 + a$, то

$$|a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n| \leqslant a\bigl(|z|^{n-1} + \ldots + 1\bigr) = a\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = |z|^n - 1 < |z|^n.$$

32.3. Пусть точка x движется по отрезку $[a, b]$ от a к b. Число $N(x)$ изменяется лишь в том случае, когда x проходит через корень многочлена $f^{(m)}$ при некотором $m \leqslant n$.

Рассмотрим сначала случай, когда точка x проходит через r-кратный корень x_0 многочлена $f(x)$. В окрестности точки x_0 многочлены $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ ведут себя приблизительно как $(x - x_0)^r g(x_0), (x - x_0)^{r-1} r g(x_0), \ldots, r! g(x_0)$. Таким образом, при $x < x_0$ в этой последовательности происходит r перемен знака, а при $x > x_0$ в этой последовательности перемен знака не происходит (имеется в виду, что точка x достаточно близка к x_0).

Предположим теперь, что точка x проходит через r-кратный корень x_0 многочлена $f^{(m)}$, не являющийся корнем многочлена $f^{(m-1)}$ (при этом x_0 может как быть корнем f, так и не быть корнем f). Требуется доказать, что при проходе через x_0 число перемен знака в последовательности $f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x), \ldots, f^{(m+r)}(x)$ изменяется на неотрицательное чётное число. В окрестности точки x_0 эти многочлены ведут себя приблизительно как $F(x_0), (x - x_0)^r G(x_0), (x - x_0)^{r-1} r G(x_0), \ldots, r! G(x_0)$. Если исключить $F(x_0)$, то в оставшейся последовательности при $x < x_0$ происходит ровно r перемен знака, а при $x > x_0$ перемен знака не происходит. Что же касается первых двух членов, $F(x_0)$ и $(x - x_0)^r G(x_0)$, то в случае чётного r число перемен знака при $x < x_0$ и при $x > x_0$ одно и то же, а в случае нечётного r число

перемен знака при $x < x_0$ на 1 больше или меньше, чем при $x > x_0$ (в зависимости от того, имеют ли $F(x_0)$ и $G(x_0)$ один и тот же знак или разные знаки). Итак, при чётном r изменение числа перемен знака равно r, а при нечётном r изменение числа перемен знака равно $r \pm 1$. В обоих случаях это изменение чётно и неотрицательно.

32.4. Так как $f^{(r)}(0) = r!a_{n-r}$, то $N(0)$ совпадает с числом перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена f. Ясно также, что $N(+\infty) = 0$.

32.5. Непосредственно следует из задачи 32.3.

32.6. Рассмотрим сначала случай, когда многочлен f не имеет кратных корней (т.е. многочлены f и f' не имеют общих корней). В таком случае f_n — некоторая ненулевая константа.

Проверим сначала, что если мы проходим через один из корней многочленов $f_1, \ldots, f_{n-1}$, то число перемен знака не изменяется. В рассматриваемом случае соседние многочлены не имеют общих корней, т.е. если $f_r(\alpha) = 0$, то $f_{r\pm1}(\alpha) \neq 0$. Кроме того, из равенства $f_{r-1} = q_{r-1}f_r - f_{r+1}$ следует, что $f_{r-1}(\alpha) = -f_{r+1}(\alpha)$. Но в таком случае число перемен знака в последовательности $f_{r-1}(\alpha), \varepsilon, f_{r+1}(\alpha)$ равно 2 как при $\varepsilon > 0$, так и при $\varepsilon < 0$.

Будем двигаться от a к b. Если мы проходим через корень x_0 многочлена f, то сначала числа $f(x)$ и $f'(x)$ будут разного знака, а потом эти числа будут одного знака. Таким образом, количество перемен знака в последовательности Штурма уменьшается на 1. Все остальные перемены знака, как уже было показано, при прохождении через точку x_0 сохраняются.

Рассмотрим теперь случай, когда многочлен f имеет корень x_0 кратности m. В таком случае f и f_1 имеют общий делитель $(x-x_0)^{m-1}$, поэтому многочлены $f_1, \ldots, f_r$ делятся на $(x-x_0)^{m-1}$. Поделив $f, f_1, \ldots, f_r$ на $(x-x_0)^{m-1}$, получим последовательность Штурма $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ для многочлена $\varphi(x) = f(x)/(x-x_0)^{m-1}$. Многочлен φ имеет некратный корень x_0, поэтому при прохождении через x_0 число перемен знака в последовательности $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ увеличивается на 1. Но при фиксированном x последовательность $f, f_1, \ldots, f_r$ получается из последовательности $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ умножением на константу, поэтому число перемен знака в этих последовательностях одно и то же.

32.7. Пусть $P(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$. Легко проверить, что

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \ldots + \frac{1}{z - z_n}. \qquad (1)$$

Предположим, что $P'(w) = 0$, $P(w) \neq 0$ и w не принадлежит выпуклой оболочке точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда через точку w можно провести прямую, не пересекающую выпуклой оболочки точек $z_1, \ldots, z_n$. Поэтому векторы $w-z_1, \ldots, w-z_n$ лежат в одной полуплоскости, заданной этой прямой. Следовательно, в одной полуплоскости лежат и векторы $\frac{1}{w-z_1}, \ldots, \frac{1}{w-z_n}$, поскольку

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Следовательно, $\frac{P(z)}{P'(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} \neq 0$. Получено противоречие. Поэтому w принадлежит выпуклой оболочке корней многочлена P.

32.8. Пусть $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1}$ — корни производной многочлена с корнями $x_1, \ldots, x_n$, а $z_1' < z_2' < \ldots < z_{n-1}'$ — корни производной многочлена с корнями $x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n$. Для корней z_k и z_k' соотношение (1) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_k - x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_k' - x_i'} = 0. \tag{2}$$

Предположим, что утверждение неверно, т.е. $z_k' < z_k$ для некоторого k. Тогда $z_k' - x_i' < z_k - x_i$. При этом числа $z_k' - x_i'$ и $z_k - x_i$ одного знака. В самом деле, $z_j < x_i$, $z_j' < x_i'$ при $j \leqslant i-1$ и $z_j > x_i$, $z_j' > x_i'$ при $j \geqslant i$. Следовательно, $\frac{1}{z_k - x_i} < \frac{1}{z_k' - x_i'}$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Но в таком случае соотношения (2) не могут выполняться одновременно.

32.9. Пусть многочлен q не делится на p. Тогда $(p, q) = 1$, т.е. существуют такие многочлены a и b, что $ap + bq = 1$. Умножив обе части этого равенства на r, получим $apr + bqr = r$. Многочлены pr и qr делятся на p, поэтому r делится на p.

32.10. Существование разложения легко доказывается индукцией по $n = \deg f$. Прежде всего отметим, что для неприводимого многочлена f требуемое разложение состоит из самого многочлена f. При $n = 1$ многочлен f неприводим. Пусть разложение существует для любого многочлена степени меньше n и f — многочлен степени n. Можно считать, что многочлен f приводим, т.е. $f = gh$, где $\deg g < n$ и $\deg h < n$. Но тогда разложения для g и h существуют по предположению индукции.

Докажем теперь единственность разложения. Пусть $ag_1 \cdot \ldots \cdot g_s = bh_1 \cdot \ldots \cdot h_t$, где $a, b \in k$ и $g_1, \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_t$ — неприводимые многочлены над k со старшим коэффициентом 1. Ясно, что в таком случае $a = b$. Многочлен $g_1 \ldots g_s$ делится на неприводимый многочлен h_1. Это означает, что один из многочленов $g_1, \ldots, g_s$ делится на h_1. Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться задачей 32.9.

Пусть для определённости g_1 делится на h_1. Учитывая, что g_1 и h_1 — неприводимые многочлены со старшим коэффициентом 1, получаем $g_1 = h_1$. Сократим обе части равенства $g_1 \cdot \ldots \cdot g_s = h_1 \cdot \ldots \cdot h_t$ на $g_1 = h_1$. После нескольких таких операций получим $s = t$ и $g_1 = h_{i_1}, \ldots, g_s = h_{i_s}$, где $\{i_1, \ldots, i_s\} = \{1, \ldots, s\}$.

32.11. Достаточно рассмотреть случай, когда $\operatorname{cont}(f) = \operatorname{cont}(g) = 1$. В самом деле, коэффициенты многочленов f, и g можно разделить на $\operatorname{cont}(f)$ и $\operatorname{cont}(g)$, соответственно.

Пусть $f(x) = \sum a_i x^i$, $g(x) = \sum b_i x^i$, $fg(x) = \sum c_i x^i$. Предположим, что $\operatorname{cont}(fg) = d > 1$ и p — простой делитель числа d. Тогда все коэффициенты

многочлена fg делятся на p, а у многочленов f и g есть коэффициенты, не делящиеся на p. Пусть a_r — первый коэффициент многочлена f, не делящийся на p, b_s — первый коэффициент многочлена g, не делящийся на p. Тогда

$$c_{r+s} = a_r b_s + a_{r+1} b_{s-1} + a_{r+2} b_{s-2} + \ldots + a_{r-1} b_{s+1} + a_{r-2} b_{s+2} + \ldots \equiv \equiv a_r b_s \not\equiv 0 \pmod p,$$

так как

$$b_{s-1} \equiv b_{s-2} \equiv \ldots \equiv b_0 \equiv 0 \pmod p, \quad a_{r-1} \equiv a_{r-2} \equiv \ldots \equiv a_0 \equiv 0 \pmod p.$$

Получено противоречие.

32.12. Пусть f — многочлен с целыми коэффициентами и $f = gh$, где g, h — многочлены с рациональными коэффициентами. Можно считать, что $\mathrm{cont}(f) = 1$. Выберем для многочлена g натуральное число m так, что многочлен mg имеет целые коэффициенты. Пусть $n = \mathrm{cont}(mg)$. Тогда рациональное число $r = m/n$ таково, что многочлен rg имеет целые коэффициенты и $\mathrm{cont}(rg) = 1$. Аналогично выберем положительное рациональное число s для многочлена h. Покажем, что в таком случае $rs = 1$, т.е. разложение $f = (rg)(sh)$ является разложением над кольцом целых чисел. Действительно, согласно лемме Гаусса $\mathrm{cont}(rg)\,\mathrm{cont}(sh) = \mathrm{cont}(rsgh)$, т.е. $1 = \mathrm{cont}(rsf)$. Учитывая, что $\mathrm{cont}(f) = 1$, получаем $rs = 1$.

32.13. Предположим, что

$$f = gh = \left(\sum b_k x^k\right)\left(\sum c_l x^l\right),$$

причём g и h — многочлены положительной степени с целыми коэффициентами. Число $b_0 c_0 = a_0$ делится на p, поэтому одно из чисел b_0 и c_0 делится на p. Пусть, для определённости, b_0 делится на p. Тогда c_0 не делится на p, так как $a_0 = b_0 c_0$ не делится на p^2. Если все числа b_i делятся на p, то a_n делится на p. Поэтому b_i не делится на p при некотором i, где $0 < i \leqslant \deg g < n$; можно считать, что i — наименьший номер числа b_i, не делящегося на p. С одной стороны, по условию число a_i делится на p. С другой стороны, $a_i = b_i c_0 + b_{i-1} c_1 + \ldots + b_0 c_i$, причём все числа $b_{i-1} c_1, \ldots, b_0 c_i$ делятся на p, а число $b_i c_0$ не делится на p. Получено противоречие.

32.14. К многочлену

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}$$

можно применить признак Эйзенштейна.

32.15. Пусть σ_k — k-я элементарная симметрическая функция от a, b, c, d. По условию $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_3 = \sigma_4$. Поэтому

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = \frac{4 - 3\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_4} = \frac{4 - 6 + 2\sigma_2 - 2\sigma_4}{1 - 2 + \sigma_2 - 2\sigma_2 + \sigma_4} = 2.$$

32.16. Производящие функции $\sigma(t)$ и $p(t)$ связаны соотношением $\sigma(t)p(-t) = 1$. Приравнивая коэффициенты при t^n, $n \geqslant 1$, в левой и правой части, получаем требуемое.

32.17. Производящая функция $s(t)$ выражается через $p(t)$ следующим образом:

$$s(t) = \frac{d}{dt}\ln p(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}, \quad \text{т.е.} \quad s(t)p(t) = p'(t).$$

Приравнивая коэффициенты при t^{n+1}, получаем требуемое.

32.18. Первое решение. Требуемое равенство можно переписать в виде

$$s_0\sigma_n - s_1\sigma_{n-1} + s_2\sigma_{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n\sigma_0 = 0.$$

Произведение $s_{n-k}\sigma_k$ состоит из членов вида $x_i^{n-k}x_{j_1}\ldots x_{j_k}$. Если i совпадает с одним из чисел $j_1, \ldots, j_k$, то этот член сокращается с членом $x_i^{n-k+1}(x_{j_1}\ldots\hat{x}_i\ldots x_{j_k})$ произведения $s_{n-k+1}\sigma_{k-1}$ (символ $\hat{x}_i$ означает, что число x_i исключено из произведения), а если i отлично от $j_1, \ldots, j_k$, то этот член сокращается с членом $x_i^{n-k-1}(x_i x_{j_1}\ldots x_{j_k})$ произведения $s_{n-k-1}\sigma_{k+1}$.

Второе решение. Производящая функция $s(t)$ выражается через $\sigma(t)$ следующим образом:

$$s(-t) = -\frac{d}{dt}\ln\sigma(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}, \quad \text{т.е.} \quad s(-t)\sigma(t) = -\sigma'(t).$$

Приравнивая коэффициенты при t^{n+1}, получаем

$$n\sigma_n = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}s_r\sigma_{n-r}.$$

32.19. Пусть $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = xyz$ и $s_k = x^k + y^k + z^k$. Запишем формулы Ньютона для $n = 1$, 2 и 4, учитывая при этом, что $\sigma_1 = s_1 = 0$. В результате получим $2\sigma_2 = -s_2$ и $s_4 + s_2\sigma_2 = 0$. Значит, $2s_4 = -s_2(2\sigma_2) = s_2^2$.

32.20. Запишем формулы Ньютона $\sigma_1 = s_1$ и $2\sigma_2 = s_1\sigma_1 - s_2$. По условию числа $\sigma_1 = s_1$ и s_2 делятся на n. Значит, $2\sigma_2$ тоже делится на n. А так как число n нечётно, то σ_2 делится на n. Запишем теперь формулу Ньютона $5\sigma_5 = s_1\sigma_4 - s_2\sigma_3 + s_3\sigma_2 - s_4\sigma_1 + s_5$. Числа $s_1\sigma_4$, $s_2\sigma_3$, $s_3\sigma_2$, $s_4\sigma_1$ делятся на n, поэтому $s_5 - 5\sigma_5$ делится на n.

32.21. Равенство $x_i^{n+3} + px_i^{n+1} + qx_i^n = 0$ показывает, что имеет место рекуррентное соотношение $s_{n+3} + ps_{n+1} + qs_n = 0$. Ясно также, что $s_0 = 3$ и $s_1 = 0$. Кроме того, $s_{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = -\frac{p}{q}$. Теперь можно вычислять s_n, пользуясь известными значениями s_{-1}, s_0, s_1 и рекуррентным соотношением. В результате получим $s_2 = -2p$, $s_3 = -3q$,

$s_4 = 2p^2$, $s_5 = 5pq$, $s_6 = -2p^3 + 3q^2$, $s_7 = -7p^2q$, $s_8 = 2p^4 - 8pq^2$, $s_9 = 9p^3q - 3q^3$, $s_{10} = -2p^5 + 15p^2q^2$.

32.22. Ясно, что $p_1 = x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = x_1x_2 - x_3^2 = -(b+c+d)(a+b+c) - (d-a)^2$ и $p_2 = -(a+c+d)(a+b+d) - (b-c)^2$. Поэтому $p_1 - p_2 = 3(ad-bc)$.

32.23. Определим числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 и многочлены $t^3 + p_1t + q_1$ и $t^3 + p_2t + q_2$, как в условии задачи 32.22. Согласно этой задаче $p_1 = p_2$, поскольку $ad = bc$. Положим $p_1 = p_2 = p$.

Пусть $s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ и $s_n' = y_1^n + y_2^n + y_3^n$. Тогда $f_{2n} = s_{2n} - s_{2n}'$. В задаче 32.21 получены выражения для s_n при $n \leqslant 10$. Воспользуемся этими выражениями. Числа s_2 и s_4 зависят только от p, поэтому $f_2 = f_4 = 0$. Далее, $f_6 = 3(q_1^2 - q_2^2)$, $f_8 = 8p(q_2^2 - q_1^2)$ и $f_{10} = 15p^2(q_1^2 - q_2^2)$. Поэтому $64f_6f_{10} = 45\big(8p(q_1^2 - q_2^2)\big)^2 = 45f_8^2$.

32.24. а) Достаточно рассмотреть случай, когда f — однородный многочлен. Будем говорить, что моном $x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$ имеет более высокий порядок, чем моном $x_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\mu_n}$, если $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_k = \mu_k$ и $\lambda_{k+1} > \mu_{k+1}$ (возможно, $k = 0$). Пусть $ax_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$ — старший моном многочлена f. Тогда $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Рассмотрим симметрический многочлен

$$f_1 = f - a\sigma_1^{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \sigma_2^{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{\lambda_n}. \qquad (1)$$

Старший член монома $\sigma_1^{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{\lambda_n}$ равен

$$x_1^{\lambda_1 - \lambda_2}(x_1x_2)^{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \ldots \cdot (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\lambda_n} = x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

поэтому порядок старшего монома многочлена f_1 строго ниже порядка старшего монома многочлена f. Применим к многочлену f_1 снова операцию (1) и т.д. Ясно, что после конечного числа таких операций придём к нулевому многочлену.

Докажем теперь единственность представления $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Достаточно проверить, что если

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_n} y_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{i_n}$$

— ненулевой многочлен, то после подстановки $y_1 = \sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n, \ldots, y_n = \sigma_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ этот многочлен останется ненулевым. Ограничимся рассмотрением старших мономов

$$a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1 + \ldots + i_n} x_2^{i_2 + \ldots + i_n} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n},$$

получающихся в результате подстановки. Ясно, что самый старший среди этих мономов ни с чем сократиться не может.

б) Это непосредственно видно из решения задачи а).

32.25. Достаточно проверить, что f делится на Δ. В самом деле, если f/Δ — многочлен, то этот многочлен по очевидным причинам симметрический.

Покажем, например, что f делится на $x_1 - x_2$. Сделаем замену $x_1 = u + v$, $x_2 = u - v$. В результате получим

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f_1(u, v, x_3, \ldots, x_n).$$

Если $x_1 = x_2$, то $u = 0$. Поэтому $f_1(0, v, x_3, \ldots, x_n) = 0$. Это означает, что многочлен f_1 делится на u, т.е. многочлен f делится на $x_1 - x_2$. Аналогично доказывается, что f делится на $x_i - x_j$ при всех $i < j$.

32.26. Предположим сначала, что неравенство (2) выполняется при всех $x > 0$. Пусть $x_1 = \ldots = x_k = a$ и $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Тогда

$$1 \leqslant \lim_{a\to\infty} M_\lambda(x)/M_\mu(x) = \lim_{a\to\infty} \left(a^{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}/a^{\mu_1+\ldots+\mu_k}\right).$$

Следовательно, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \ldots + \mu_k$.

При $k = n$, положив $x_1 = \ldots = x_n = a$, получаем равенство

$$M_\lambda(x)/M_\mu(x) = a^{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}/a^{\mu_1+\ldots+\mu_k}.$$

При $a > 1$, как и ранее, получим $|\lambda| \geqslant |\mu|$. А при $0 < a < 1$ получим $|\lambda| \leqslant |\mu|$.

Доказательство утверждения в обратную сторону более сложно. Оно использует следующее преобразование R_{ij}. Пусть $\mu_i \geqslant \mu_j > 0$, где $i < j$. Положим $R_{ij}\mu = \mu'$, где $\mu'_i = \mu_i + 1$, $\mu'_j = \mu_j - 1$ и $\mu'_k = \mu_k$ при $k \neq i, j$. Легко проверить, что $\mu' > \mu$ и $|\mu'| = |\mu|$.

Лемма 1. Если $\lambda = R_{ij}\mu$, то $M_\lambda(x) \geqslant M_\mu(x)$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда $x_1 = \ldots = x_n$. (Предполагается, что числа $x_1, \ldots, x_n$ положительны.)

Для каждой пары индексов p, q, где $1 \leqslant p < q \leqslant n$, в $M_\lambda(x) - M_\mu(x)$ входит слагаемое вида

$$A \cdot \left(x_p^{\lambda_i} x_q^{\lambda_j} + x_q^{\lambda_i} x_p^{\lambda_j} - x_p^{\mu_i} x_q^{\mu_j} - x_q^{\mu_i} x_p^{\mu_j}\right), \qquad (3)$$

где A — некоторое положительное число. Обозначим для наглядности $x_p = a$, $x_q = b$, $\mu_i = \alpha$, $\mu_j = \beta$. Напомним, что $\lambda_i = \alpha + 1$, $\lambda_j = \beta - 1$ и $\alpha \geqslant \beta$. Выражение (3), делённое на A, равно

$$a^{\alpha+1}b^{\beta-1} + a^{\beta-1}b^{\alpha+1} - a^\alpha b^\beta - a^\beta b^\alpha = (ab)^{\beta-1}(a-b)(a^{\alpha+1-\beta} - b^{\alpha+1-\beta}) \geqslant 0,$$

причём равенство возможно лишь в том случае, когда $a = b$. Поэтому $M_\lambda(x) - M_\mu(x) \geqslant 0$, причём если среди чисел $x_1, \ldots, x_n$ есть хотя бы два различных, то неравенство строгое.

Лемма 2. Если $\lambda \geqslant \mu$ и $|\lambda| = |\mu|$, но $\lambda \neq \mu$, то λ можно получить из μ с помощью конечного числа преобразований R_{ij}.

Пусть i — наименьший индекс, для которого $\lambda_i \neq \mu_i$. Тогда из условия $\lambda \geqslant \mu$ следует, что $\lambda_i > \mu_i$. Равенство $|\lambda| = |\mu|$, означает, что $\sum(\lambda_k - \mu_k) = 0$, поэтому $\lambda_j < \mu_j$ для некоторого индекса j. Ясно, что $i < j$ и $\mu_j > 0$.

Поэтому к μ можно применить преобразование R_{ij}. В результате получим последовательность ν, для которой $\nu_i = \mu_i + 1$, $\nu_j = \mu_j - 1$ и $\nu_k = \mu_k$ при $k \neq i, j$. Учитывая, что $\lambda_i > \mu_i$ и $\lambda_j < \mu_j$, получаем

$$|\lambda_i - \mu_i| = |\lambda_i - \nu_i| + 1, \quad |\lambda_j - \mu_j| = |\lambda_j - \nu_j| + 1.$$

Таким образом,

$$\sum |\lambda_k - \nu_k| = \sum |\lambda_k - \mu_k| - 2,$$

т.е. с помощью преобразования R_{ij} нам удалось уменьшить на 2 величину $\sum |\lambda_k - \mu_k|$. Поэтому с помощью некоторого числа преобразований R_{ij} эту величину можно сделать равной нулю.

Из лемм 1 и 2 неравенство Мюрхеда следует очевидным образом.

32.27. Формула

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi$$

показывает, что

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Многочлены $T_n(x)$, определённые этим рекуррентным соотношением и начальными условиями $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$, обладают нужным свойством.

32.28. Ответ: $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

32.29. Это следует из того, что $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos\varphi$.

32.30. Это следует из рекуррентного соотношения $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, которое доказано при решении задачи 32.27.

32.31. Мы воспользуемся лишь одним свойством многочлена $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$, а именно тем, что $T_n(\cos(k\pi/n)) = \cos k\pi = (-1)^k$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) - P_n(x)$. Его степень не превосходит $n-1$, поскольку старшие члены многочленов $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ и $P_n(x)$ равны. Из того, что $|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ при $|x| \leqslant 1$ следует, что в точке $x_k = \cos(k\pi/n)$ знак числа $Q(x_k)$ совпадает со знаком числа $T_n(x_k)$. Таким образом, в концах каждого отрезка $[x_{k+1}, x_k]$ многочлен $Q(x)$ принимает значения разного знака, поэтому у многочлена $Q(x)$ на этом отрезке есть корень. Чуть более аккуратные рассуждения нужны в том случае, когда $Q(x_k) = 0$. В этом случае либо x_k — двукратный корень, либо внутри одного из отрезков $[x_{k+1}, x_k]$ и $[x_k, x_{k-1}]$ есть ещё один корень. Это следует из того, что в точках x_{k+1} и x_{k-1} многочлен $Q(x)$ принимает значения одного знака (рис. 32.1).

Количество отрезков $[x_{k+1}, x_k]$ равно n, поэтому многочлен $Q(x)$ имеет по крайней мере n корней. Для многочлена степени не более $n-1$ это означает, что он тождественно равен нулю, т. е. $P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

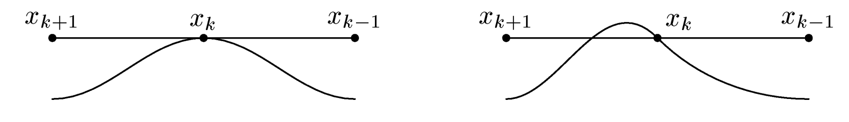


Рис. 32.1.

Замечание. *По поводу другого решения см. задачу 11.38.*

32.32. Пусть $x = \cos\varphi$. Тогда $T_n(x) = \cos(n\varphi) = y$ и $T_m(y) = \cos m(n\varphi)$, поэтому $T_m(T_n(x)) = \cos mn\varphi$. Аналогично $T_n(T_m(x)) = \cos mn\varphi$. Таким образом, равенство $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$ выполняется при $|x| < 1$, а значит, это равенство выполняется при всех x.

32.33. а) Пусть $n = 2k+1$ и $\varphi = 2l\pi/n$. Тогда $T_{k+1}(\cos\varphi) - T_k(\cos\varphi) = \cos(k+1)\varphi - \cos k\varphi$. При этом $(k+1)\varphi + k\varphi = (2k+1)\varphi = 2l\pi$. Значит, $\cos(k+1)\varphi = \cos k\varphi$.

б) Пусть $n = 2k$ и $\varphi = 2l\pi/n$. Тогда $T_{k+1}(\cos\varphi) - T_{k-1}(\cos\varphi) = \cos(k+1)\varphi - \cos(k-1)\varphi$. При этом $(k+1)\varphi + (k-1)\varphi = 2k\varphi = 2l\pi$. Значит, $\cos(k+1)\varphi = \cos(k-1)\varphi$.

32.34. а) Пользуясь результатом задачи 32.28, получаем $T_2 - T_1 = 2x^2 - x - 1$, $T_3 - T_2 = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, $T_4 - T_3 = 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$, $T_5 - T_4 = 16x^5 - 8x^4 - 20x^3 + 8x^2 + 5x + 1$.

б) Согласно задаче 32.33 числа $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{4\pi}{5}$ являются корнями многочлена $T_3 - T_2$. Поделив этот многочлен на $x - 1$, получим требуемый многочлен.

в) Числа 1, $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ и $\cos\frac{6\pi}{7}$ являются корнями многочлена $T_4 - T_3$. Поделив этот многочлен на $x - 1$, получим требуемый многочлен.

г) Числа 1, $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\frac{6\pi}{9} = -\frac{1}{2}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$ являются корнями многочлена $T_5 - T_4$. Поделив этот многочлен на $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$, получим требуемый многочлен.

32.35. Пусть $\alpha = m/n$ — несократимая дробь. Положим $x_0 = 2\cos t$, где $t = \alpha\pi$. Тогда $P_n(x_0) = 2\cos(nt) = 2\cos(n\alpha\pi) = 2\cos(m\pi) = \pm 2$. Поэтому x_0 — корень многочлена $P_n(x) \mp 2 = x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ с целыми коэффициентами. Пусть $x_0 = 2\cos(\alpha\pi) = p/q$ — несократимая дробь. Тогда $p^n + b_1p^{n-1}q + \ldots + b_nq^n = 0$, а значит, p^n делится на q. Но числа p и q взаимно простые, поэтому $q = \pm 1$, т. е. $2\cos(\alpha\pi)$ — целое число.

32.36. Число $y_0 = a_0x_0$ является корнем многочлена

$$y^n + a_1y^{n-1} + a_2a_0y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0^{n-2}y + a_na_0^{n-1} = 0.$$

При $a_0 = 0$ это очевидно, а при $a_0 \neq 0$ нужно положить $y = a_0x$; после сокращения на a_0^{n-1} получим исходный многочлен.

32.37. Если $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1$, то требуемое неравенство выполняется при $c = 1$. Поэтому будем считать, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$. Запишем многочлен $f(x)$ в виде $f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$, где $\alpha_1 = \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= |a_n| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{n} \left|\frac{p}{q} - \alpha_i\right| \leqslant \\ &\leqslant |a_n| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \prod_{i=2}^{n} (|\alpha| + 1 + |\alpha_i|) = c_1 \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|,\end{aligned}$$

где c_1 —положительное число, зависящее только от $|a_n|$ и α.

Будем считать, что $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа, взаимно простые в совокупности. Тогда число $|a_n|$ полностью определяется числом α. Кроме того, число

$$q^n f(p/q) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 q^n$$

целое, поэтому $|q^n f(p/q)| \geqslant 1$. Следовательно,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{c_1} \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{c_1 q^n} = \frac{c}{q^n},$$

где $c = c_1^{-1}$.

32.38. Для каждого натурального n рассмотрим число $\alpha = \sum_{k=0}^{n} 2^{k!} = p/q$, где p — целое число и $q = 2^{n!}$. При этом

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{2^{(n+1)!}} \left(1 + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{(n+2)(n+3)}} + \ldots\right) < \frac{2}{2^{(n+1)!}} = \frac{2}{q^{n+1}}.$$

Предположим, что α — алгебраическое число степени N. Тогда согласно задаче 32.37

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^N},$$

а значит, $2q^{-n-1} > cq^{-N}$, т.е. $c < 2q^{N-n-1} = 2 \cdot 2^{n!(N-n-1)}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n!(N-n-1)} = 0$. Приходим к противоречию.

32.39. а) Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ — наборы чисел, сопряжённых с α и β соответственно. Рассмотрим многочлен

$$F(t) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \bigl(t - \varphi(\alpha_i, \beta_j)\bigr).$$

Коэффициенты этого многочлена являются симметрическими функциями от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Поэтому они являются рациональными числами.

б) Решение аналогично.

32.40. Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ — наборы чисел, сопряжённых с α и β соответственно. Рассмотрим многочлен

$$f(x) = \prod_{j=1}^{m} \varphi(x, \beta_j).$$

Коэффициенты этого многочлена рациональны и $f(\alpha) = 0$. Поэтому $f(x)$ делится на $\prod(x - \alpha_i)$, а значит, $f(\alpha_i) = 0$, т.е. $\varphi(\alpha_i, \beta_j) = 0$ для некоторого j.

32.41. Рассмотрим многочлен

$$F(x) = \prod_{i,\ldots,l} (x^n + \beta_{n-1,i}x^{n-1} + \ldots + \beta_{0,l}),$$

где $\{\beta_{n-1,i}\}, \ldots, \{\beta_{0,l}\}$ — все числа, сопряжённые с $\beta_{n-1}, \ldots, \beta_0$ соответственно. Легко проверить, что коэффициенты многочлена F — целые числа. Ясно также, что α — корень многочлена F.

32.42. Ясно, что $\alpha = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon = \exp(k\pi/n)$. Пусть число α_1 сопряжено с α. Из задачи 32.40 следует, что $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1}$, где число ε_1 сопряжено с ε. Число ε удовлетворяет уравнению $x^n - 1 = 0$, поэтому ε_1 тоже будет корнем этого уравнения, а значит, $\varepsilon_1 = \exp(l\pi/n)$. В таком случае число $\alpha_1 = 2\cos(l\pi/n)$ вещественно.

32.43. Ясно, что все числа указанного вида должны входить в $k(\alpha)$. Поэтому достаточно доказать, что числа указанного вида образуют поле. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что произведение чисел такого вида имеет такой же вид и обратный элемент для числа такого вида тоже имеет такой вид (ясно, что сумма чисел указанного вида имеет требуемый вид). Мы докажем более общее утверждение: если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — многочлены с коэффициентами из поля k, причём $\psi(\alpha) \neq 0$, то

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = c_{n-1}\alpha^{n-1} + c_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + c_1\alpha + c_0$$

для некоторых чисел $c_0, \ldots, c_{n-1}$ из поля k.

Многочлен $f(x)$ неприводим над k, поэтому он не имеет общих делителей с $\psi(x)$. Значит, найдутся многочлены $a(x)$ и $b(x)$ с коэффициентами их поля k, для которых $a(x)\psi(x) + b(x)f(x) = 1$. При $x = \alpha$ получаем $\dfrac{1}{\psi(\alpha)} = a(\alpha)$. Таким образом, $\dfrac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = \varphi(\alpha)a(\alpha)$. Поделим многочлен $\varphi(x)a(x)$ на $f(x)$ с остатком: $\varphi(x)a(x) = q(x)f(x) + r(x)$, где $r(x)$ — многочлен степени не выше $n - 1$. Остаётся заметить, что $\varphi(\alpha)a(\alpha) = r(\alpha)$.

32.44. Пусть $b_m = c_m - d_m$. Требуется доказать, что если $\sum_{m=0}^{n-1} b_m\alpha^m = 0$, где $b_0, \ldots, b_{n-1}$ — числа из поля k, то $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$. Многочлен $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$ имеет общий корень α с неприводимым многочленом $f(x)$, поэтому $g(x)$ делится на $f(x)$. Но степень $g(x)$ меньше степени $f(x)$, поэтому $g(x) = 0$, т.е. $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

Глава 33.

Алгоритмы и вычисления

Когда дело доходит до конкретных вычислений, бывает важно выбрать наиболее быстрый способ вычислений. При этом нужно иметь в виду, что умножение двух больших чисел занимает больше времени, чем сложение.

Иррациональные числа обычно вычисляются приближённо, поэтому при таких вычислениях важно оценить погрешность вычислений. Это относится и к приближённому представлению десятичными дробями рациональных чисел с большими числителями и знаменателями.

33.1. Вычисления некоторых чисел

33.1. Докажите, что первые три цифры частного

$$\frac{0,1234567891011\ldots4748495051}{0,51504948\ldots4321}$$

суть $0,239$.

33.2. Докажите, что если квадрат числа начинается с $0,999\ldots9$ (100 девяток), то и само число начинается с $0,999\ldots9$ (100 девяток).

33.3. Вычислите с точностью до 0, 00001 произведение

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{10^{99}}\right).$$

33.4. Докажите, что $3,14 < \pi < 3,142$ и $9,86 < \pi^2 < 9,87$.

33.2. Арифметические операции. Многочлены

33.5. Дано число a. Докажите, что можно вычислить a^n, сделав не более $2\log_2 n$ умножений.

33.6. Чтобы вычислить значение многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ при $x = x_0$, можно вычислить $a_n x_0^n$, $a_{n-1}x_0^{n-1}$, $\ldots$, $a_1 x_0$, а затем сложить все полученные числа и a_0. Для этого потребуется $2n-1$ умножений (вычисление x_0^k для $k = 2, 3, \ldots, n$ требует $n-1$ умножений). Придумайте способ вычисления $P(x_0)$, требующий лишь n умножений и n сложений. (*Схема Горнера*)

33.7. Укажите алгоритм, позволяющий разложить данный многочлен с целыми коэффициентами на неприводимые множители (в частности, выяснить, является ли данный многочлен неприводимым).

33.3. Сортировка

Задача *сортировки* заключается в следующем. Дана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Требуется их переставить так, чтобы они были упорядочены по возрастанию: $a_{\sigma(1)} \leqslant a_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant a_{\sigma(n)}$; здесь $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ — перестановка чисел $1, \ldots, n$.

У этой задачи есть разные варианты: найти наибольшее (или наименьшее) из данных чисел; найти два наибольших числа; выяснить, есть ли среди данных чисел равные, и т.п.

33.8. Дано n попарно различных чисел. Требуется найти наибольшее из них, сравнивая за один шаг пару чисел.

а) Докажите, что это можно сделать за $n-1$ шаг.

б) Докажите, что этого нельзя сделать меньше, чем за $n-1$ шаг.

Известно много разных алгоритмов сортировки. Здесь мы разберём некоторые из них.

Сортировка вставками заключается в следующем. Сначала сравниваем a_1 и a_2 и, если надо, меняем их местами. Затем в новой последовательности сравниваем a_3 и a_2 (здесь a_2 — элемент, который стоит на

2-м месте в новой последовательности) и, если нужно, меняем их местами. Если элементы a_3 и a_2 пришлось поменять местами, то сравниваем a_3 и a_1 и т.д.

33.9. Докажите, что для сортировки вставками количество сравнений чисел заключено между $n-1$ и $\frac{n(n-1)}{2}$.

Для оценки числа сравнений, достаточных для решения различных задач сортировки часто используется результат следующей задачи.

33.10. Есть куча из $n \geqslant 2$ камней. На первом шаге она делится примерно пополам, т.е. если n чётно, то она делится на две кучи из $n/2$ камней, а если n нечётно, то на две кучи из $\frac{n-1}{2}$ и $\frac{n+1}{2}$ камней. На втором шаге с каждой кучей, в которой есть по крайней мере два камня, повторяется то же самое и т.д. Процесс останавливается после m-го шага, когда в каждой куче остался ровно один камень. Докажите, что число m определяется неравенствами $m-1 < \log_2 n \leqslant m$.

Сортировка слияниями заключается в следующем. Предположим, что у нас уже есть две отсортированные последовательности $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_p$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_q$. Тогда по ним можно построить отсортированную последовательность всех этих чисел следующим образом. Сравним числа x_1 и y_1 и заберём меньшее из них (если $x_1 = y_1$, то забираем любое из этих чисел). Это будет первое число новой последовательности. Для оставшихся последовательностей (теперь в одной из них на одно число меньше) повторяем то же самое. Так находим второе число новой последовательности и т.д. Для сортировки произвольной последовательности чисел этот алгоритм слияния двух последовательностей используется следующим образом. Разобьём исходную последовательность n чисел примерно пополам, как это делается в задаче 33.10. После того как мы отсортируем две полученные последовательности, к ним можно будет применить алгоритм слияния. Каждую полученную последовательность мы снова делим примерно пополам (если в ней есть по крайней мере два числа) и т.д. до тех пор, пока не останутся только последовательности, каждая из которых состоит из одного числа. После этого мы начинаем сливать последовательности в порядке, обратном разбиению.

33.11. Дана последовательность из n чисел. Докажите, что для её сортировки слияниями требуется не более $mn - 2^m + 1$ сравнений пар чисел, где число m определяется неравенствами $m-1 < \log_2 n \leqslant m$.

33.12. В последовательности из $2n$ чисел требуется одновременно

найти наибольшее число и наименьшее.

а) Докажите, что это можно сделать, сравнив $3n-2$ пары чисел.

б) Докажите, что сравнением менее $3n-2$ пар чисел в общем случае нельзя обойтись.

33.13. В последовательности из n различных чисел требуется одновременно найти самое большое и следующее за ним по величине.

а) Докажите, что это можно сделать, сравнив $n+m-2$ пары чисел, где целое число m определяется неравенствами $m-1<\log_2 n \leqslant m$.

б) Докажите, что сравнением менее $n+m-2$ пар чисел в общем случае нельзя обойтись.

33.4. Криптография с открытым ключом

Пусть m — произведение двух различных простых чисел p и q. Выберем число e так, чтобы оно было взаимно просто с $p-1$ и $q-1$. Числа m и e доступны всем желающим, а числа p и q известны только владельцу шифра. Здесь нужно сказать, что если числа p и q достаточно большие, то с практической точки зрения восстановить их по известному числу m (т.е. разложить m на простые множители) невозможно.

Теперь любой желающий может зашифровать сообщение, которое представлено натуральным числом[1] $x<m$, следующим образом: числу x сопоставляется остаток от деления числа x^e на m.

Покажем, как владелец ключа может расшифровать это сообщение. Для расшифровки важны не исходные простые числа p и q, а натуральное число d, которое определяется следующим образом:

$$de \equiv 1 \pmod{\varphi(m)}, \quad 1 \leqslant d < \varphi(m).$$

Здесь $\varphi(m)=(p-1)(q-1)$ — функция Эйлера. Существование и единственность числа d следуют из того, что e взаимно просто с $\varphi(m)$.

Чтобы расшифровать сообщение, нужно научиться решать сравнение $x^e \equiv a \pmod{m}$. Если x взаимно просто с m, то согласно малой теореме Ферма $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, поэтому $a^d \equiv x^{ed} \equiv x \pmod{m}$. Поэтому расшифровка сообщения состоит просто в возведении полученного сообщения в степень d (и приведении по модулю m). Легко проверить, что это остаётся верным и в том случае, когда x не взаимно просто с m, т.е. a не взаимно просто с m. Действительно, пусть НОД$(a,m)=r$ и

[1] Для шифровки текстового сообщения нужно преобразовать его в число по стандартному правилу: пробел = 00, а = 01, б = 02, ...

$s = m/r$. Число m является произведением двух взаимно простых чисел, поэтому s и r — это простые числа p и q. В частности, $\varphi(m)$ делится на $\varphi(s)$. Следовательно, $de \equiv 1 \pmod{\varphi(m)}$ и $a^d \equiv x^{ed} \equiv x \pmod{s}$. Числа a и x делятся на простое число r, поэтому $a^d \equiv 0 \equiv x \pmod{r}$. Но числа r и s взаимно простые, поэтому $a^d \equiv x \pmod{m}$.

Решения

33.1. Пусть $a = 0,1234\ldots5051$ и $b = 0,5150\ldots321$. Требуется доказать, что $0,239b \leqslant a < 0,24b$. Но $0,515 < b < 0,516$, поэтому $0,239b < 0,239\cdot 0,516 = 0,123324 < a$ и $0,24b > 0,24 \cdot 0,515 = 0,1236 > a$.

33.2. Если $0 < a < 1$, то $0 < a^2 < a < 1$. По условию $1 > a^2 \geqslant 0,\underbrace{9\ldots9}_{100}$. Поэтому $1 > a > 0,\underbrace{9\ldots9}_{100}$ (предполагается, что число a положительно).

33.3. Ответ: 0, 89001.

Пусть $a = \left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{10^5}\right)$ и $b = \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{10^{99}}\right)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$0,\ 89001 + \frac{1}{10^6} < a < 0,\ 89001 + \frac{2}{10^6}.$$

Ясно, что $b < 1 - \frac{1}{10^6}$. Кроме того, если $0 < x, y < 1$, то $(1-x)(1-y) > 1 - x - y$. Поэтому $b > 1 - \frac{1}{10^6} - \frac{1}{10^7} - \ldots - \frac{1}{10^{99}} > 1 - \frac{2}{10^6}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} ab < 0,\ 890012 \cdot 0,\ 999999 &< 0,\ 890012,\\ ab > 0,\ 890011 \cdot 0,\ 999998 &> 0,\ 890009. \end{aligned}$$

33.4. Мы воспользуемся тождеством

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

(задача 11.11) и неравенствами для арктангенса, доказанными в задаче 29.46. Из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4} > 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3}\right) - \frac{1}{239} > 0,78514923,\\ &\frac{\pi}{4} < 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5}\right) - \frac{1}{239} + \frac{1}{3\cdot 239^3} < 0,78540526. \end{aligned}$$

Поэтому $3,14 < \pi < 3,1416$ и $9,863 < \pi^2 < 9,8698$.

33.5. Пусть двоичная запись числа n имеет вид $a_0 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_m \cdot 2^m$, где $a_m \neq 0$. Тогда $m \leqslant \log_2 n < m + 1$, поскольку $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$. Числа a, a^2,

a^4, ..., a^{2^m} можно вычислить, сделав m умножений. Чтобы вычислить a^n, нужно перемножить какой-то набор из этих чисел. Он не может включать более $m+1$ чисел, поэтому достаточно m умножений. Всего получаем не более $2m \leqslant 2\log_2 n$ умножений.

33.6. Пусть $b_1 = a_n x_0 + a_{n-1}$, $b_2 = b_1 x_0 + a_{n-2}$, ..., $b_n = b_{n-1}x_0 + a_0$. Тогда $b_n = P(x_0)$, поскольку

$$P(x) = \Big(\ldots\big((a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2}\big)\ldots\Big)x_0 + a_0.$$

33.7. Для вычисления разложения многочлена f с целыми коэффициентами на неприводимые множители Кронекер предложил следующий алгоритм (*алгоритм Кронекера*). Пусть $\deg f = n$ и $r = [n/2]$. Если многочлен $f(x)$ приводим, то у него есть делитель $g(x)$ степени не выше r. Чтобы найти этот делитель $g(x)$, рассмотрим числа $c_j = f(j)$, $j = 0, 1, \ldots, r$. Если $c_j = 0$, то $x - j$ — делитель многочлена $f(x)$. Если же $c_j \neq 0$, то $g(j)$ — делитель числа c_j. Каждому набору $d_0, \ldots, d_r$ делителей чисел $c_0, \ldots, c_r$ соответствует ровно один многочлен $g(x)$ степени не выше r, для которого $g(j) = d_j$, $j = 0$, $1, \ldots, r$. А именно,

$$g(x) = \sum_{j=0}^{r} d_j g_j(x), \qquad g_j(x) = \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant r,\\ k\neq j}} \left(\frac{x-k}{j-k}\right).$$

Для каждого такого многочлена $g(x)$ нужно проверить, будут ли его коэффициенты целыми числами и будет ли он делителем многочлена $f(x)$.

Сейчас известно много других, более эффективных, алгоритмов разложения многочлена на неприводимые множители.

33.8. а) Будем при сравнении двух чисел выбирать наибольшее. Меньшее число будем вычёркивать из списка; в дальнейших сравнениях оно участвовать не будет. Ясно, что после $n-1$ сравнений в списке останется лишь одно число — наибольшее.

б) Каждое сравнение отсеивает только одного претендента на звание наибольшего числа. Если сделано k сравнений, то остаются $n-k$ претендентов на звание наибольшего числа. Поэтому если остался только один претендент, то $k \geqslant n-1$.

33.9. Наименьшее число сравнений будет в случае, когда числа a_1, a_2, ..., a_n уже упорядочены по возрастанию. В этом случае перестановок чисел не будет вообще. Сравниваться будут числа a_1 и a_2, a_2 и a_3, ..., a_{n-1} и a_n. Наибольшее число сравнений будет в случае, когда числа a_1, a_2, ..., a_n упорядочены по убыванию. В этом случае количество перестановок будет наибольшим. Количество сравнений чисел в этом случае равно $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

33.10. Индукцией по m легко доказать, что для кучи из $2^{m-1}+1$ камней процесс останавливается после m шагов, поскольку после первого шага бóльшая из куч содержит $2^{m-2}+1$ камней. Ясно также, что для кучи из 2^m камней процесс тоже останавливается после m шагов.

Таким образом, для кучи из n камней процесс останавливается после m шагов тогда и только тогда, когда $2^{m-1}+1 \leqslant n \leqslant 2^m$, т.е. $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$. Логарифмируя эти неравенства, получаем требуемое.

33.11. Согласно задаче 33.10 число m, которое определяется указанными неравенствами, это количество шагов, которые нужно сделать, чтобы завершилось деление последовательностей (имеются в виду шаги, при которых делятся примерно пополам все последовательности, полученные на предыдущем шаге).

Для слияния двух отсортированных последовательностей, состоящих из p и q чисел, требуется не более $p+q-1$ сравнений пар чисел. Действительно, при каждом сравнении мы забираем одно число. Кроме того, сортировка завершается после того, как из одной последовательности забраны все числа. Но при этом в другой последовательности останется по крайней мере одно число.

После m делений примерно пополам мы имеем 2^{m-1} «пар» чисел (некоторые «пары» состоят из одного числа). Для слияния этих «пар» нужно не более $n-2^{m-1}$ сравнений (для слияния «пары», состоящей из одного числа, никаких сравнений не нужно, поэтому из общего количества всех чисел вычитается количество всех «пар»). Затем нужно слить 2^{m-2} последовательности; для этого нужно не более $n-2^{m-2}$ сравнений и т.д. Всего получаем не более $mn-2^{m-1}-2^{m-2}-\ldots-2-1 = mn-2^m+1$ сравнений.

33.12. а) Разобьём данные числа произвольным образом на n пар. Сравнивая числа в каждой паре, выберем n наибольших чисел и n наименьших чисел в парах. Ясно, что наибольшее число нужно искать среди выбранных n наибольших чисел. Его можно найти, сделав $n-1$ сравнений (задача 33.8). Аналогично можно найти наименьшее число (среди n выбранных наименьших чисел), сделав $n-1$ сравнений.

б) Пусть после k сравнений у нас есть a_k чисел, которые оказались меньше каких-то чисел и больше каких-то чисел, b_k чисел, которые оказались меньше каких-то чисел, но пока не оказались больше каких-то чисел, c_k чисел, которые оказались больше каких-то чисел, но пока не оказались меньше каких-то чисел, и d_k чисел, которые пока не сравнивались ни с какими числами. Первоначально $a_0=b_0=c_0=0$ и $d_0=2n$. А когда после m сравнений найдены наибольшее число и наименьшее, $b_m=c_m=1$, $a_m=2n-2$ и $d_m=0$.

Рассмотрим величину $f_k=b_k+c_k+\frac{3}{2}d_k$. Ясно, что $f_0=3n$ и $f_m=2$. Будем предполагать, что если мы прямо или косвенно знаем, что $x>y$, то числа x и y мы больше никогда друг с другом не сравниваем, потому что та-

кое сравнение можно было бы просто пропустить. Достаточно доказать, что при сравнении любой пары чисел может случиться, что $f_k - f_{k-1} \leqslant 1$. Действительно, складывая неравенства $f_0 - f_1 \leqslant 1$, $f_1 - f_2 \leqslant 1$, ..., $f_m - f_{m-1} \leqslant 1$, получаем $f_0 - f_m \leqslant m$, т.е. $3n - 2 \leqslant m$. Требуемое утверждение доказывается прямым перебором.

1) Если сравниваются два числа из группы a_k, то ничего не меняется: $f_{k+1} = f_k$.

2) Пусть сравниваются число a из группы a_k и число b из группы b_k. Может случиться, что $a < b$. Тогда $a_{k+1} = a_k + 1$ и $b_{k+1} = b_k - 1$, поэтому $f_k - f_{k-1} = 1$.

3) Аналогично может случиться, что $a > c$. Тогда $a_{k+1} = a_k + 1$ и $c_{k+1} = c_k - 1$, поэтому $f_k - f_{k-1} = 1$.

4) При сравнении чисел a и d одно из чисел b_k или c_k увеличивается на 1, а число d_k уменьшается на 1, поэтому $f_k - f_{k-1} = \dfrac{1}{2}$.

5) При сравнении двух чисел из группы b_k число a_k увеличивается на 1, а b_k уменьшается на 1, поэтому $f_k - f_{k-1} = 1$.

6) Может случиться, что $b < c$. Тогда ничего не меняется.

7) Может случиться, что $b < d$. Тогда c_k увеличивается на 1, а d_k уменьшается на 1, поэтому $f_k - f_{k-1} = \dfrac{1}{2}$.

8) При сравнении двух чисел из группы c_k число a_k увеличивается на 1, а c_k уменьшается на 1, поэтому $f_k - f_{k-1} = 1$.

9) Может случиться, что $c > d$. Тогда b_k увеличивается на 1, а d_k уменьшается на 1, поэтому $f_k - f_{k-1} = \dfrac{1}{2}$.

10) При сравнении двух чисел из группы d_k оба числа b_k и c_k увеличиваются на 1, а d_k уменьшается на 2, поэтому $f_k - f_{k-1} = 1$.

33.13. а) Будем последовательно делить набор из n чисел примерно пополам, как это описано в задаче 33.10. Согласно решению этой задачи процесс останавливается после m шагов. Группы, полученные на $(m-1)$-м шаге, состоят из пар чисел и отдельных чисел. В каждой такой группе сравним числа и найдём среди них наибольшее (отдельные числа пока ни с чем не сравниваются). Затем аналогично найдём наибольшее число в каждой группе, полученной на $(m-2)$-м шаге, и т.д. В результате найдём наибольшее число. При этом будет сделано $n-1$ сравнений. Действительно, при каждом сравнении отсеивается один кандидат на звание наибольшего числа, причём в результате будет отсеяно $n-1$ число.

Займёмся теперь поиском второго по величине числа. Ясно, что оно выбыло из дальнейшей борьбы в результате сравнения с наибольшим числом, поскольку у любого другого числа оно бы выиграло. Таким образом, второе по величине число нужно искать среди тех чисел, которые сравнивались непосредственно с самым большим числом. Таких чисел m. Выбрать из них наибольшее можно за $m-1$ сравнений.

б) Будем говорить, что число *проигрывает* сравнение, если оно оказывается меньше числа, с которым оно сравнивается. Пусть k_i — количество чисел, проигравших не менее i сравнений (косвенные проигрыши, когда из неравенств $a < b$ и $b < c$ делается вывод, что $a < c$, не учитывается; количество всех проигрышей равно количеству всех сравнений). Тогда сумма всех чисел k_i равна количеству всех сравнений, поскольку после каждого сравнения ровно одно из чисел k_i увеличивается на 1. Действительно, пусть при очередном сравнении проигрывает число, которое уже проиграло j сравнений. Тогда k_{j+1} увеличивается на 1, а остальные числа k_i не изменяются.

Достаточно доказать, что при любом алгоритме сравнений может получиться так, что после того, как удалось выявить наибольшее число и следующее за ним, будет выполняться неравенство $k_1+k_2 \geqslant n+m-2$. Прежде всего заметим, что после того, как алгоритм закончит работу, будет выполняться неравенство $k_1 \geqslant n-1$, поскольку все числа, кроме одного, должны были кому-то проиграть (если бы два числа никому не проиграли, то мы не знали бы, какое из них больше другого). Остаётся доказать, что при неудачных исходах может выполняться неравенство $k_2 \geqslant m-1$.

На каждом шаге работы алгоритма будем называть *лидером* число, которое пока никому не проиграло. Покажем, что неравенство $k_2 \geqslant m-1$ выполняется, если исходы сравнений следующие:

(1) при сравнении двух не лидеров результат произвольный;

(2) при сравнении лидера с не лидером всегда выигрывает лидер;

(3) при сравнении двух лидеров выигрывает тот, у кого было больше выигрышей (если выигрышей было поровну, то результат произвольный).

Такие исходы сравнений возможны потому, что на лидера нет никаких ограничений сверху: если его увеличить, то результат предыдущих сравнений не изменится.

Введём теперь понятие *подчинения* лидеру. Первоначально все числа подчинены только самим себе. При сравнениях типа (1) и (2) подчинение лидерам не изменяется. При сравнении типа (3) проигравший и все его подчинённые переподчиняются новому лидеру.

Покажем индукцией по k, что если лидер выиграл k сравнений, то ему подчинено (вместе с ним самим) не более 2^k чисел. При $k=0$ лидеру подчинён только он сам. Пусть лидер, выигравший k сравнений, выигрывает у кого-то в очередной раз. Тот, у кого он выиграл, по нашему соглашению выиграл не более k сравнений. Поэтому как выигравшему, так и проигравшему, подчинено не более 2^k чисел; при объединении этих двух групп получается не более 2^{k+1} чисел, что и требовалось.

Итак, наибольшее число выиграло по крайней мере m сравнений, поскольку ему в итоге будут подчинены все n чисел. Среди m чисел, проигравших наибольшему числу, есть только одно число, которое больше никому не проиграло (иначе мы не будем знать второе по величине число). Следовательно,

$k_2 \geqslant m - 1$.

Глава 34.

Функциональные уравнения

34.1. Метод подстановки

Метод подстановки позволяет решить довольно узкий класс функциональных уравнений. Он заключается в следующем. Пусть $\varphi(x)$ — функция, которая обладает таким свойством: если $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ и $\varphi_{k+1}(x) = \varphi\bigl(\varphi_k(x)\bigr)$ при $k \geqslant 1$, то $\varphi_n(x) = x$ для некоторого n. Например, если $\varphi(x) = 1-x$, то $\varphi_2(x) = x$. Предположим, что функциональное уравнение содержит только функции $f(x)$, $f\bigl(\varphi(x)\bigr), \ldots, f\bigl(\varphi_{n-1}(x)\bigr)$. Тогда вместо x можно подставить $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1}(x)$ и получить систему уравнений, которую иногда удаётся решить.

34.1. Найдите все функции $f(x)$, для которых $2f(1-x)+1 = xf(x)$.

34.2. Найдите все функции $f(x)$, которые определены при $x \neq 1$ и удовлетворяют соотношению

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

34.3. Найдите все функции $f(x)$, которые определены для всех $x \neq 0$, ± 1 и удовлетворяют соотношению

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1.$$

34.2. Функциональные уравнения для многочленов

34.4. Найдите все многочлены $P(x)$, для которых справедливо тождество $xP(x-1) = (x-26)P(x)$.

34.5. Многочлен $P(x, y)$ обладает следующим свойством: $P(x, y) = P(x+1, y+1)$ для всех x и y. Докажите, что $P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-y)^k$.

Для многочлена f степени $n+1$ выполняется равенство

$$f(x) = f(y) + (x-y)f'(y) + \ldots + (x-y)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$

При этом $f^{(n+1)}$ — константа, а значит,

$$(x-y)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} = \\ = (x-y)^n\left(\frac{-yf^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} - c\right) + (x-y)^n\left(\frac{xf^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} + c\right).$$

Таким образом, у функционального уравнения

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(x-y)^k g_k(y) + (x-y)^n h(x) \qquad (34.1)$$

есть решение следующего вида:

(а) f — многочлен степени не выше $n+1$;

(б) $g_k(y) = f^{(k)}(y)/k!$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$;

(в) $g_n(y) = f^{(n)}(y)/n! - yf^{(n+1)}(y)/(n+1)! - c$;

(г) $h(x) = xf^{(n+1)}(x)/(n+1)! + c$.

34.6. Пусть $f, g_0, \ldots, g_n, h$ — произвольные функции, которые при всех вещественных x, y, $x \neq y$, удовлетворяют уравнению (34.1). Докажите, что тогда эти функции имеют указанный выше вид (а)–(г).

34.7. а) Пусть функция f дифференцируема n раз и при всех вещественных x, y, $x \neq y$, выполняется равенство

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}f^{(k)}(y)}{(x-y)^n} = \frac{f^{(n)}(x) + f^{(n)}(y)}{(n+1)!}.$$

Докажите, что тогда f — многочлен степени не выше n.

б) Докажите, что если при всех вещественных x, y, $x \neq y$, выполняется равенство

$$\frac{f(x) - g(y)}{x-y} = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}, \qquad (34.2)$$

то f — многочлен степени не выше 2, $g = f$ и $\varphi = f'$.

34.8. Докажите, что функциональное уравнение

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = \varphi\left(\frac{x + y}{2}\right) \qquad (34.3)$$

сводится к функциональному уравнению (34.2)

34.9. а) Найдите полиномиальные решения функционального уравнения $f(\alpha x + \beta) = f(x)$ при $\alpha = \pm 1$.

б) Докажите, что если решением функционального уравнения $f(\alpha x + \beta) = f(x)$ является многочлен степени n, то $\alpha^n = 1$. (В частности, если $\alpha \neq \pm 1$, то $n \geqslant 3$).

34.10. Пусть многочлен f степени $n \geqslant 3$ удовлетворяет соотношению $f(\alpha x + \beta) = f(x)$, где $\alpha \neq \pm 1$ и $\alpha^n = 1$. Докажите, что тогда

$$f(x) = a_0 \left(x + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)^n + c.$$

34.3. Функциональные уравнения для произвольных функций

34.11. а) Предположим, что каждому рациональному числу x сопоставлено действительное число $f(x)$ так, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(xy) = f(x)f(y)$. Докажите, что либо $f(x) = x$ для всех x, либо $f(x) = 0$ для всех x.

б) Решите ту же самую задачу в случае, когда число $f(x)$ сопоставляется не только рациональным числам, но и всем действительным числам.

34.12. Найдите все функции $f(x)$, которые определены для всех x и удовлетворяют соотношению

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$$

для всех x, y.

34.13. Найдите функцию $f(x)$, которая определена для всех x, в некоторой точке отлична от нуля и для всех x, y удовлетворяет уравнению $f(x)f(y) = f(x - y)$.

* * *

34.14. Докажите, что не существует функции $f(x)$, которая определена для всех x и удовлетворяет соотношению $f(f(x)) = x^2 - 2$.

34.4. Функциональные уравнения для непрерывных функций

34.15. Непрерывная функция $f(x)$ определена для всех x и удовлетворяет соотношению

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Докажите, что $f(x) = Cx$, где $C = f(1)$.

34.16. Найдите все непрерывные функции, которые определены для всех x и удовлетворяют соотношению $f(x) = a^x f(x/2)$, где a — фиксированное положительное число.

34.17. Непрерывная функция $f(x)$ определена для всех x, причём $f(x_0) \neq 0$ для некоторого x_0. Докажите, что если выполнено соотношение

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

то $f(x) = a^x$ для некоторого $a > 0$.

34.18. Непрерывная функция $f(x)$ определена для всех $x > 0$ и удовлетворяет соотношению

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

а) Докажите, что если $f(a) = 1$ для некоторого a, то $f(x) = \log_a x$.

б) Докажите, что если $f(x_0) \neq 0$ для некоторого x_0, то $f(a) = 1$ для некоторого a.

34.19. Найдите все непрерывные решения функционального уравнения

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

34.20. Найдите все непрерывные решения функционального уравнения

$$f(x+y)f(x-y) = \big(f(x)\big)^2$$

(*Лобачевский*).

34.5. Функциональные уравнения для дифференцируемых функций

34.21. Найдите все дифференцируемые функции f, для которых $f(x)f'(x) = 0$ для всех x.

Решения

34.1. Подставив $1-x$ вместо x, получим $2f(1-x)+1=(1-x)f(1-x)$. Исходное уравнение показывает, что $f(1-x)=\frac{xf(x)-1}{2}$. Подставим это выражение в новое соотношение, получим $2f(x)+1=(1-x)\frac{xf(x)-1}{2}$, а значит, $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}$. Непосредственная проверка показывает, что эта функция удовлетворяет требуемому соотношению.

34.2. Пусть $\varphi_1(x)=\frac{1}{1-x}$. Тогда $\varphi_2(x)=1-\frac{1}{x}$ и $\varphi_3(x)=x$. Поэтому получаем систему уравнений

$$\begin{cases} f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right) &= x, \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(1-\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{1-x}, \\ f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f(x) &= 1-\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Сложим первое уравнение с третьим и вычтем из них второе уравнение. В результате получим

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right).$$

34.3. Для $\varphi_1(x)=\frac{x-1}{x+1}$ последовательно находим: $\varphi_2(x)=-\frac{1}{x}$, $\varphi_3(x)=$ $=\frac{x+1}{1-x}$ и $\varphi_4(x)=x$. Поэтому получаем систему уравнений

$$\begin{cases} xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= 1, \\ \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right) &= 1, \\ -\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)++2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) &= 1, \\ \frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2f(x) &= 1. \end{cases}$$

Чтобы сократить вычисления, поступим следующим образом. Умножим третье уравнение на $2x$ и сложим его со вторым уравнением. Затем к полученному уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на $\frac{1-x}{2(x+1)}$, и последнее уравнение, умноженное на $\frac{4x(x-1)}{x+1}$. В результате получим

$$\frac{15x(x-1)}{2(x+1)}f(x)=\frac{12x^2-3x+3}{2(x+1)}.$$

Значит, если $x\neq 0,\ \pm1$, то $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5(x+1)}$. Непосредственная проверка показывает, что эта функция $f(x)$ удовлетворяет требуемому соотношению.

34.4. Для $x = 0$ получаем $0 = -26P(0)$, т.е. $P(0) = 0$. Для $x = 1$ получаем $P(0) = -25P(1)$, т.е. $P(1) = 0$. Далее полагаем $x = 2, 3, \ldots, 25$ и последовательно получаем $2P(1) = -24P(2), \ldots, 25P(24) = -P(25)$. Поэтому $P(0) = P(1) = \ldots = P(25) = 0$. Значит, $P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-25)Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен. При этом из тождества $xP(x-1) = (x-26)P(x)$ следует, что $Q(x-1) = Q(x)$, т.е. $Q(x) = c$ — постоянное число.

34.5. Положим $t = y - x$. Тогда $P(x, t+x) = P(x+1, t+x+1)$ для всех x и t. Рассмотрим многочлен $Q(t, x) = P(x, t+x)$. Он обладает следующим свойством: $Q(t, x) = Q(t, x+1)$ для всех x. Поэтому $Q(t, x)$ не зависит от x. Действительно, фиксируем $t = t_0$ и рассмотрим многочлен $g(x) = Q(t_0, x)$. Тогда $g(x+1) - g(x) = 0$, поэтому $g(x)$ — константа.

34.6. При $y = 0$ и $y = 1$ уравнение (34.1) принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + x^n h(x), \quad x \neq 0, \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + (x-1)^n h(x), \quad x \neq 1. \tag{3}$$

Следовательно,

$$h(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (d_k - c_k) x^k}{x^n - (x-1)^n}.$$

Это равенство выполняется при $x \neq 0, 1$, а при n чётном нужно ещё исключить и $x = 1/2$.

Фиксировав $y = 2$ и $y = 4$, аналогичным образом получим равенство

$$h(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (f_k - e_k) x^k}{(x-2)^n - (x-4)^n},$$

которое выполняется при $x \neq 2, 3, 4$.

В итоге получаем h бесконечно дифференцируема, но тогда из (2) и (3) следует, что f тоже бесконечно дифференцируема.

Продифференцировав n раз по x равенство (34.1), получим

$$f^{(n)}(x) = n! g_n(y) + \frac{d^n}{dx^n}\big((x-y)^n h(x)\big).$$

При фиксированном x из этого равенства следует, что $g_n(y)$ — многочлен. Теперь можно продифференцировать равенство (34.1) по x не n, а $n-1$ раз, и аналогичным образом получить, что $g_{n-1}(y)$ — многочлен и т.д. В частности, $g_0, \ldots, g_n$ бесконечно дифференцируемы.

Продифференцируем равенство (34.1) по y и положим $y = 0$. В результате получим
$$0 = -\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}g_k(0) + \sum_{k=0}^{n} kx^k g_k'(0) - nx^{n-1}h(x).$$
Из этого равенства следует, что $x^{n-1}h(x)$ — многочлен степени не выше n. А если равенство (34.1) продифференцировать n раз по y и положить $y = 0$, то можно показать, что $h(x)$ — многочлен (тоже степени не выше n). Но если $h(x)$ — многочлен, а $x^{n-1}h(x)$ — многочлен степени не выше n, то $h(x) = ax + b$.

Так как $h(x) = ax + b$ и $f(x)$ бесконечно дифференцируема, то из (2) следует, что $f(x)$ — многочлен степени не выше $n + 1$. Поэтому
$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}x^k.$$
С другой стороны, заменив x на $x + y$, соотношение (34.1) можно записать в виде
$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{n} x^k g_k(y) + x^n(ax + ay + b).$$
Это означает, что
$$g_k(y) = \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$g_n(y) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} - ay - b \quad \text{и} \quad \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} = a.$$

34.7. Оба утверждения непосредственно следуют из задачи 34.6.

34.8. Дело в том, что если равенство (34.3) выполняется при всех вещественных x, y, $x \neq y$, то
$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}.$$
Чтобы доказать это, заменим в (34.3) x на $x + y$, а y на $x - y$. В результате получим
$$\frac{f(x+y) - g(x-y)}{2y} = \varphi(x)$$
при всех вещественных x, y, $y \neq 0$. Заменив теперь y на $-y$, получим
$$\frac{f(x-y) - g(x+y)}{-2y} = \varphi(x).$$
Следовательно,
$$f(u+v+y) - g(u+v-y) = 2y\varphi(u+v),$$
$$f(u-v+y) - g(u-v-y) = 2y\varphi(u-v)$$

и

$$f(u+v+y)-g(u-v-y)=2(v+y)\varphi(u),$$
$$f(u-v+y)-g(u+v-y)=-2(v-y)\varphi(u).$$

Поэтому

$$\varphi(u+v)+\varphi(u-v)=2\varphi(u).$$

Положив $u+v=x$, $u-v=y$, получим требуемое равенство

$$\varphi(x)+\varphi(y)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

34.9. а) Если $\alpha=1$ и $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где $a_0\neq 0$, то получаем тождество

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x+\beta)^n+a_1(x+\beta)^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Такое тождество возможно лишь в том случае, когда $a_1=a_1+a_0n\beta$, т.е. $\beta=0$.

Если $\alpha=-1$, то уравнение $f(-x+\beta)=f(x)$ после замены $g(x)=f(x+\beta/2)$ сводится к уравнению $g(x)=g(-x)$, решениями которого служат многочлены вида

$$a_0x^{2n}+a_2x^{2n-2}+\ldots+a_{2n}.$$

б) При произвольном α сравнение коэффициентов при старшем члене многочлена $f(x)=a_0x^n+\ldots$ показывает, что $\alpha^n=1$.

34.10. Достаточно рассмотреть многочлены вида $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Требуется доказать, что $a_j=\binom{n}{j}\frac{\beta^j}{(\alpha-1)^j}$ при $j=1,\ldots,n-1$. Доказательство проведём индукцией по j.

Сравнение коэффициентов при x^{n-j} для многочленов $f(x)$ и $f(\alpha x+\beta)$ показывает, что

$$(1-\alpha^{n-j})a_j=\sum_{s=0}^{j-1}a_s\binom{n-s}{j-s}\alpha^{n-j}\beta^{j-s}. \qquad (1)$$

При $j=1$ получаем $(1-\alpha^{n-1})a_1=\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta$. По условию $\alpha^n=1$, поэтому

$$a_1=\binom{n}{1}\frac{\alpha^{-1}\beta}{1-\alpha^{-1}}=\binom{n}{1}\frac{\beta}{\alpha-1}.$$

База индукции доказана.

Для доказательства шага индукции (т.е. перехода от $j=k$ к $j=k+1$) мы снова воспользуемся соотношением (1) и условием $\alpha^n=1$. По предположению индукции $a_s=\binom{n}{s}\frac{\beta^s}{(\alpha-1)^s}$ при $s=1,\ldots,k$. Поэтому

$$(1-\alpha^{n-k-1})a_{k+1}=\binom{n}{k+1}\alpha^{n-k-1}\beta^k+\sum_{s=1}^{k}\binom{n}{s}\binom{n-s}{k+1-s}\frac{\alpha^{n-k+1}\beta^{k+1}}{(\alpha-1)^s}.$$

Легко проверить, что $\binom{n}{s}\binom{n-s}{k+1-s} = \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{s}$. Поэтому

$$(1-\alpha^{n-k-1})a_{k+1} =$$
$$= \binom{n}{k+1}\alpha^{n-k-1}\beta^{k+1}\left[1+\binom{k+1}{1}\frac{1}{\alpha-1}+\ldots+\binom{k+1}{k}\frac{1}{(\alpha-1)^k}\right].$$

Ясно также, что выражение в квадратных скобках равно

$$\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^{k+1}-\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{k+1}=\frac{\alpha^{k+1}-1}{(\alpha-1)^{k+1}}.$$

Следовательно,

$$a_{k+1}=\frac{1}{1-\alpha^{n-k-1}}\binom{n}{k+1}\beta^{k+1}\frac{\alpha^n-\alpha^{n-k-1}}{(\alpha-1)^{k+1}}.$$

Учитывая, что $\alpha^n=1$, получаем

$$a_{k+1}=\binom{n}{k+1}\frac{\beta^{k+1}}{(\alpha-1)^{k+1}}.$$

34.11. а) Предположим, что $f(x)\neq 0$ хотя бы для одного числа x. Тогда из равенства $f(x+1)=f(x)f(1)$ следует, что $f(1)=1$. Далее, $f(0)=f(0+$ $+0)=f(0)+f(0)$, поэтому $f(0)=0$.

Из равенства $f(x+y)=f(x)+f(y)$ следует, что если n — натуральное число, то $f(nx)=nf(x)$. Значит, $f(n)=n$, $f(1)=nf(1/n)$, т.е. $f(1/n)=1/n$, и $f(m/n)=mf(1/n)=m/n$ для любого натурального числа m. Наконец, $f(-x)+f(x)=f(x-x)=f(0)=0$.

б) Докажем, что если $x\geqslant y$, то $f(x)\geqslant f(y)$. Действительно, если $x>y$, то $x=y+t^2$ для некоторого действительного числа t. Поэтому $f(x)=f(y)+$ $+f(t^2)=f(y)+\big(f(t)\big)^2\geqslant f(y)$.

Предположим, что $f(x)\neq x$ для некоторого действительного числа x (мы рассматриваем случай, когда $f(x)\neq 0$ хотя бы для одного числа x). Пусть, например, $f(x)>x$. Тогда существует рациональное число r, для которого $f(x)>r>x$. Из неравенства $r>x$ следует, что $f(r)\geqslant f(x)$, т.е. $r\geqslant f(x)$. Получено противоречие. Если $f(x)<x$, то рассуждения аналогичны.

34.12. Положим $x=y$. Тогда получим $2xf(x)=2x\big(f(x)\big)^2$. Если $x\neq 0$, то $f(x)=0$ или 1.

Предположим, что $f(a)=0$ для некоторого $a\neq 0$. Положив $x=a$, получим $af(y)=0$ для всех y, т.е. $f=0$.

Предположим, что $f(a)=1$ для некоторого $a\neq 0$. Положив $x=a$, получим $af(y)+y=(a+y)f(y)$, т.е. $y=yf(y)$. Значит, $f(y)=1$ для всех $y\neq 0$.

В результате получаем, что либо $f(x)=0$ для всех x, либо $f(x)=1$ для всех $x\neq 0$ и $f(0)=c$ — произвольное число.

34.13. Возьмём точку x_0, для которой $f(x_0)\neq 0$, и положим $y=0$. Тогда $f(x_0)f(0)=f(x_0)$, поэтому $f(0)=1$. Положив $x=y$, получаем

$\bigl(f(x)\bigr)^2 = f(0) = 1$. Значит, $f(x) = \pm 1$. Наконец, положив $y = x/2$, получим $f(x)f(x/2) = f(x/2)$, причём $f(x/2) = \pm 1 \neq 0$. Поэтому $f(x) = 1$.

34.14. Рассмотрим функции $g(x) = x^2 - 2$ и $h(x) = g(g(x)) = x^4 - 4x^2 + 2$. Корни уравнения $g(x) = x$ равны -1 и 2. Оба эти числа являются также и корнями уравнения $h(x) = x$. Чтобы найти остальные корни этого уравнения, поделим $x^4 - 4x^2 - x + 2$ на $x^2 - 2x - 2$. В результате получим трёхчлен $x^2 + x - 1$. Его корни равны $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Таким образом, уравнение $h(x) = x$ имеет корни

$$-1, \quad 2, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tag{1}$$

Докажем, что не существует даже функции $f(x)$, которая определена для этих четырёх значений x и удовлетворяет указанному соотношению.

Пусть a и b — числа из множества (1). Докажем, что если $f(a) = f(b)$, то $a = b$. Действительно, если $f(a) = f(b)$, то $g(a) = f(f(a)) = f(f(b)) = g(b)$. Поэтому $h(a) = h(b)$. Но $h(a) = a$ и $h(b) = b$.

Если $a = -1$ или 2, то $g(f(a)) = f(f(f(a))) = f(g(a)) = f(a)$, поэтому $f(a) = -1$ или 2.

Если $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, то $h(f(a)) = f(h(a)) = f(a)$, поэтому $f(a)$ — одно из чисел (1). Мы доказали, что f взаимно однозначно отображает множество (1) на себя. Более того, f отображает подмножество, состоящее из чисел -1 и 2, на себя. Поэтому $f(a) = a$ или $f(a) = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$. Равенство $f(a) = a$ невозможно, поскольку тогда $g(a) = a$. Таким образом, если $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, то $f(\alpha) = \beta$ и $f(\beta) = \alpha$. Но тогда $\alpha = f(\beta) = f(f(\alpha)) = g(\alpha)$. Приходим к противоречию.

34.15. Ясно, что $f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, $f(3x) = f(2x + x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$. Аналогично доказывается, что $f(nx) = nf(x)$ для любого натурального n. Далее, $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$, поэтому $f(0) = 0$, а значит, $f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0$. Таким образом, равенство $f(nx) = nf(x)$ выполняется для всех натуральных n.

Для любого рационального числа $x = m/n$ получаем $f(nx) = nf(x)$, т.е. $f(m/n) = f(m)/n = (m/n)f(1)$. Функция f непрерывна, поэтому $f(x) = xf(1)$ для любого (вещественного) x. Действительно, любое число x является пределом рациональных чисел.

34.16. Ясно, что $f(x) = a^x f(x/2) = a^x a^{x/2} f(x/4) = a^x a^{x/2} a^{x/4} f(x/8) = \ldots = a^{x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)} f(x/2^{k+1})$. Если $k \to \infty$, то $f(x/2^{k+1}) \to f(0)$, поскольку функция f непрерывна. Кроме того, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} \to 2$ при $k \to \infty$. Поэтому $f(x) = a^{2x} f(0)$. Таким образом, $f(x) = Ca^{2x}$, где C —

произвольная константа.

34.17. Равенство $f(x)f(x_0-x)=f(x_0)$ показывает, что $f(x)\neq 0$ для всех x. Но тогда $f(x)>0$ для всех x поскольку $f(x)=f(x/2)f(x/2)$.

Индукцией по n легко доказать, что

$$f(nx)=\bigl(f(x)\bigr)^n \tag{1}$$

для всех натуральных n. Ясно также, что $f(0)=1$, поскольку $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$. Кроме того, $f(x)f(-x)=f(0)=1$. Поэтому равенство (1) выполняется для всех целых n. В частности, $f(n)=a^n$, где $a=f(1)$.

Докажем теперь, что равенство $f(r)=a^r$ выполняется для любого рационального числа $r=m/n$. Запишем равенство (1) для $x=m/n$: $f(m)=(f(m/n))^n$. Учитывая, что $f(m)=a^m$, получаем $a^m=(f(m/n))^n$, т.е. $f(m/n)=a^{m/n}$.

Равенство $f(x)=a^x$ доказано для всех рациональных x. Поэтому из непрерывности функции f следует, что $f(x)=a^x$ для всех x.

34.18. а) Сделаем замену $u=\log_a x$, т.е. $x=a^u$, и рассмотрим функцию $g(u)=f(x)=f(a^u)$. Функция g тоже непрерывна. Она удовлетворяет соотношению $g(u+v)=g(u)+g(v)$. Действительно, $g(u+v)=f(a^{u+v})=f(a^u a^v)=f(a^u)+f(a^v)=g(u)+g(v)$. Поэтому согласно задаче 34.15 $g(u)=ug(1)=uf(a)=u$. Таким образом, $f(x)=g(u)=u=\log_a x$.

б) Легко проверить, что $f(x_0^n)=nf(x_0)$ для любого целого n. Поэтому функция f принимает значения как больше 1, так и меньше 1.

34.19. Ясно, что

$$f(2x)=2f(x)+\bigl(f(x)\bigr)^2=\bigl(1+f(x)\bigr)^2-1. \tag{1}$$

Покажем индукцией по n, что для любого натурального n выполняется равенство

$$f(nx)=\bigl(1+f(x)\bigr)^n-1. \tag{2}$$

Действительно, из этого равенства следует, что

$$\begin{aligned} f\bigl((n+1)x\bigr) &= f(nx+x)=f(nx)+f(x)+f(x)f(nx)=\\ &=\bigl(1+f(x)\bigr)^n-1+f(x)+f(x)\bigl(1+f(x)\bigr)^n-f(x)=\\ &=\bigl(1+f(x)\bigr)^{n+1}-1. \end{aligned}$$

Пусть $f(1)=c$. Запишем равенство (2) для $x=1$:

$$f(n)=(1+c)^n-1.$$

Запишем также это равенство для $x=m/n$:

$$f\left(n\frac{m}{n}\right)=\left(1+f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n-1.$$

Но $f\left(n\frac{m}{n}\right)=f(m)=(1+c)^m-1$, поэтому

$$\left(1+f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n=(1+c)^m, \quad \text{т.е. } f\left(\frac{m}{n}\right)=(1+c)^{m/n}-1.$$

Здесь всегда нужно брать положительное значение корня, потому что, если заменить в равенстве (1) x на $x/2$, то получим $f(x)+1=\left(1+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$.

В итоге по соображениям непрерывности получаем, что если $x>0$, то $f(x)=k^x-1$, где $k=c+1\geqslant 0$.

Положим в исходном функциональном уравнении $x=0$, а потом $y=-x$:

$$f(y)=f(0)+f(y)+f(0)f(y),$$
$$f(0)=f(x)+f(-x)+f(x)f(-x).$$

Если $f(y)\not\equiv -1$, то $f(0)=0$. В таком случае для $x>0$ получаем

$$0=k^x-1+f(-x)+(k^x-1)f(-x)=$$
$$=k^x-1+k^x f(-x),$$

откуда $f(-x)=k^{-x}-1$.

Итак, мы получили, что либо $f(x)\equiv -1$, либо $f(x)\equiv 0$, либо $f(x)=k^x-1$, где $k>0$, $k\neq 1$. Несложная проверка показывает, что все эти функции удовлетворяют данному функциональному уравнению.

34.20. Пусть $f(0)=a$ и $f(1)=b$. Положив в исходном функциональном уравнении $x=y=t/2$, получим $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{ab}=a\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}=ac^{1/2}$, где $c=b/a$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{af\left(\frac{1}{2}\right)}=ac^{1/4}$ и вообще $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=ac^{1/2^n}$ (если $a=0$, то всё равно получаем $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$, поскольку в этом случае можно обойтись без деления на a).

Положим теперь в исходном функциональном уравнении $x=\frac{1}{2^{n-1}}$ и $y=\frac{1}{2^n}$. В результате получим

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)^2,$$

т.е.

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right)=\left(ac^{1/2^{n-1}}\right)^2\left(ac^{1/2^n}\right)^{-1}=ac^{3/2^n}.$$

Ясно также, что если $f\left(\frac{m-1}{2^n}\right)=ac^{(m-1)/2^n}$ и $f\left(\frac{m}{2^n}\right)=ac^{m/2^n}$, то можно положить $x=\frac{m}{2^n}$ и $y=\frac{1}{2^n}$. Тогда из равенства

$$f\left(\frac{m+1}{2^n}\right)f\left(\frac{m-1}{2^n}\right)=\left(f\left(\frac{m}{2^n}\right)\right)^2$$

следует, что $f\left(\frac{m+1}{2^n}\right)=ac^{(m+1)/2^n}$. Значит, $f\left(\frac{m}{2^n}\right)=ac^{m/2^n}$ для всех натуральных m. Поэтому по непрерывности $f(x)=ac^x$ для всех положительных x.

Положим в исходном уравнении $x = 0$. В результате получим

$$f(y)f(-y) = \big(f(0)\big)^2 = a^2,$$

а значит, $f(-y) = \dfrac{a^2}{f(y)} = \dfrac{a^2}{ac^y} = ac^{-y}$.

Легко проверить, что функция $f(x) = ac^x$ удовлетворяет данному функциональному уравнению.

34.21. Эквивалентное условие таково: $\big(f^2(x)\big)' = 0$, поэтому функция $f^2(x)$ постоянна. Из непрерывности функции f следует, что функция $f(x)$ тоже постоянная.

Глава 35.

Цепные дроби

35.1. Определение и основные свойства

Рассмотрим бесконечную последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ... Пусть a_0 — целое число и

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1},$$

$$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{p_2}{q_2},$$

$$[a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{a_0 a_1 a_2 a_2 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} = \frac{p_3}{q_3}$$

и т.д. Дробь p_k/q_k называют *подходящей дробью* порядка k для рассматриваемой последовательности, а предел $\lim_{k\to\infty} p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ называют *цепной дробью*[1].

Каждому положительному числу α можно сопоставить его *разложение в цепную дробь*, т.е. последовательность чисел a_0, a_1, ..., для которой $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = \alpha$. А именно, $a_0 = [\alpha]$, $a_1 = \left[\dfrac{1}{\alpha - a_0}\right]$, $a_2 =$

[1]Такое название пришло из немецкого языка (Kettenbrüchen). Иногда используется название *непрерывные дроби*, которое пришло из английского языка (continued fractions).

$$= \left[\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{\alpha - a_0}}\right] \text{ и т.д.}$$

35.1. Докажите, что цепная дробь $[0; 1, 1, 1, \ldots]$ равна отношению меньшего отрезка к большему в золотом сечении, а цепная дробь $[1; 1, 1, 1, \ldots]$ — отношению большего отрезка к меньшему.

35.2. Докажите, что цепные дроби связаны с алгоритмом Евклида следующим образом. Пусть $m < n$ — два натуральных числа. Применим к ним алгоритм Евклида: $n = a_0 m + r_1$, $m = a_1 r_1 + r_2$, $r_1 = a_2 r_2 + r_3$, ..., $r_{s-1} = a_s r_s$. Пусть $x_k = [0; a_k, a_{k+1}, \ldots, a_s]$ для $k = 0$, 1, ..., s. Тогда $x_0 = \frac{m}{n}$, $x_1 = \frac{r_1}{m}$, $x_2 = \frac{r_2}{r_1}$, ..., $x_s = \frac{r_s}{r_{s-1}}$.

35.3. Пусть $p_0 = a_0$ и $q_0 = 1$.

а) Докажите, что при $k \geqslant 2$ выполняются соотношения $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ и $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$.

б) Докажите, что $p_{k-1} q_k - q_{k-1} p_k = (-1)^k$.

в) Докажите, что $p_{k-2} q_k - q_{k-2} p_k = (-1)^{k-1} a_k$.

35.4. Докажите, что последовательность p_k / q_k сходится.

35.5. Решите в натуральных числах уравнение

$$1 - [0; 2, 3, 4, \ldots, n] = [0; x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

35.6. Докажите, что

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_2 q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}.$$

Рассмотрим последовательность многочленов $K_0 = 1$, $K_1(x_1) = x_1$, $K_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n K_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + K_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2})$. Согласно задаче 35.3 а) $p_n = K_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ и $q_n = K_n(a_1, \ldots, a_n)$, т.е.

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{K_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1})}{K_n(a_1, \ldots, a_n)}.$$

35.7. Докажите, что $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ представляет собой сумму всех мономов, которые получаются из $x_1 x_2 \ldots x_n$ вычёркиванием нескольких непересекающихся пар соседних переменных $x_i x_{i+1}$. При этом можно как ничего не вычёркивать, так и вычёркивать всё; в последнем случае считаем, что остаётся моном 1. (*Эйлер*).

35.8. Докажите, что другое рекуррентное соотношение

$$K_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 K_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) + K_{n-2}(x_3, \ldots, x_n)$$

приводит к той же самой последовательности многочленов.

35.9. Докажите, что количество мономов в $K_n(x_1, \ldots, x_n)$ равно числу Фибоначчи F_{n+1}.

35.2. Наилучшие приближения

Пусть α — положительное число, x и y — целые неотрицательные числа, причём $y > 1$. Дробь x/y называют *наилучшим приближением* числа α, если для любой другой дроби a/b с меньшим знаменателем выполняется неравенство $|a - b\alpha| > |x - y\alpha|$.

35.10. Докажите, что наилучшими приближениями числа α являются подходящие дроби разложения α в цепную дробь и только они.

35.3. Цепные дроби и уравнение Пелля

Здесь мы обсудим ещё одни подход к построению решений уравнения Пелля, основанный на разложении числа $\sqrt{d}$ в цепную дробь.

35.11. Пусть d — натуральное число, свободное от квадратов. Тогда все решения уравнения $x^2 - dy^2 = \pm 1$ в натуральных числах находятся среди подходящих дробей разложения числа $\sqrt{d}$ в цепную дробь.

Теперь нужно выяснить, какие именно подходящие дроби соответствуют решениям уравнения $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

Квадратичную иррациональность α называют *приведённой*, если $\alpha > 1$ и $-1 < \alpha < 0$, т.е. $-1/\alpha' > 1$. Например, квадратичная иррациональность $[\sqrt{d}] + \sqrt{d}$ приведённая.

35.12. Докажите, что цепная дробь приведённой квадратичной иррациональности α чисто периодическая, т.е. она имеет вид $[a_0; a_1, \ldots, a_k, a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots]$.

35.13. Пусть $\sqrt{d} = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, 2a_0, a_1, \ldots]$, т.е. число k делится на период. Докажите, что тогда подходящая дробь p_{k-1}/q_{k-1} даёт решение уравнения $x^2 - dy^2 = (-1)^k$.

Решения

35.1. Пусть $x = [0; 1, 1, 1, \ldots]$. Тогда $x = \dfrac{1}{1+x}$, т.е. $x(1+x) = 1$. Ясно также, что $x > 0$. Решая квадратное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получаем требуемое.

Пусть $y = [1; 1, 1, 1, \ldots]$. Тогда $y - 1 = \dfrac{1}{y}$, т.е. $y(y-1) = 1$. Ясно также, что $y > 0$. Решая квадратное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получаем $y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{1}{x}$.

35.2. Рассмотрим последовательность чисел $y_0 = \dfrac{m}{n}$, $y_1 = \dfrac{r_1}{m}$, $y_2 = \dfrac{r_2}{r_1}$, $\ldots$, $y_s = \dfrac{r_s}{r_{s-1}}$. Каждое из этих чисел заключено между 0 и 1. Легко проверить, что $y_k = \dfrac{1}{a_k + y_{k+1}}$ при $k \leqslant s$ (полагаем $y_{s+1} = 0$). Действительно, это равенство эквивалентно равенству $r_{k-1} = r_k a_k + r_{k+1}$ (нужно положить $m = r_0$ и $n = r_{-1}$). Следовательно, $y_s = [0; a_s]$, $y_{s-1} = [0; a_{s-a}, a_s]$, $\ldots$, $y_0 = [0; a_0, \ldots, a_s]$, что и требовалось.

35.3. а) Применим индукцию по k. При $k = 2$ требуемые соотношения легко проверяются. Если a_0, a_1, $\ldots$ рассматривать как независимые переменные, то имеет место очевидное равенство

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{k+1}] = \left[a_0; a_1, \ldots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right].$$

Поэтому согласно предположению индукции

$$\begin{aligned}\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} &= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} = \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}.\end{aligned}$$

б) и в) очевидным образом следуют из а).

35.4. По построению разложения в цепную дробь $\alpha \geqslant a_0$, $\alpha \leqslant a_0 + \dfrac{1}{a_0}$ и вообще $\alpha \geqslant p_{2k}/q_{2k}$ и $\alpha \leqslant p_{2k+1}/q_{2k+1}$. Кроме того,

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Поэтому (для иррационального α)

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots < \alpha < \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Теперь сходимость последовательности p_k/q_k вытекает из того, что

$$\left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+2}}$$

и $q_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

35.5. Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $\ldots$, $x_n = n$. Выражение в левой части больше $\frac{1}{2}$, поэтому $x_1 < 2$, а значит, $x_1 = 1$. Пусть $[0; 3, 4, \ldots, n] = a$ и $[0; x_2, \ldots, x_n] = x$. Тогда $1 - \frac{1}{2+a} = \frac{1}{1+x}$, т.е. $\frac{1}{x} = 1 + a$. Таким образом, $[1; 3, 4, \ldots, n] = [x_2; x_3, \ldots, x_n]$. Ясно, что целые части выражений в левой и правой части равны 1 и x_2, поэтому $x_2 = 1$. После этого получаем равенство $[3; 4, \ldots, n] = [x_3; x_4, \ldots, x_n]$. Снова сравнивая целые части, получаем $x_3 = 3$ и т.д.

35.6. Равенство из задачи 35.3 б) можно переписать в виде $\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}q_k}$. Затем запишем $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} + \frac{(-1)^{k-2}}{q_{k-2}q_{k-1}}$ и т.д. до $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1}$.

35.7. Применим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Шаг индукции делается следующим образом. Мономы, которые получаются при вычёркивании нескольких пар $x_i x_{i+1}$, можно разбить на две группы: те, в которых переменная x_n не вычеркнута, и те, в которых переменная x_n вычеркнута. Поскольку вместе с x_n обязательно вычёркивается x_{n-1}, это разбиение согласуется с рекуррентным соотношением.

35.8. Те же самые рассуждения, что и в задаче 35.7, лишь с заменой x_n на x_1, показывают, что новая последовательность многочленов характеризуется с помощью вычёркиваний точно так же, как и старая.

35.9. Пусть $a_n = K_n(1, 1, \ldots, 1)$. Тогда $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$.

35.10. Предположим сначала, что x/y — наилучшее приближение числа $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, которое не совпадает ни с одной подходящей дробью p_n/q_n. Покажем, что тогда $p_0/q_0 < x/y < p_1/q_1$. Действительно, если $x/y < p_0/q_0 = a_0$, то

$$0 \leqslant \alpha - a_0 < \alpha - \frac{x}{y} \leqslant y\left(\alpha - \frac{x}{y}\right) = \alpha y - x.$$

Поэтому $|x - \alpha y| > |\alpha - a_0|$, чего не может быть. А если $x/y > p_1/q_1 \geqslant \alpha$, то

$$0 \leqslant \frac{x}{y} - \frac{p_1}{q_1} \leqslant \frac{x}{y} - \alpha,$$

поэтому

$$\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| \geqslant \left|\frac{x}{y} - \frac{p_1}{q_1}\right| \geqslant \frac{1}{yq_1},$$

а значит,

$$|x - \alpha y| \geqslant \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1} \geqslant |a_0 - \alpha|,$$

чего тоже не может быть.

Из того, что точка x/y лежит внутри отрезка $[p_0/q_0, p_1/q_1]$, следует, что она лежит между точками p_{n-1}/q_{n-1} и p_{n+1}/q_{n+1} (по предположению она не совпадает ни с одной из них). Таким образом, при нечётном n

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{x}{y} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \leqslant \alpha \leqslant \frac{p_n}{q_n}$$

(при чётном n все неравенства заменяются на противоположные). Поэтому получаем неравенства

$$\begin{aligned}
\frac{1}{yq_{n-1}} &\leqslant \left|\frac{x}{y} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}},\\
\frac{1}{yq_{n+1}} &\leqslant \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{x}{y}\right| \leqslant \left|\alpha - \frac{x}{y}\right|,\\
\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| &\leqslant \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Значит, $q_n < y$ и $|x - \alpha y| \geqslant \dfrac{1}{q_{n+1}} \geqslant |p_n - \alpha q_n|$. Это противоречит тому, что x/y — наилучшее приближение числа α.

Предположим теперь, что $x/y = p_n/q_n$. Требуется доказать, что если $a/b \neq p_n/q_n$ и $1 \leqslant b < q_n$, то

$$|p_n - q_n\alpha| \leqslant |a - b\alpha|. \tag{35.1}$$

Из равенств

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| + \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

и

$$\left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \alpha\right| = \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{a_{n+1}}{q_{n-1} q_{n+1}}$$

следуют неравенства

$$\frac{1}{q_{n+1}} \leqslant |p_{n-1} - q_{n-1}\alpha| \leqslant \frac{1}{q_n} \tag{35.2}$$

и равенство

$$q_n|p_{n-1} - q_{n-1}\alpha| + q_{n-1}|p_n - q_n\alpha| = 1. \tag{35.3}$$

Если $a = p_{n-1}$ и $b = q_{n-1}$, то согласно (35.2)

$$|p_n - q_n\alpha| \leqslant \frac{1}{q_{n+1}} \leqslant |p_{n-1} - q_{n-1}\alpha| = |a - b\alpha|.$$

Поэтому будем считать, что $|aq_{n-1} - bp_{n-1}| \geqslant 1$. Тогда
$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} -\right| \geqslant \left|a - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} -\right| \geqslant \frac{1}{bq_{n-1}},$$
т.е.
$$q_{n-1}|a - b\alpha| + b|p_{n-1} - q_{n-1}\alpha| \geqslant 1. \qquad (35.4)$$
Поскольку $b < q_n$, из равенства (35.3) следует неравенство
$$b|p_{n-1} - q_{n-1}\alpha| + q_{n-1}|p_n - q_n\alpha| \leqslant 1. \qquad (35.5)$$
Из неравенств (35.5) и (35.4) получаем $|p_n - q_n\alpha| \leqslant |a - b\alpha|$, что и требовалось.

35.11. Согласно задаче 35.10 достаточно проверить, что если $x^2 - dy^2 = \pm 1$, где x и y — натуральные числа, то x/y — наилучшее приближение числа $\sqrt{d}$ (случай $y = 1$ легко разбирается отдельно). Для начала заметим, что
$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| = \frac{x}{y}\left|\frac{x^2 - y^2 d}{x + y\sqrt{d}}\right| \frac{1}{y(x + y\sqrt{d})}.$$
Кроме того, $x^2 = dy^2 \pm 1 \geqslant (d-1)y^2$, поэтому $x + y\sqrt{d} \geqslant (\sqrt{d+1} + \sqrt{d})y > 2y$ при $d \geqslant 2$. Следовательно, $|x - y\sqrt{d}| < \dfrac{1}{2y}$.

Пусть $a/b \neq x/y$ и $|a - b\sqrt{d}| \leqslant |x - y\sqrt{d}|$ (a — целое число, b — натуральное число). Тогда
$$\frac{1}{by} \leqslant \left|\frac{a}{b} - \frac{x}{y}\right| \left|\sqrt{d} - \frac{a}{b}\right| + \left|\sqrt{d} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2by} + \frac{1}{2y^2} = \frac{y+b}{2by^2}.$$
Поэтому $2y < y + b$, т.е. $b > y$. Это означает, что x/y — наилучшее приближение числа $\sqrt{d}$.

35.12. Число α является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — целые числа, поэтому $\alpha = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{P \pm \sqrt{D}}{Q}$. Изменив при необходимости знак числа $Q = 2a$, можно считать, что $\alpha = \dfrac{P + \sqrt{D}}{Q}$.

Пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Рассмотрим остаточный член $\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$; при этом $\alpha = [a_0; a_1, , \ldots, a_{k-1}, \alpha_k]$.

Шаг 1. *Остаточные члены α_k принимают лишь конечное число различных значений. В частности, $\alpha_k = \alpha_l$ для некоторых различных k и l.*

Из равенства $\alpha = \dfrac{P + \sqrt{D}}{Q}$ следует, что $\alpha' = \dfrac{P - \sqrt{D}}{Q}$. Поэтому
$$\frac{2\sqrt{D}}{Q} = \alpha - \alpha' > \alpha > 0 \text{ и } \frac{2P}{Q} = \alpha + \alpha' > 0.$$
Значит, $Q > 0$ и $P > 0$. По условию $\alpha' < 0$ и $\alpha > 1$, поэтому $P < \sqrt{D}$ и $Q < P + \sqrt{D} < 2\sqrt{D}$. Таким образом, при фиксированном D существует

лишь конечное число приведённых квадратичных иррациональностей вида $\dfrac{P+\sqrt{D}}{Q}$.

Покажем, что α_1 — приведённая квадратичная иррациональность вида $\dfrac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}$. Неравенство $\alpha_1 > 1$ следует непосредственно из определения. Из соотношения $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ следует, что $-\dfrac{1}{\alpha_1} = a_0 - \alpha$; поэтому $-\dfrac{1}{\alpha_1'} = a_0 - \alpha' > 1$. Далее,

$$\frac{1}{\alpha_1} = \alpha - a_0 = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} - a_0 = \frac{-P_1+\sqrt{D}}{Q},$$

где $P_1 = a_0Q - P$. Напомним, что $P = -b$, $Q = 2a$ и $D = b^2 - 4ac$. Поэтому число $P_1^2 - D = 4ac$ делится на Q. Следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{Q}{-P_1+\sqrt{D}} = \frac{Q(P_1+\sqrt{D})}{P_1^2 - D} = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}.$$

Индукция по k показывает, что α_k — приведённая квадратичная иррациональность вида $\dfrac{P_k+\sqrt{D}}{Q_k}$, где P_k, Q_k — целые числа, поскольку $\alpha_k = a_k + \dfrac{1}{\alpha_{k+1}}$. Мы уже показали, что количество приведённых квадратичных иррациональностей такого вида конечно.

Шаг 2. *Если* $\alpha_k = \alpha_l$ *и* $k, l \geqslant 1$, *то* $\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}$.

Достаточно проверить, что если α и α_1 — приведённые квадратичные иррациональности, связанные соотношением вида $\alpha = a_0 + \alpha_1^{-1}$, где a_0 — натуральное число, то число α однозначно восстанавливается по α_1. Ясно, что $\dfrac{-1}{\alpha_1'} = a_0 - \alpha'$ и $-\alpha' \in (0,\, 1)$. Поэтому $a_0 = \left[-\dfrac{1}{\alpha_1'}\right]$. Число a_0 однозначно восстанавливается по α_1, поэтому число α тоже восстанавливается.

35.13. Рассмотрим число

$$\alpha = [\sqrt{d}] + \sqrt{d} = [2a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha] = \frac{\hat{p}_{k-1}\alpha + \hat{p}_{k-2}}{\hat{q}_{k-1}\alpha + \hat{q}_{k-2}},$$

где $\dfrac{\hat{p}_{k-1}}{\hat{q}_{k-1}} = \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + a_0$. Это число удовлетворяет квадратному уравнению

$$\hat{q}_{k-1}\alpha^2 + (\hat{q}_{k-2} - \hat{p}_{k-1})\alpha - \hat{p}_{k-2} = 0.$$

С другой стороны, $\alpha = a_0 + \sqrt{d}$, поэтому

$$\alpha^2 - 2a_0\alpha + (a_0^2 - d) = 0.$$

Следовательно, $\hat{p}_{k-1} - \hat{q}_{k-2} = 2a_0\hat{q}_{k-1}$ и $\hat{p}_{k-2} = (d - a_0^2)\hat{q}_{k-1}$.

Соотношение $\hat{p}_{k-2}\hat{q}_{k-1} - \hat{q}_{k-2}\hat{p}_{k-1} = (-1)^{k-1}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1} &= (d - a_0^2)q_{k-1}^2 - \hat{p}_{k-1}(\hat{p}_{k-1} - 2a_0q_{k-1}) = \\ &= (d - a_0^2)q_{k-1}^2 - (p_{k-1} + a_0q_{k-1})(p_{k-1} - a_0q_{k-1}) = \\ &= dq_{k-1}^2 - p_{k-1}^2.\end{aligned}$$

Глава 36.

Формальные ряды и производящие функции

36.1. Формальные ряды

Формальным рядом называют выражение вида $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ +\ldots$. При этом ряд может расходиться при всех $x \neq 0$; нас интересуют только коэффициенты a_0, a_1, ... Тем не менее, мы будем использовать обозначение $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$; при этом функция f может быть не определена для всех $x \neq 0$.

Для формальных рядов $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ и $g(x) = b_0+b_1x+ +b_2x^2+\ldots$ можно определить их *сумму* и *произведение* как формальные ряды

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots,$$

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \ldots.$$

Формальный ряд, для которого $a_0 = 1$ и $a_k = 0$ при $k \geqslant 1$, мы будем обозначать 1.

Будем считать, что $f(\lambda x) = g(x)$, если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ и $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$, где $b_k = \lambda^k a_k$.

36.1. Пусть $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ и $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$. Вычислите произведения: а) $f(x)f(x)$; б) $f(x)g(x)$.

36.2. Пусть $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$. Вычислите формальный ряд $g(x)$, для которого $f(x)g(x) = 1$.

36.3. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ — формальный ряд, причём $a_0 \neq 0$. Докажите, что существует единственный формальный ряд $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$, для которого $f(x)g(x) = 1$.

36.2. Формальная производная

Формальной производной формального ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ называют формальный ряд $D\big(f(x)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.

36.4. Докажите, что формальная производная обладает следующими свойствами обычной производной:

а) $D\big(f(x) + g(x)\big) = D\big(f(x)\big) + D\big(g(x)\big)$;

б) $D\big(f(x)g(x)\big) = f(x)D\big(g(x)\big) + g(x)D\big(f(x)\big)$;

в) $D\Big(\big(f(x)\big)^n\Big) = n\big(f(x)\big)^{n-1}D\big(f(x)\big)$ для любого натурального n;

г) если существует формальный ряд $\big(f(x)\big)^{-1}$, то $D\Big(\big(f(x)\big)^{-1}\Big) = -\big(f(x)\big)^{-2}D\big(f(x)\big)$ и $D\Big(\big(f(x)\big)^{-n}\Big) = -n\big(f(x)\big)^{n-1}D\big(f(x)\big)$ для любого натурального n.

д) $D(f^r) = rf^{r-1}D(f)$ для любого рационального числа r и любого формального ряда $f = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$.

36.5. Для формального ряда $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ положим $S(f) = a_0$. Докажите, что $f = \sum_{n=0}^{\infty} S\big(D^n(f)\big)\dfrac{x^n}{n!}$.

36.3. Корень из формального ряда

36.6. Докажите, что для любого натурального n и любого формального ряда $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ существует единственный формальный ряд $g(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$, для которого $\big(g(x)\big)^n = f(x)$.

Ряд $g(x)$ мы будем обозначать $\sqrt[n]{f(x)}$ или $\big(f(x)\big)^{1/n}$.

36.7. Докажите, что для любого рационального числа r

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

36.4. Экспонента и логарифм

Назовём *формальной экспонентой* формальный ряд

$$\operatorname{Exp}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

36.8. Докажите, что: а) $\operatorname{Exp}\bigl((a+b)x\bigr) = \operatorname{Exp}(ax)\cdot\operatorname{Exp}(bx)$; б) $\operatorname{Exp}(kx) = \bigl(\operatorname{Exp}(x)\bigr)^k$ для любого натурального числа k.

36.9. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^m\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < m < n,\\ n! & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Пусть $f = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ — формальный ряд. *Формальным логарифмом* f называют формальный ряд

$$\operatorname{Ln}(f) = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{g^k}{k},$$

где $g = f - 1 = a_1x + a_2x^2 + \ldots$. Отметим, что формальный ряд $\operatorname{Ln}(f)$ корректно определён, поскольку коэффициент при x^n полностью определяется конечной суммой $g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}g^n$.

36.10. Докажите, что $D\bigl(\operatorname{Ln}(f)\bigr) = f^{-1}D(f)$.

36.11. Докажите, что если $f = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ и $h = 1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$, то $\operatorname{Ln}(fh) = \operatorname{Ln}(f) + \operatorname{Ln}(h)$.

36.12. Докажите, что $\operatorname{Ln}(f^r) = r\operatorname{Ln}(f)$ для любого рационального числа r.

36.13. Докажите, что если $\operatorname{Ln}(f) = \operatorname{Ln}(h)$, то $f = h$.

36.14. Докажите, что если $g = a_1x + a_2x^2 + \ldots$ и r — любое рациональное число, то

$$(1+g)^r = 1 + rg + \frac{r(r-1)}{2!}g^2 + \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}g^n + \ldots$$

36.15. Бесконечные последовательности a_0, a_1, …и b_0, b_1, …таковы, что $b_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i$ для всех $n \geqslant 0$. Докажите, что тогда $a_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}b_i$ для всех $n \geqslant 0$.

36.5. Тождества для формальных рядов

36.16. Докажите, что бесконечному произведению $\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m)$ соответствует корректно определённый формальный ряд.

36.17. Докажите следующие тождества:

а) $$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})^2=\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m})^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{k^2};$$

б) $$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{m})=\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^{m})\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{k^2}\quad(\textit{Гаусс}).$$

36.18. Пусть $s(n)$ — сумма тех простых делителей d числа n, для которых n/d нечётно ($s(n)=0$ при $n\leqslant 0$).

а) Пусть $f=\prod_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ и $g=\sum_{n=1}^{\infty}s(n)x^{n-1}$. Докажите, что $D(f)=-2fg$.

б) Докажите, что $s(n)-2s(n-1)+2s(n-2^2)-2s(n-3^2)+\ldots=(-1)^{n+1}n$, если n — полный квадрат; в противном случае эта альтернированная сумма равна нулю.

36.19. а) Используя результат задачи 36.18 б), докажите, что любое простое число p вида $4k+1$ можно представить в виде суммы двух квадратов.

б) Докажите, что любое простое число p вида $8k+3$ можно представить в виде суммы трёх квадратов.

36.6. Производящие функции

Производящей функцией последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называют формальный ряд $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Наибольший интерес производящие функции представляют в том случае, когда им соответствуют ряды, сходящиеся хотя бы на каком-то интервале.

36.20. Докажите, что производящая функция последовательности $a_k=\binom{n}{k}$, $k=0, 1, \ldots, n$, равна $(1+x)^n$.

36.21. Пусть $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k$ — производящая функция для последовательности чисел Каталана, т.е. $c_1=1$, $c_2=c_1c_1$ и $c_k=c_1c_{k-1}+c_2c_{k-2}+\ldots+c_{k-1}c_1$ при $k\geqslant 3$.

а) Докажите, что $\bigl(f(x)\bigr)^2 = f(x) - x$.

б) Докажите, что $c_n = \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

36.7. Числа и многочлены Бернулли

Согласно задаче 36.3 формальный ряд $\left(\dfrac{\operatorname{Exp}(x)-1}{x}\right)^{-1}$ определён однозначно. Запишем этот формальный ряд в виде $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} x^n$. Числа B_n называют *числами Бернулли*. Непосредственно из определения видно, что $B_0 = 1$.

Многочлены Бернулли определяются равенством $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} z^k$. Это равенство можно формально записать в виде $B_n(z) = (B+z)^n$, где подразумевается, что вместо B^k мы пишем B_k.

36.22. Докажите, что при $k > 1$ для чисел Бернулли выполняется равенство $\sum_{p=1}^{k} B_p \binom{k}{p} = B_k$, т.е. $\sum_{p=1}^{k-1} B_p \binom{k}{p} = 0$.

Равенство из задачи 36.22 формально можно записать в виде $(B+1)^k = B_k$, где подразумевается, что вместо B^p мы пишем B_p.

36.23. Докажите, что $B_n(0) = B_n(1) = B_n$.

36.24. С помощью тождества из задачи 36.22 вычислите B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5.

36.25. Докажите, что $B_{2k+1} = 0$ для всех натуральных k.

36.26. а) Докажите, что $B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}$ при $n \geqslant 2$.

б) Докажите, что при $n \geqslant 1$

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n = \frac{1}{n+1}\bigl(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(0)\bigr).$$

36.27. Докажите, что $B_n'(z) = nB_{n-1}(z)$.

36.8. Число разбиений

Пусть $p(n)$ — количество способов, которыми можно представить число n в виде суммы натуральных слагаемых (слагаемые могут быть одинаковыми; два представления, которые отличаются лишь порядком

слагаемых, считаются одинаковыми). Число $p(n)$ называют *числом разбиений*.

Например, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$ $(1+1; 2)$, $p(3) = 3$ $(1+1+1; 1+2; 3)$, $p(4) = 5$ $(1+1+1+1; 1+1+2; 1+3; 2+2; 4)$ и т.д.

36.28. Докажите, что

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right)^{-1}.$$

36.29. Докажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right)$$

(*тождество Эйлера*).

36.30. Докажите, что

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(p\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right)\right)$$

(предполагается, что $p(0) = 1$ и $p(m) = 0$ при $m < 0$).

36.31. Пусть $d(n)$ — количество разбиений числа n на разные слагаемые, $l(n)$ — количество разбиений числа n на нечётные слагаемые. Докажите, что $d(n) = l(n)$. (*Эйлер*)

36.9. Формулы Варинга

Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические функции от $x_1, \ldots, x_n$, т.е. $\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n$, $\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, $\ldots$, $\sigma_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Пусть, далее, $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$.

36.32. Докажите, что

$$\frac{(-1)^k s_k}{k} = \sum \frac{(-1)^{l_1+l_2+\ldots+l_n}(l_1+l_2+\ldots+l_n-1)!}{l_1!\ldots l_n!}\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n},$$

где суммирование ведётся по всем наборам целых неотрицательных чисел $l_1, \ldots, l_n$, для которых $l_1 + 2l_2 + \ldots + nl_n = k$ (*первая формула Варинга*).

36.33. Докажите, что

$$(-1)^k\sigma_k = \sum \frac{(-1)^{l_1+l_2+\ldots+l_n}}{1^{l_1}2^{l_2}\ldots n^{l_n} l_1!\ldots l_n!} s_1^{l_1}\ldots s_n^{l_n},$$

где суммирование ведётся по всем наборам целых неотрицательных чисел $l_1, \ldots, l_n$, для которых $l_1 + 2l_2 + \ldots + kl_k = k$ (*вторая формула Варинга*).

Решения

36.1. Ответ: а) $1 + 2x + 3x + 4x + \ldots$; б) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$.

36.2. Ответ: $g(x) = 1 - x$.

36.3. Должны выполняться равенства $a_0b_0 = 1$, $a_1b_0 + a_0b_1 = 0$, $a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0$, … Из этих равенств следует, что $b_0 = \frac{1}{a_0}$, $b_1 = -\frac{a_1b_0}{a_0}$, $b_2 = -\frac{a_2b_0 + a_1b_1}{a_0}$ и т.д.

36.4. б) Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k$. Коэффициент при x^{k-1} у формального ряда $D\big(f(x)g(x)\big)$ равен $k\sum_{i+j=k} a_ib_j$, а у формального ряда $f(x)D\big(g(x)\big) + g(x)D\big(f(x)\big)$ коэффициент при x^{k-1} равен $\sum_{i+j=k} ja_ib_j + \sum_{i+j=k} ia_ib_j = k\sum_{i+j=k} a_ib_j$.

в) Применим индукцию по n, воспользовавшись задачей б): $D\Big(\big(f(x)\big)^{n+1}\Big) = D\Big(f(x)\cdot\big(f(x)\big)^n\Big) = f(x)D\Big(\big(f(x)\big)^n\Big) + \big(f(x)\big)^nD\big(f(x)\big) = nf(x)\big(f(x)\big)^{n-1}D\big(f(x)\big) + \big(f(x)\big)^nD\big(f(x)\big) = (n+1)\big(f(x)\big)^nD\big(f(x)\big)$.

г) Применим результат задачи б) к произведению $f(x)\cdot\big(f(x)\big)^{-1} = 1$. В результате получим $fD(f^{-1}) + f^{-1}D(f) = 0$, т.е. $D(f^{-1}) = -f^{-2}D(f)$. Затем воспользуемся результатом задачи в): $D(f^{-n}) = D\big((f^{-1})^n\big) = n(f^{-1})^{n-1}D(f^{-1}) = -nf^{-n-1}D(f)$.

д) Задача 36.3 показывает, что ряд f^r однозначно определён. Пусть $r = m/n$, где m и n — целые числа. Тогда согласно задаче в) $D\big((f^r)\big) = n(f^r)^{n-1}D(f^r)$ и $D\big((f^r)\big) = D(f^m) = mf^{m-1}D(f)$. Поэтому $D(f^r) = \frac{m}{n}\frac{f^{m-1}}{f^{rn-r}}D(f) = r\frac{f^{m-1}}{f^{m-r}}D(f) = rf^{r-1}D(f)$.

36.5. Согласно определению $D^n(f) = \sum_{j=n}^{\infty} j(j-1)\ldots(j-n+1)a_jx^{j-n}$. Поэтому $S\big(D^n(f)\big) = n!a_n$.

36.6. Индукцией по n легко доказать, что $(1+b_1x+b_2x^2+\ldots)^n = 1+c_1x + c_2x^2 + \ldots$, где $c_1 = nb_1$, $c_2 = nb_2 + p_{n,2}(b_1)$, $c_3 = nb_3 + p_{n,3}(b_1, b_2)$, …, $c_k = nb_k + p_{n,k}(b_1, \ldots, b_{k-1})$, … (здесь $p_{n,m}$ — многочлены с целыми коэффициентами). Из равенств $a_1 = nb_1$, $a_2 = nb_2 + p_{n,2}(b_1)$, $a_3 = nb_3 + p_{n,3}(b_1, b_2)$, …, последовательно получаем $b_1 = \frac{a_1}{n}$, $b_2 = \frac{a_2 - p_{n,2}(b_1)}{n}$, $b_3 = \frac{a_3 - p_{n,3}(b_1, b_2)}{n}$ и т.д.

36.7. Согласно задаче 36.4 д) $D\big((1+x)^r\big) = r(1+x)^{r-1}D(1+x) = r(1+x)^{r-1}$. Поэтому индукцией по n получаем $D^n\big((1+x)^r\big) =$

$= r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$. Воспользуемся теперь формулой из задачи 36.5. Если $f = (1+x)^r$, то $S\big(D^n(f)\big) = r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)$. Поэтому

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} S\big(D^n(f)\big)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)}{n!}x^n.$$

36.8. а) Требуется доказать, что $\dfrac{(a+b)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{a^k}{k!}\dfrac{b^{m-k}}{(m-k)!}$, т.е. $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{m!}{k!(m-k)!}a^k b^{m-k}$. Но $\dfrac{m!}{k!(m-k)!} = \dbinom{m}{k}$.

б) Следует из а) индукцией по k.

36.9. Рассмотрим сумму формальных рядов $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\operatorname{Exp}(kx) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{k^m x^m}{m!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k^m\binom{n}{k}\right)\dfrac{x^m}{m!}$. Если воспользоваться результатом задачи 36.8 б), то эту сумму можно записать следующим образом: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\operatorname{Exp}(kx) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\big(\operatorname{Exp}(x)\big)^k = \big(\operatorname{Exp}(x)-1\big)^n = \left(x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right)^n$. У полученного формального ряда коэффициент при x^m, где $m < n$, равен нулю, а коэффициент при x^n равен 1.

36.10. Ясно, что $D\big(\operatorname{Ln}(f)\big) = D(g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \dots)$. Воспользовавшись тем, что каждый коэффициент формального ряда $\operatorname{Ln}(f)$ определяется конечной суммой, получим $D(g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \dots) = D(g) - \frac{1}{2}D(g^2) + \frac{1}{3}D(g^3) - \dots = D(g) - gD(g) + gD(g^2) - \dots = D(g)(1 - g + g^2 - \dots) = D(g)(1+g)^{-1} = f^{-1}D(f)$, поскольку $D(f) = D(f-1) = D(g)$.

36.11. Воспользовавшись результатом задачи 36.10 и свойствами формальной производной, получим $D\big(\operatorname{Ln}(fh)\big) = (fh)^{-1}D(fh) = (fh)^{-1}\big(fD(h) + hD(f)\big) = h^{-1}D(h) + f^{-1}D(f) = D\big(\operatorname{Ln}(f) + \operatorname{Ln}(h)\big)$. Кроме того, формальные ряды $\operatorname{Ln}(fh)$ и $\operatorname{Ln}(f) + \operatorname{Ln}(h)$ имеют нулевые коэффициенты при x^0. Поэтому $\operatorname{Ln}(fh) = \operatorname{Ln}(f) + \operatorname{Ln}(h)$.

36.12. Сначала докажем, что $\operatorname{Ln}(f^{-1}) = -\operatorname{Ln}(f)$. Согласно задаче 36.11 из равенства $f^{-1}f = 1$ следует, что $\operatorname{Ln}(f^{-1}) + \operatorname{Ln}(f) = \operatorname{Ln}(f^{-1}f) = \operatorname{Ln}(1) = 0$.

С помощью задачи 36.11 индукцией по n получаем $\operatorname{Ln}(f^n) = n\operatorname{Ln}(f)$ для любого натурального n. Кроме того, равенство $\operatorname{Ln}(f^{-1}) = -\operatorname{Ln}(f)$ показывает, что $\operatorname{Ln}(f^n) = n\operatorname{Ln}(f)$ для любого целого n.

Если $r = m/n$, где числа m и n целые, то $m\operatorname{Ln}(f) = \operatorname{Ln}(f^m) = \operatorname{Ln}\big((f^r)^n\big) = n\operatorname{Ln}(f^r)$, поэтому $\operatorname{Ln}(f^r) = \dfrac{m}{n}\operatorname{Ln}(f) = r\operatorname{Ln}(f)$.

36.13. Сначала докажем, что если $\operatorname{Ln}(f) = 0$, то $f = 1$. Действительно, $D\big(\operatorname{Ln}(f)\big) = D(0) = 0$, поэтому $f^{-1}D(f) = 0$. Значит, $D(f) = 0$ и $f = 1$.

Если $\mathrm{Ln}(f) = \mathrm{Ln}(h)$, то согласно задаче 36.11 $\mathrm{Ln}(f^{-1}h) = \mathrm{Ln}(f^{-1}) + \mathrm{Ln}(h)$. Кроме того, согласно задаче 36.12 $\mathrm{Ln}(f^{-1}) = -\mathrm{Ln}(f)$. Поэтому $\mathrm{Ln}(f^{-1}h) = 0$ и $f^{-1}h = 1$.

36.14. Будем использовать обозначение $\binom{r}{n}\dfrac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}$ для любого рационального числа r и натурального числа n. Пусть $h = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{r}{n}g^{n-1}$. Требуется доказать, что $(1+g)^r = h$. Ясно, что $D(h) = D(g)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{r}{n}g^{n-1}$, поэтому

$$
\begin{aligned}
(1+g)D(h) &= D(g)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{r}{n}g^{n-1} + D(g)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{r}{n}g^{n} = \\
&= D(g)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{r}{n}g^{n-1} + D(g)\sum_{n=2}^{\infty} n\binom{r}{n-1}g^{n-1} = \\
&= rD(g) + D(g)\sum_{n=2}^{\infty}\left(n\binom{r}{n} + (n-1)\binom{r}{n-1}\right)g^{n-1} = \\
&= rD(g) + D(g)\sum_{n=2}^{\infty} r\binom{r}{n}g^{n-1} = \\
&= rD(g)\left(\sum_{n=1}^{\infty} r\binom{r}{n}g^{n}\right) = rD(g)h.
\end{aligned}
$$

Умножив обе части этого равенства на $h^{-1}(1+g)^{-1}$, получаем $h^{-1}D(h) = r(1+g)^{-1}D(g) = r(1+g)^{-1}D(1+g)$. Учитывая, что $h^{-1}D(h) = D\big(\mathrm{Ln}(h)\big)$ и $r(1+g)^{-1}D(1+g) = D\big(r\,\mathrm{Ln}(1+g)\big) = D\big(\mathrm{Ln}\big(1+g)^r\big)$, получаем $D\big(\mathrm{Ln}(h)\big) = D\big(\mathrm{Ln}\big(1+g)^r\big)$. У формальных рядов $\mathrm{Ln}(h)$ и $\mathrm{Ln}\big(1+g)^r\big)$ коэффициенты при x^0 равны нулю, поэтому $\mathrm{Ln}(h) = \mathrm{Ln}\big(1+g)^r\big)$. Воспользовавшись результатом задачи 36.13, получаем $h = (1+g)^r$.

36.15. Рассмотрим формальные ряды $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n x^n}{n!}$ и $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n x^n}{n!}$. По условию

$$
\frac{b_n x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{a_n x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{a_n x^n}{i!(n-i)!}.
$$

Значит,

$$
B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_n x^n}{i!(n-i)!} = \mathrm{Exp}(x)A(x).
$$

Умножив обе части этого равенства на $\mathrm{Exp}(-x)$, получим $A(x) = \mathrm{Exp}(-x)B(x)$. Сравнивая коэффициенты при $x^n/n!$, получаем $a_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}b_i$.

36.16. Коэффициент при x^n зависит лишь от конечного произведения $\prod_{m=1}^{n}(1+x^m)$.

36.17. а) Положим

$$F(y)=\prod_{i=1}^{n}(1+x^{2i-1}y)(y+x^{2i-1})=\sum_{i=-n}^{n}A_i(x)y^{n+i}, \qquad (1)$$

где $A_i(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Несложная проверка показывает, что

$$(y+x^{2n-1})F(x^2y)=x^{2n-1}(1+x^{2n+1}y)F(y), \text{ т.е.}$$

$$(y+x^{2n-1})\sum_{i=-n}^{n}A_i(x)x^{2n+2i}y^{n+i}=x^{2n-1}(1+x^{2n+1}y)\sum_{i=-n}^{n}A_i(x)y^{n+i}.$$

Приравнивая коэффициенты при y^{n+i}, получаем

$$A_{i-1}(x)x^{2n+2i-2}+A_i(x)x^{4n+2i-1}=A_{i-1}(x)x^{4n}+A_i(x)x^{2n-1}, \text{ т.е.}$$

$$A_{i-1}(x)=A_i(x)\frac{1-x^{2n+2i}}{x^{2i-1}-x^{2n+1}}=A_i(x)\frac{1-x^{2n+2i}}{x^{2i-1}(1-x^{2n-2i+2})}.$$

Ясно также, что $A_n(x)=x\cdot x^3\cdot x^5\ldots x^{2n-1}=x^{n^2}$. Поэтому

$$A_{n-k}(x)=x^{(n-k)^2}\frac{(1-x^{4n})(1-x^{4n-2})\ldots(1-x^{4n-2k+2})}{(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2k})}, \text{ т.е.}$$

$$A_j(x)=x^{j^2}\prod_{i=1}^{n-j}(1-x^{4n-2i+2})(1-x^{2i})^{-1}=$$

$$=x^{j^2}\prod_{i=1}^{n-j}(1-x^{4n-2i+2})(1+x^{2i}+x^{4i}+x^{6i}+\ldots).$$

Положим в равенстве (1) $y=-1$. В результате получим

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x^{2i-1})^2=\sum_{i=-n}^{n}(-1)^iA_i(x).$$

Тождество а) теперь легко получается при $n\to\infty$. Действительно, фиксируем r. Коэффициент при x^r в выражении $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})^2$ такой же, как в выражении $\prod_{i=1}^{n}(1-x^{2i-1})^2$ при достаточно большом n. Далее, у многочлена $A_i(x)$ коэффициент при x^r равен нулю при $r<i^2$. Если же $r\geqslant i^2$, то при достаточно большом n у многочлена $A_i(x)$ коэффициент при x^r такой же, как коэффициент при x^r в выражении $x^{i^2}\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m})^{-1}$.

б) Воспользуемся тождеством а), предварительно умножив обе части на $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m})(1+x^m)$. В результате получим

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kx^{k^2}=\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})^2(1-x^{2m})(1+x^m).$$

Затем воспользуемся очевидными тождествами $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})(1-x^{2m}) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$ и $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)(1+x^m) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m})$. Ещё раз применив первое из этих тождеств, получим требуемое.

36.18. а) Пусть $f_m = \prod_{n=1}^{m} \frac{1-x^n}{1+x^n}$. Тогда $D(\mathrm{Ln}(f_m)) = D\left(\sum_{n=1}^{m}(\mathrm{Ln}(1-x^n) - \mathrm{Ln}(1+x^n))\right)$. Воспользовавшись тем, что $D(\mathrm{Ln}(h)) = h^{-1}D(h)$, получаем

$$\begin{aligned} D(\mathrm{Ln}(f_m)) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n} + \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right) = \\ &= -2\sum_{n=1}^{\infty}\left(nx^{n-1} + nx^{3n-1} + nx^{5n-1} + \ldots\right) = \\ &= -2\sum_{n=1}^{\infty} s_m(n)x^{n-1}, \end{aligned}$$

где $s_m(n)$ — сумма тех делителей d числа n, для которых n/d нечётно и $d \leqslant m$; если $m \geqslant n$, то $s_m(n) = s(n)$.

С другой стороны, $D(\mathrm{Ln}(f_m)) = f_m^{-1}D(f_m)$. Поэтому $D(f_m) = f_m D(\mathrm{Ln}(f_m)) = -2f_m\left(\sum_{n=1}^{m} s(n)x^{n-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty} s_m(n)x^{n-1}\right)$. Если число r фиксировано, то при достаточно больших m коэффициенты при x^r у формальных рядов $D(f_m)$, $D(f)$ и $-2fg$ одинаковые.

б) Тождество из задачи 36.17 б) показывает, что $f = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m x^{m^2}$. Подставим это выражение в тождество $D(f) = -2fg$. В левой части получим $2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m^2 x^{m^2}$. В правой части получим формальный ряд, коэффициент которого при x^{n-1} равен $-2\left(s(n) - 2s(n-1) + 2s(n-2^2) - 2s(n-3^2) + \ldots\right)$. Приравнивая коэффициенты при x^{n-1} в обеих частях, получаем требуемое.

36.19. а) Если число n не является квадратом, то число $s(n)$ чётно. Если число n не является суммой двух квадратов, то ни одно из чисел $n - m^2$ не является квадратом. Поэтому числа $s(n-m^2)$ чётны, а значит, число $s(n)$ делится на 4.

Если p — нечётное простое число, то $s(p) = p + 1$. Значит, если p — не сумма двух квадратов, то $p+1$ делится на 4. Поэтому любое простое число вида $4k+1$ можно представить в виде суммы двух квадратов.

б) Продолжим дальше рассуждения из решения задачи а). Если число n не является суммой трёх квадратов, то ни одно из чисел $n - m^2$ не является суммой двух квадратов. Поэтому числа $s(n-m^2)$ делятся на 4, а значит, число $s(n)$ делится на 8. Таким образом, если p — нечётное простое число, которое не является суммой трёх квадратов, то число $s(p) = p + 1$ делится на 8. Поэтому любое простое число p вида $8k+3$ можно представить в виде суммы трёх квадратов.

36.20. Ясно, что $(1+x)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\ldots+\binom{n}{n}x^n = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$.

36.21. а) Ясно, что $\big(f(x)\big)^2 = c_1c_1x^2 + (c_1c_2 + c_2c_1)x^3 + (c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1)x^4 + \ldots = f(x) - x$.

б) Тождество $\big(f(x)\big)^2 = f(x) - x$ показывает, что $f(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}$. Кроме того, $f(0) = 0$, поэтому $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}$. Согласно задаче 36.7

$$(1-4x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-4x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n + \ldots$$

Коэффициент при x^n равен $\frac{1(-1)(-3)(-5)\ldots(-2n+3)}{2^n n!}(-4)^n = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{n!}2^n = -\frac{(2n-2)!}{n!2^{n-1}(n-1)!}2^n = -2\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$, Поэтому $c_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

36.22. Из определения чисел Бернулли следует, что

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n = 1.$$

В выражении в левой части коэффициент при x^{k-1} равен

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{B_0}{0!} + \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{(k-2)!}\cdot\frac{B_2}{2!} + \ldots + \frac{1}{1!}\cdot\frac{B_{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{p=0}^{k-1}\frac{B_p\binom{k}{p}}{k!}.$$

При $k > 1$ этот коэффициент равен нулю, поэтому после умножения на $k!$ получаем требуемое.

36.23. По определению $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k z^{n-k}$. Поэтому $B_n(0) = B_n$ и $B_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = B_n$ согласно задаче 36.22.

36.24. При $k = 2$ получаем $2B_1 + B_0 = 0$, поэтому $B_1 = -\frac{1}{2}$. При $k = 3$ получаем $3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0$, поэтому $B_2 = \frac{1}{6}$. При $k = 4$ получаем $4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0$, поэтому $B_3 = 0$. Аналогично получаем $B_4 = -\frac{1}{30}$ и $B_5 = 0$.

36.25. Для краткости будем писать e^x вместо $\mathrm{Exp}(x)$. С одной стороны,

$$\frac{-x}{e^{-x}-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-x)^n.$$

С другой стороны,

$$\frac{-x}{e^{-x}-1} = \frac{-xe^x}{1-e^x} = x + \frac{x}{e^x-1} = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Таким образом,

$$x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-x)^n.$$

Поэтому для любого нечётного $n > 1$ должно выполняться равенство $B_n = -B_n$.

36.26. а) По определению

$$B_n(z+1) - B_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} B_{k-p} z^p.$$

Выражение в правой части не содержит z^p для $p > n-1$. Кроме того, коэффициент при z^{n-1} равен $\binom{n}{n-1}\binom{n-1}{n-1} = n$. Остаётся доказать, что для фиксированного p, $0 \leqslant p \leqslant n-2$, $\sum_{k=p}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{k}{p} B_{k-p} = 0$. Положим $m = k-p$. Тогда требуемое равенство перепишется в виде $\sum_{m=0}^{n-p-1} \binom{n}{m+p}\binom{m+p}{p} B_m = 0$. Легко проверить, что $\binom{n}{m+p}\binom{m+p}{p} = \binom{n}{p}\binom{m}{n-p}$. Остаётся заметить, что $\sum_{m=0}^{n-p-1} \binom{n-p}{m} B_m = 0$ согласно задаче 36.22.

б) Складывая равенства

$$\begin{gathered}
B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = (n+1) \cdot 0^n, \\
B_{n+1}(2) - B_{n+1}(2) = (n+1) \cdot 1^n, \\
\dots\dots \\
B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = (n+1) \cdot k^n,
\end{gathered}$$

получаем требуемое.

36.27. По определению $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k z^{n-k}$. Поэтому

$$B_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!} B_k z^{n-k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k z^{n-1-k} = nB_{n-1}(z).$$

36.28. Ясно, что $(1-x^n)^{-1} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$. Поэтому коэффициент при x^m в формальном ряду $\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right)^{-1}$ равен количеству представлений числа m в виде $a_1 + 2a_2 + \ldots + ka_k$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — неотрицательные целые числа. Такое представление можно записать следующим образом:

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{a_1} + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{a_2} + \ldots + \underbrace{k + \ldots + k}_{a_k}.$$

Поэтому количество представлений числа m в таком виде равно $p(m)$.

36.29. Бесконечному произведению $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ соответствует формальный ряд, в котором коэффициент при x^m получается следующим образом. Рассмотрим все представления числа m в виде $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ — различные натуральные числа, и каждому такому представлению сопоставим число $(-1)^k$. Сумма всех этих чисел и есть коэффициент при x^m.

Фиксируем число m и рассмотрим все его представления в виде $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Пусть s — наибольшее число, для которого s чисел $n_{k-s+1}, n_{k-s+2}, \ldots, n_k$ идут подряд, т.е. $n_k - n_{k-s+1} = s-1$.

Предположим, что $n_1 \leqslant s$, но исключим случай, когда $n_1 = s = k$. Сопоставим набору $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ набор

$$(n_2, \ldots, n_{k-n_1}, n_{k-n_1+1} + 1, n_k + 1);$$

если $k = n_1$, то сопоставляемый набор имеет вид $(n_2 + 1, \ldots, n_k + 1)$. Новый набор тоже соответствует некоторому представлению числа m. Неравенство $n_1 \leqslant s$ гарантирует, что числа $n_{k-n_1+1} + 1, \ldots, n_k + 1$ идут подряд. Ясно также, что $(n_{k-n_1+1} + 1) - n_{k-n} > 1$, поэтому в новом наборе подряд идут ровно $n_1 < n_2$ чисел.

Предположим, что $n_1 \leqslant s$, но исключим случай, когда $n_1 = s+1$ и $s = k$. Сопоставим набору $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ набор

$$(s, n_1, \ldots, n_{k-s}, n_{k-s+1} - 1, \ldots, n_k - 1);$$

если $k = s$, то сопоставляемый набор имеет вид $(s, n_1 - 1, \ldots, n_k - 1)$. Неравенство $n_{k-s} < n_{k-s+1}$ обеспечивается тем, что подряд идут только числа $n_{k-s+1}, \ldots, n_k$. Мы получаем новый набор, который тоже соответствует представлению числа m. В новом наборе подряд идут по крайней мере s чисел.

Мы построили взаимно обратные соответствия между некоторыми представлениями числа m: каждому представлению, для которого $n_1 \leqslant s$, соответствует представление для которого $n_1 > s$, но при этом некоторые представления исключены. Друг другу соответствуют представления, в которых число слагаемых отличаются на 1. Вклады таких представлений в коэффициент при x^m взаимно сокращаются. Поэтому остаются только исключённые представления $(k, k+1, \ldots, 2k-1)$ и $(k+1, k+2, \ldots, 2k)$. Им соответствуют члены $(-1)^k x^a$ и $(-1)^k x^b$, где $a = k + (k+1) + \ldots + (2k-1) = \dfrac{3k^2 - k}{2}$ и $b = (k+1) + (k+2) + \ldots + 2k = \dfrac{3k^2 + 2}{2}$.

36.30. Согласно задаче 36.28 $\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n\right)\left(\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)\right) = 1$. Далее, согласно задаче 36.29

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right).$$

Запишем тождество

$$\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)x^n\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}}+x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)\right)=1$$

и раскроем скобки. Приравнивая в левой части коэффициент при x^n, $n\geqslant 1$, нулю, получаем требуемое.

36.31. Для $d(n)$ производящая функция равна

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots,$$

а для $l(n)$ производящая функция равна

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdot\ldots$$

Ясно, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\ldots.$$

В правой части все числители сокращаются со всеми знаменателями вида $1-x^{2k}$, поэтому остаются только знаменатели вида $1-x^{2k+1}$.

36.32. Рассмотрим формальные ряды

$$\operatorname{Ln}\left(1+\frac{x_i}{x}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{x_i^k}{x^k},\quad i=1,\ldots,n.$$

(Их можно рассматривать как формальные ряды от переменных x_i/x.) Складывая эти формальные ряды, получаем

$$\operatorname{Ln}\left(1+\frac{x_1}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{x_n}{x}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\frac{s_k}{x^k}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Ln}\left(1+\frac{x_1}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{x_n}{x}\right)=\operatorname{Ln}\left(1+\frac{\sigma_1}{x}+\frac{\sigma_2}{x^2}+\ldots+\frac{\sigma_n}{x^n}\right)=$$
$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(1+\frac{\sigma_1}{x}+\frac{\sigma_2}{x^2}+\ldots+\frac{\sigma_n}{x^n}\right)^k=$$
$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=l_1+\ldots+l_n}\frac{(-1)^k}{k}\cdot\frac{k!}{l_1!\ldots l_n!}\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n}x^{-(l_1+2l_2+\ldots+nl_n)}=$$
$$=-\sum\frac{(-1)^{l_1+\ldots+l_n}(l_1+\ldots+l_n-1)!}{l_1!\ldots l_n!}\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n}x^{-(l_1+2l_2+\ldots+nl_n)}.$$

Сравнивая коэффициенты при $\frac{1}{x^k}$, получаем требуемое.

36.33. Рассмотрим формальный ряд

$$\operatorname{Ln}\left(1-\frac{x_1}{x}\right)\dots\left(1-\frac{x_n}{x}\right)=-\frac{s_1}{x}-\frac{s_2}{2x^2}-\frac{s_3}{3x^3}-\dots$$

Взяв формальную экспоненту, получим

$$\left(1-\frac{x_1}{x}\right)\dots\left(1-\frac{x_n}{x}\right)=\operatorname{Exp}\left(-\frac{s_1}{x}\right)\operatorname{Exp}\left(-\frac{s_2}{2x^2}\right)\operatorname{Exp}\left(-\frac{s_3}{3x^3}\right)\dots=$$
$$=\sum_{l_1=0}^{\infty}(-1)^{l_1}\frac{s_1^{l_1}}{l_1!x^{l_1}}\sum_{l_2=0}^{\infty}(-1)^{l_2}\frac{s_2^{l_2}}{l_2!(2x)^{l_2}}\sum_{l_3=0}^{\infty}(-1)^{l_3}\frac{s_3^{l_3}}{l_3!(3x)^{l_3}}\dots=$$
$$=\sum\frac{(-1)^{l_1+l_2+l_3+\dots}s_1^{l_1}s_2^{l_2}s_3^{l_3}\dots}{1^{l_1}2^{l_2}3^{l_3}\dots x^{l_1+l_2+l_3+\dots}}.$$

С другой стороны,

$$\left(1-\frac{x_1}{x}\right)\dots\left(1-\frac{x_n}{x}\right)=1-\frac{\sigma_1}{x}+\frac{\sigma_2}{x^2}-\dots+(-1)^n\frac{\sigma_n}{x^n}.$$

Сравним коэффициенты при $\frac{1}{x^k}$. Заметив, что равенство $l_1+2l_2+3l_3+\dots=k$ эквивалентно равенству $l_1+2l_2+3l_3+\dots+kl_k=k$, получим требуемое.

Глава 37.

Исчисление конечных разностей

37.1. Свойства конечных разностей

Пусть x_0, x_1, x_2, $\ldots$ — последовательность чисел. Ей можно сопоставить последовательность *первых разностей* Δx_0, Δx_1, Δx_2, $\ldots$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Повторив эту операцию, получим последовательность *вторых разностей* $\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$ и т.д.

37.1. Докажите, что $\Delta^n x_k = \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} x_{k+l}$.

37.2. Докажите, что $x_n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \Delta^l x_0$, где $\Delta^0 x_k = x_k$.

Последовательности разностей обычно рассматривают для $x_k = f(x + hk)$, где f — некоторая функция, h — постоянное число, которые мы будем обозначать Δx. Число $\Delta^k x_0$ будем при этом обозначать $\Delta^k f(x)$.

37.3. Докажите, что если $f(x)$ — многочлен степени n, то его n-е разности постоянны, а именно, они равны $n! a_n h^n$, где a_n — старший коэффициент многочлена.

37.4. Докажите, что

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} l^m = \begin{cases} 0 & \text{при } n > m, \\ m! & \text{при } n = m. \end{cases}$$

37.5. Докажите, что $\Delta^n a^{px+q} = a^{px+q}(a^{p\Delta x} - 1)^n$.

37.6. Докажите, что

$$\Delta^n \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \cos\left(ax+b+n\frac{a\Delta x}{2}\right),$$
$$\Delta^n \cos(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \sin\left(ax+b+n\frac{a\Delta x}{2}\right).$$

37.7. Докажите, что $\Delta\frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

37.8. Докажите, что $\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}$.

37.9. Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что $\Delta f(x) = \varphi(x)$ для некоторой функции $f(x)$. Докажите, что

$$\varphi(x) + \varphi(x+h) + \ldots + \varphi(x+(n-1)h) = f(x+nh) - f(x).$$

37.10. Докажите, что

а) $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(a(x+kh)+b+\frac{ah}{2}\right) = \frac{\sin(a(x+nh)+b) - \sin(ax+b)}{2\sin\frac{ah}{2}}$.

б) $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{arctg}\frac{1}{1+k(k+1)} = \operatorname{arctg} n$.

37.2. Обобщённая степень

Легко видеть, что

$$\Delta x^k = (x+h)^k - x^k = kx^{k-1}h + \frac{k(k-1)}{2}h^{k-2} + \ldots + h^k.$$

Это выражение, вообще говоря, не равно $kx^{k-1}h$. В исчислении конечных разностей роль x^k играет *обобщённая степень* x

$$x^{(k/h)} = x(x-h)\cdot\ldots\cdot(x-(k-1)h).$$

37.11. Докажите, что $\Delta x^{(k/h)} = khx^{((k-1)/h)}$.

При $h = 1$ мы обозначаем обобщённую степень $x^{(k)}$. Формула $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$ является аналогом формулы дифференцирования x^k.

37.12. Докажите, что $\sum_{m=0}^{n-1} m^{(k)} = \frac{n^{(k)}}{k+1}$.

37.3. Формула суммирования Эйлера

37.13. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[1, n]$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}\big(f(n) - f(1)\big) + \int_1^n B_1(\{x\})f'(x)\,dx,$$

где $B_1(z) = z - \dfrac{1}{2}$ — многочлен Бернулли.

37.14. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема m раз на отрезке $[1, n]$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}\big(f(n) - f(1)\big) + \frac{B_2}{2!}\big(f'(n) - f'(1)\big) + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^m B_m}{m!}\big(f^{(m-1)}(n) - f^{(m-1)}(1)\big) + R_{mn},$$

где $R_{mn} = \dfrac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_1^n B_m(\{x\})f^{(m)}(x)\,dx$.

Решения

37.1. Применим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно для некоторого n. Тогда

$$\Delta^{n+1}x_k = \Delta^n x_{k+1} - \Delta^n x_k = \sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\binom{n}{l}(x_{k+l+1} - x_{k+l}) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n+1}(-1)^{n-l+1}\binom{n}{l-1}x_{k+l} + \sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l+1}\binom{n}{l}x_{k+l}.$$

Остаётся заметить, что $\dbinom{n}{l-1} + \dbinom{n}{l} = \dbinom{n+1}{l}$.

37.2. Применим индукцию по n. При $n = 1$ получаем $x_1 = (x_1 - x_0) + x_0 = \Delta^1 x_0 + \Delta^0 x_0$. Предположим, что требуемое равенство верно для некоторого n. Тогда

$$x_{n+1} = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\Delta^l x_1 = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\Delta^l(\Delta^1 x_0 + \Delta^0 x_0) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}\Delta^l x_0 + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\Delta^l x_0.$$

Остаётся заметить, что $\binom{n}{l-1}+\binom{n}{l}=\binom{n+1}{l}$.

37.3. Равенство

$$\big(x+(k+1)h\big)^m-(x+kh)^m=\binom{m}{1}h(x+kh)^{m-1}+\binom{m}{2}h^2(x+kh)^{m-2}+\ldots$$

показывает, что первые разности для последовательных значений x^m являются последовательными значениями некоторого многочлена степени $m-1$ со старшим коэффициентом $\binom{m}{1}h=mh$. Поэтому первые разности для последовательности $x_k=f(x+kh)$ имеют вид $f_1(x+kh)$, где f_1 — многочлен степени $n-1$ со старшим коэффициентом nha_n. Значит, вторые разности имеют вид $f_2(x+kh)$, где f_2 — многочлен степени $n-2$ со старшим коэффициентом $n(n-1)h^2a_n$. Продолжая аналогично, получаем, что n-е разности — это константа $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1h^na_n$.

37.4. Пусть $x_k=k^m$. Согласно задаче 37.3 $\Delta^m x_k=m!$ и $\Delta^n x_k=0$ при $n>m$. С другой стороны, согласно задаче 37.1

$$\Delta^n x_k=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\binom{n}{l}x_{k+l}=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\binom{n}{l}(k+l)^m.$$

При $k=0$ получаем требуемое.

Замечание. *Другое доказательство приведено в решении задачи 10.33.*

37.5. Требуемое равенство достаточно доказать при $n=1$. Ясно, что

$$\Delta^n a^{px+q}=a^{p(x+\Delta x)+q}-a^{px+q}=a^{px+q}(a^{p\Delta x}-1)^n.$$

37.6. Требуемые равенства достаточно доказать при $n=1$. Для синуса получаем

$$\Delta\sin(ax+b)=\sin(ax+b+a\Delta x)-\sin(ax+b)=$$
$$=2\sin\frac{a\Delta x}{2}\cos\left(ax+b+n\frac{a\Delta x}{2}\right).$$

Для косинуса вычисления аналогичны.

37.7. Ясно, что $\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

37.8. Если $y=\operatorname{arctg}(x+\Delta x)-\operatorname{arctg}x$, то по формуле для тангенса разности двух углов

$$\operatorname{tg}y=\frac{(x+\Delta x)-x}{1+x(x+\Delta x)}=\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}.$$

37.9. По условию $\varphi(x)=f(x+h)-f(x)$, $\varphi(x+h)=f(x+2h)-f(x+h)$, $\ldots$, $\varphi(x+(n-1)h)=f(x+nh)-f(x+(n-1)h)$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

37.10. Применим формулу из задачи 37.9 к тождествам из задач 37.6 и 37.8. В случае арктангенса мы полагаем $\Delta x = 1$.

37.11. Ясно, что

$$\begin{aligned}\Delta x^{(k/h)} &= (x+h)x \cdot \ldots \cdot (x-(k-2)h) - x(x-h) \cdot \ldots \cdot (x-(k-1)h) = \\ &= x(x-h) \cdot \ldots \cdot (x-(k-2)h)\big((x+h)-(x-(k-1)h)\big) = \\ &= khx^{((k-1)/h)}.\end{aligned}$$

37.12. Пусть $f(x) = \dfrac{x^{(k)}}{k+1}$ и $\varphi(x) = x^{(k)}$. Тогда $\Delta f(x) = \varphi(x)$ при $h = 1$. Применяя формулу из задачи 37.9, получаем требуемое.

37.13. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx &= \left(x - k - \frac{1}{2}\right) f(x)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\big(f(k+1) - f(k)\big) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Запишем такие равенства для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и сложим их. В результате получим требуемое.

37.14. Напомним, что $B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$ (задача 36.27). Поэтому при $m \geqslant 1$ интегрирование по частям даёт

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\int_1^n B_m(\{x\})f^{(m)}(x)\,dx &= \frac{1}{(m+1)!}\big(B_{m+1}(1)f^{(m)}(n) - B_{m+1}(0)f^{(m)}(1)\big) - \\ &- \frac{1}{(m+1)!}\int_1^n B_{m+1}(\{x\})f^{(m+1)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Напомним также, что $B_{m+1}(1) = B_{m+1}(0) = B_{m+1}$ согласно задаче 36.23. Запишем тождество из задачи 37.13 и будем последовательно применять только что доказанное тождество. В результате получим требуемое.

Глава 38.

Кривые на плоскости

Представление кривой в виде графика функции не всегда бывает удобно. Такое представление возможно лишь в достаточно специальных случаях. Например, так нельзя представить даже обычную окружность. Более широкий класс кривых можно получить с помощью параметризации кривой или задания кривой уравнением. Под параметризацией подразумевается представление кривой в виде $\big(x(t), y(t)\big)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — некоторые функции от t. Например, окружность можно представить в виде $(\cos t, \sin t)$.

38.1. Предположим, что $x'(t) \neq 0$ и $y'(t) \neq 0$. Докажите, что касательная к кривой $\big(x(t), y(t)\big)$ в точке $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ задаётся уравнением

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Чтобы записать уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, нужно понятие *частной производной*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Другими словами, частная производная по x — это обычная производная функции $f(x, y_0)$, где y_0, фиксировано, а частная производная по y — это обычная производная функции $f(x_0, y)$, где x_0, фиксировано,

38.2. Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Докажите, что касательная в точке (x_0, y_0) к кривой, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, задаётся уравнением

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

38.1. Полярные координаты

Положение точки X в *полярных координатах* задаётся расстоянием r до начала координат O и углом φ между лучом OX и осью Ox. Полярные координаты (r, φ) связаны с прямоугольными координатами (x, y) следующим образом:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = x/y.$$

Лемниската — это множество всех точек, для которых произведение расстояний от точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ равно a^2.

38.3. Найдите уравнение лемнискаты: а) в прямоугольных координатах; б) в полярных координатах.

38.2. Огибающая семейства кривых

Мы говорим, что две кривые на плоскости *касаются* в некоторой точке, если в их касательные в этой точке совпадают.

Пусть на плоскости с координатами x, y задано семейство кривых C_α, зависящих от параметра α. *Огибающей* семейства кривых C_α называют кривую C, которая касается каждой из кривых C_α. Огибающая семейства кривых может состоять из нескольких связных компонент. Например, огибающая семейства окружностей фиксированного радиуса r с центрами на данной прямой l состоит из двух прямых, параллельных прямой l и удалённых от неё на расстояние r.

Мы будем предполагать, что кривые C_α заданы уравнениями вида $f(x, y, \alpha) = 0$, где f — дифференцируемая функция.

Найдём уравнение огибающей C, предполагая, что она задаётся параметрически: $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$, причём кривая C касается кривой C_α в точке $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$.

Пусть $x_0 = \varphi(\alpha_0)$ и $y_0 = \psi(\alpha_0)$. Касательные к кривым C и C_{α_0} в точке (x_0, y_0) задаются уравнениями

$$\frac{1}{x-x_0}\frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{1}{y-y_0}\frac{d\psi}{d\alpha} = 0 \text{ и } (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{38.1}$$

Эти прямые совпадают, значит,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d\psi}{d\alpha} = 0. \tag{38.2}$$

Точка $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$ лежит на кривой C_α, поэтому $f\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha\big) = 0$ для всех α. Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \tag{38.3}$$

Теперь, учитывая (38.2), получаем $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$. Таким образом, огибающая (если она существует и задаётся параметрически указанным способом) находится исключением параметра α из системы уравнений

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0. \tag{38.4}$$

Чтобы уравнения (38.1) действительно задавали касательные, нужно, чтобы в точке (x_0, y_0, α_0) производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не обращались в нуль одновременно. Если это условие выполнено, то рассуждения можно обратить; в таком случае кривая, найденная как решение системы (38.4), действительно будет огибающей.

Довольно часто огибающую можно найти при помощи следующих геометрических соображений. Предположим, что каждая пара кривых C_{α_1} и C_{α_2} $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ пересекается в одной точке, причём эти точки пересечения стремятся к некоторой точке $\big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ при $\alpha_1 \to \alpha$ и $\alpha_2 \to \alpha$. Тогда эта точка $\big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ лежит на огибающей. Действительно, если $f(x, y, \alpha_1) = 0$ и $f(x, y, \alpha_2) = 0$, то

$$0 = \frac{f(x, y, \alpha_1) - f(x, y, \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha^*),$$

где α^* — некоторая точка между α_1 и α_2. Поэтому для точки $\big(x(\alpha), y(\alpha)\big)$ имеют место равенства

$$f\big(x(\alpha), y(\alpha), \alpha\big) = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial \alpha}\big(x(\alpha), y(\alpha), \alpha\big) = 0,$$

а значит, эта точка лежит на огибающей.

38.4. Найдите огибающую семейства прямых, отсекающих от данного прямого угла треугольник площади $a^2/2$.

38.5. На сторонах угла с вершиной O фиксированы точки A и B. На отрезках OA и OB выбираются точки A_1 и B_1 так, что $OB_1 : B_1B = AA_1 : A_1O$. Докажите, что огибающая семейства прямых A_1B_1 — дуга параболы.

38.6. Найдите в фиксированной вертикальной плоскости огибающую траекторий материальной точки, выбрасываемой из начала координат со скоростью v_0.

Кривую из задачи 38.6 называют *параболой безопасности*.

38.7. Докажите, что огибающая семейства прямых, высекающих на координатных осях отрезок постоянной длины l, задаётся уравнением

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}.$$

Кривую из задачи 38.7 называют *астроидой*.

38.8. Докажите, что астроида является траекторией отмеченной точки окружности радиуса $1/4$, которая катится по неподвижной окружности радиуса 1, причём меньшая окружность расположена внутри большей.

Траекторию отмеченной точки окружности радиуса r, которая катится по неподвижной окружности радиуса R, причём окружность радиуса r расположена внутри окружности радиуса R, называют *гипоциклоидой*.

Траекторию отмеченной точки окружности радиуса r, которая катится по неподвижной окружности радиуса R, причём окружность радиуса r расположена вне окружности радиуса R, называют *эпициклоидой*.

Если число r/R рационально, то соответствующие гипо- и эпициклоиды являются замкнутыми кривыми с конечным числом особых точек (точек возврата). Некоторые из них имеют специальные названия. Например, эпициклоиду с одной точкой возврата называют *кардиоидой* (по форме она напоминает сердце), а эпициклоиду с двумя точками возврата называют *нефроидой* (по форме она напоминает почку). Гипоциклоида с четырьмя точками возврата — это астроида.

38.9. а) Фиксируем число $k \neq 0, \pm 1$ и рассмотрим семейство прямых, каждая из которых соединяет точки $e^{i\varphi}$ и $e^{ik\varphi}$. Докажите, что огибающая этого семейства прямых — гипо- или эпициклоида.

б) Для каждого целого числа $k \neq 0, \pm 1$ найдите число точек возврата.

38.10. Докажите, что огибающая семейства прямых, являющихся отражениями от кругового зеркала пучка параллельных лучей, — нефроида (точнее говоря, половина нефроиды).

38.11. Рассмотрим окружность S и выберем на ней точку A. Из точки A выпускаются лучи света и отражаются от окружности. Докажите, что огибающая отражённых лучей — кардиоида.

38.3. Кривизна

Пусть $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ — параметризованная кривая. Мы будем предполагать, что $v(t) = \dfrac{d\gamma}{dt}(t) \neq 0$ при всех t.

Параметр t удобно заменить на так называемый *натуральный параметр* $s = s(t) = \int_0^t \|v(\tau)\|\, d\tau$. Для натурального параметра $\dfrac{ds}{dt} = \|v(t)\|$, поэтому $\dfrac{d\gamma}{ds} = \dfrac{d\gamma}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{v(t)}{\|v(t)\|}$, т.е. $\left\|\dfrac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$.

Конец вектора $v(s) = \dfrac{d\gamma(s)}{ds}$ движется по единичной окружности, поэтому $\dfrac{dv}{ds} \perp v$. Пусть n — единичный вектор на плоскости, ортогональный вектору v. Тогда $\dfrac{dv}{ds} = k(s)n$. Число $|k(s)|$ называют *кривизной* кривой γ в данной точке.

38.12. Докажите, что кривизна окружности радиуса R равна $1/R$.

38.13. Докажите, что для кривой $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ с произвольной параметризацией t кривизна вычисляется по формуле

$$k^2 = \frac{(x''y' - y''x')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}.$$

38.14. Вычислите кривизну эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

38.4. Соприкасающаяся окружность

Рассмотрим на плоскости две кривые, заданные уравнениями $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Эти кривые пересекаются, если $f(x_0) = g(x_0)$. В

точке пересечения кривые касаются (имеют *соприкосновение порядка* 1), если $f'(x_0) = g'(x_0)$. Касающиеся кривые имеют *соприкосновение порядка* n, если $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$. Кривые, имеющие соприкосновение порядка 2, называют *соприкасающимися.*

Если кривизна кривой в некоторой точке отлична от нуля, то однозначно определена окружность, соприкасающаяся с кривой в этой точке (*соприкасающаяся окружность*). Уравнение соприкасающейся окружности в случае, когда кривая задана уравнением $y = f(x)$, находится следующим образом. Пусть $y = g(x)$ — неявная функция, локально задающая окружность радиуса R с центром (a, b), т.е. g удовлетворяет соотношению

$$(x-a)^2 + \big(g(x)-b\big)^2 = R^2.$$

Дифференцируя это соотношение, последовательно получаем

$$2(x-a) + 2g'(x)\big(g(x)-b\big) = 0,$$
$$2 + 2g''(x)\big(g(x)-b\big) + 2\big(g'(x)\big)^2 = 0.$$

Если кривая $y = f(x)$ соприкасается с указанной окружностью в точке (x_0, y_0), то

$$(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 = R^2,$$
$$(x_0-a) + y_0'(y_0-b) = 0,$$
$$1 + y_0''(y_0-b) + (y_0')^2 = 0,$$

где $y_0' = f'(x_0)$ и $y_0'' = f''(x_0)$. Более того, если эта система уравнений для a, b, R имеет решение, то верно и обратное: кривая соприкасается с окружностью. Легко видеть, что если $y_0'' \neq 0$, то эта система уравнений имеет единственное решение. Например, если $y_0' = 0$ (а этого всегда можно добиться подходящим выбором системы координат), то $a = x_0$, $b = y_0 + \dfrac{1}{y_0''}$, $R^2 = \dfrac{1}{(y_0'')^2}$.

Центр соприкасающейся окружности называют *центром кривизны* кривой. Согласно задаче 38.13 в рассматриваемой ситуации $k^2 = \dfrac{(y_0'')^2}{(1+y_0'^2)^3} = (y_0'')^2$. Таким образом, центр кривизны лежит на нормали к кривой в данной точке и удалён от этой точки на расстояние $\pm 1/k$.

38.15. Докажите, что центр кривизны является предельным положением точки пересечения близких нормалей.

38.5. Фокальные точки. Эволюта

Пусть $\gamma(s) = \big(x(s), y(s)\big)$ — кривая с натуральной параметризацией. Фиксируем на плоскости точку $q = (x_0, y_0)$ и рассмотрим функцию $F(s) = \|\gamma(s) - q\|^2$. Точку s_0 называют *критической* точкой функции F, если $F'(s_0) = 0$. Критическую точку называют *вырожденной*, если $F''(s_0) = 0$. Ясно, что

$$F'(s) = 2\left(\gamma(s) - q, \frac{d\gamma}{ds}\right),$$

$$F''(s) = 2\left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\|^2 + 2\left(\gamma(s) - q, \frac{d^2\gamma}{ds^2}\right) = 2\big(1 + (\gamma(s) - q, kn)\big).$$

Поэтому точка s_0 является критической точкой функции F тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{\gamma(s_0)q}$ ортогонален кривой γ в точке $\gamma(s_0)$, а критическая точка s_0 является вырожденной тогда и только тогда, когда $k(s_0) \neq 0$ и $\overrightarrow{\gamma(s_0)q} = \dfrac{1}{k(s_0)}n$. Точку q называют *фокальной точкой* кривой γ, если для этой точки функция $\|\gamma(s) - q\|^2$ имеет вырожденную критическую точку. В таком случае, если s_0 — вырожденная критическая точка, то точка q однозначно определяется равенством $\overrightarrow{\gamma(s_0)q} = \dfrac{1}{k(s_0)}n$. С геометрической точки зрения это означает, что точка q является центром окружности, соприкасающейся с кривой γ в точке $\gamma(s_0)$. Таким образом, q — предельное положение точки пересечения нормалей к кривой γ в точках $\gamma(s_1)$ и $\gamma(s_2)$, когда $s_1 \to s_0$ и $s_2 \to s_0$. Отметим, в частности, что фокальная точка не зависит от выбора параметризации.

Эволютой кривой называют множество всех её фокальных точек. Учитывая, что фокальные точки являются предельными положениями точек пересечения близких нормалей к кривой, приходим к другому определению: эволюта — огибающая семейства всех нормалей к кривой.

38.16. Для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ найдите фокальную точку, соответствующую точке $(a\cos t_0, b\sin t_0)$; найдите радиус кривизны эллипса в этой точке.

38.17. Найдите уравнение эволюты эллипса.

Циклоидой называют кривую, которую описывает фиксированная точка окружности, катящейся по фиксированной прямой.

38.18. Докажите, что эволютой циклоиды является такая же циклоида (полученная из исходной кривой параллельным переносом).

Решения

38.1. Искомая касательная задаётся уравнением $y - y(t_0) = k\big(x - x(t_0)\big)$, где

$$k = \lim_{t\to t_0} \frac{y - y(t_0)}{x - x(t_0)} = \lim_{t\to t_0} \left(\frac{y - y(t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{t - t_0}{x - x(t_0)}\right) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

38.2. Мы будем предполагать, что в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) рассматриваемая кривая является графиком функции $y = \varphi(x)$, хотя в действительности при сделанных предположениях о том, что частные производные не обращаются в нуль, это можно было бы доказать.

По теореме о конечных приращениях

$$f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x_1 - x_0),$$
$$f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y_1 - y_0),$$

где число ξ заключено между x_0 и x_1, а число η заключено между y_0 и y_1. Поэтому если точка (x_1, y_1) тоже лежит на рассматриваемой кривой, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x_1 - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y_1 - y_0) = 0.$$

Искомая касательная задаётся уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$, где

$$k = \lim_{x_1\to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\lim_{x_1\to x_0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}.$$

38.3. а) Ответ: $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$. Непосредственно из определения видно, что лемниската задаётся уравнением

$$\big((x-a)^2 + y^2\big)\big((x+a)^2 + y^2\big) = a^4,$$

т.е. $x^4 + a^4 + y^4 + 2a^2x^2 + 2a^2y^2 - 4a^2x^2 = a^4$. После несложных преобразований получаем уравнение, указанное в ответе.

б) Ответ: $r^2 = 2a^2\cos^2 2\varphi$. Выразив прямоугольные координаты через полярные, получим для лемнискаты уравнение

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Остаётся заметить, что $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$.

38.4. Введём систему координат, направив оси по сторонам данного прямого угла. Интересующие нас прямые пересекают оси координат в точках $(\alpha a, 0)$ и $(0, a/\alpha)$, где $\alpha > 0$. Прямая, соответствующая параметру α, задаётся уравнением $x + \alpha^2 y = \alpha a$. Две прямые, соответствующие параметрам α_1 и α_2, пересекаются в точке с координатами $\left(\dfrac{a\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}, \dfrac{a}{\alpha_1+\alpha_2}\right)$. Если $\alpha_1 \to \alpha$

и $\alpha_2 \to \alpha$, то мы получаем точку $\left(\frac{a\alpha}{2}, \frac{a}{2\alpha}\right)$. Такие точки лежат на гиперболе $xy = a^2/4$.

38.5. Можно считать, что O — начало координат, $A = (1, 1)$ и $B = (-1, 1)$. Тогда $A_1 = (1-\alpha, 1-\alpha)$ и $B_1 = (-\alpha, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in [0, 1]$. Прямая, проходящая через точки A_1 и B_1, задаётся уравнением $(2\alpha - 1)x + y = 2\alpha(1 - \alpha)$. Легко проверить, что если (x_0, y_0) — точка пересечения прямых, соответствующих параметрам α_1 и α_2, то $x_0 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$. Если $\alpha_1 \to \alpha$ и $\alpha_2 \to \alpha$, то $x_0 \to 1 - 2\alpha$. Поэтому огибающая задаётся уравнением $-x^2 + y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$, т.е. $y = \frac{1 + x^2}{2}$.

38.6. Направим ось Oy вертикально вверх, а ось Ox направим по горизонтальной составляющей скорости v_0. Тогда в момент времени t материальная точка имеет координаты $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$, $y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$, где α — угол, под которым она была выброшена. Например, если точка выбрасывается вертикально вверх, то $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, поэтому $y(t)$ максимально при $t = \frac{v_0}{g}$ и при этом $y(t) = \frac{v_0^2}{2g}$. Если предположить, что огибающая является параболой, то она должна задаваться уравнением $y = \frac{v_0^2}{2g} - kx^2$. Чтобы найти k, вычислим наибольшую возможную координату пересечения траектории с осью Ox (наибольшую дальность выстрела). Если $y(t_0) = 0$ и $t_0 \neq 0$, то $t_0 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При этом $x(t_0) = \frac{2v_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$. Поэтому наибольшая дальность выстрела равна $\frac{v_0}{g}$. Соответственно, для k получаем уравнение $y = \frac{v_0^2}{2g} - k\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 = 0$, откуда находим $k = \frac{g}{2v_0^2}$.

Докажем теперь, что парабола $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ действительно является огибающей рассматриваемого семейства траекторий. Для этого достаточно доказать, что любая траектория лежит ниже этой параболы и имеет с ней одну общую точку, т.е. для всех t имеет место неравенство

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0} v_0^2 \cos^2\alpha\, t \geqslant v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2},$$

причём для некоторого t оно обращается в равенство. Заменив $\cos^2\alpha$ на $1 - \sin^2\alpha$, переходим к неравенству

$$\frac{v_0^2}{2g} - v_0 \sin\alpha\, t + \frac{g}{2}\sin^2\alpha\, t \geqslant 0,$$

т.е. $\frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g} - \sin\alpha\, t\right)^2 \geqslant 0$. Оно обращается в равенство при $t = \frac{v_0}{g \sin\alpha}$.

38.7. Пусть отрезок с концами $(a_1, 0)$ и $(0, b_1)$ имеет длину l и отрезок с концами $(a_2, 0)$ и $(0, b_2)$ тоже имеет длину l. Если $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$ и $b = \frac{b_1 + b_2}{2}$, то $a_1 = a + \alpha$, $b_1 = b - \beta$, $a_2 = a - \alpha$, $b_2 = b + \beta$ для некоторых α и β. Из соотношения $(a + \alpha)^2 + (b - \beta)^2 = (a - \alpha)^2 + (b + \beta)^2$ получаем $a\alpha = b\beta$.

Найдём координаты точки пересечения рассматриваемых отрезков (предполагается, что a_1 и a_2 одного знака и b_1 и b_2 тоже одного знака). Прямые, на которых лежат эти отрезки, задаются уравнениями

$$\frac{x}{a + \alpha} + \frac{y}{b - \beta} = 1, \quad \frac{x}{a - \alpha} + \frac{y}{b + \beta} = 1.$$

Рассматривая сумму и разность этих уравнений, получаем

$$\frac{ax}{a^2 - \alpha^2} + \frac{by}{b^2 - \beta^2} = 1, \quad \frac{\alpha x}{a^2 - \alpha^2} = \frac{\beta y}{b^2 - \beta^2}.$$

Если учесть соотношение $a\alpha = b\beta$, то последнее равенство можно переписать в виде $\frac{x}{a(a^2 - \alpha^2)} = \frac{y}{b(b^2 - \beta^2)}$. Подставляя это выражение в первое равенство, находим

$$x = \frac{a(a^2 - \alpha^2)}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{b(b^2 - \beta^2)}{a^2 + b^2}.$$

Нас интересует предел при $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. Ясно, что предельные выражения такие: $x = a^3/l^2$ и $y = b^3/l^2$. Тогда

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (a^2 + b^2)/l^{4/3} = l^2/l^{4/3} = l^{2/3}.$$

38.8. Первое решение. Выведем параметрическое представление траектории отмеченной точки в общем случае, когда окружность радиуса r катится внутри окружности радиуса R. Это движение отмеченной точки можно представить как вращение центра меньшей окружности по окружности радиуса $r_1 = R - r$ с угловой скоростью ω_1 и вращение меньшей окружности радиуса $r_2 = r$ с угловой скоростью ω_2. При этом ω_1 и ω_2 имеют разные знаки и связаны соотношением $(r_1 + r_2)\omega_1 = r_2(-\omega_2 + \omega_1)$, которое выражает равенство дуг неподвижной окружности радиуса $R = r_1 + r_2$ и подвижной окружности радиуса $r = r_2$ (качение без скольжения). После сокращения это соотношение записывается в виде $r_1\omega_1 = -r_2\omega_2$.

Траектория отмеченной точки параметрически задаётся так:

$$x = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t,$$
$$y = r_1 \sin \omega_1 t + r_2 \sin \omega_2 t.$$

В случае, когда $R = 4r$, получаем $r_1 = 3r$, $r_2 = r$ и $\omega_2 = -3\omega_1$. Положив $\omega_1 = 1$, получим

$$x = 3r \cos t + r \cos 3t = 4r \cos^3 t,$$
$$y = 3r \sin t - r \sin 3t = 4r \sin^3 t,$$

а значит, $x^{2/3} + y^{2/3} = (4r)^{2/3} = R^{2/3}$.

Замечание. *Точно такое же параметрическое представление траектории получается и в случае, когда окружность радиуса r катится по внешней части круга радиуса R. Тогда движение отмеченной точки можно представить как вращение центра окружности радиуса $r_2 = r$ по окружности радиуса $r_1 = R + r$ с угловой скоростью ω_1 и вращение окружности радиуса $r_2 = r$ с угловой скоростью ω_2. При этом ω_1 и ω_2 имеют одинаковые знаки и связаны соотношением $(r_1 - r_2)\omega_1 = r_2(\omega_2 - \omega_1)$. После сокращения это соотношение записывается в виде $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$.*

Второе решение. Рассмотрим окружность радиуса $l = 4r$ с центром в начале координат O. Пусть окружность радиуса r катится внутри её, причём в начальный момент отмеченная точка совпадает с точкой $P = (l, 0)$. Пусть через некоторое время отмеченная точка переместилась в точку X, а окружности теперь касаются в точке A. Тогда дуги AP и AX равны, поэтому центральный угол, опирающийся на дугу AX, равен $4\angle AOP$, а вписанный угол равен $2\angle AOP$. Пусть B — середина отрезка OA, а M и N — точки пересечения прямой BX с координатными осями. Треугольники OBM и OBN равнобедренные, поскольку в них внешний угол при вершине B вдвое больше внутреннего угла при вершине O. Поэтому $MN = 2OB = OA = l$.

Прямая MN касается траектории отмеченной точки в точке X. Действительно, прямая MN перпендикулярна прямой AX, а вектор скорости движения точки X перпендикулярен AX, поскольку точка A является мгновенным центром вращения точки X. Таким образом траектория точки X является огибающей семейства прямых, высекающих на координатных осях отрезок постоянной длины l.

38.9. а) Пусть $A = e^{i\varphi}$, $B = e^{ik\varphi}$, $A' = e^{i(\varphi+\alpha)}$, $B' = e^{ik(\varphi+\alpha)}$. Пусть, далее, C — предельное положение точки пересечения прямых AB и $A'B'$ при $\alpha \to 0$. Ясно, что если $k > 0$, то точка C лежит на отрезке AB, а если $k < 0$, то точка C лежит вне этого отрезка. Покажем, что $AC\colon CB = 1\colon |k|$. Действительно, $AC\colon CB' = \sin B'\colon\ \sin A = \pm\sin\alpha\colon\ \sin k\alpha \to 1\colon\ \pm k$, а $CB'\colon CB = \sin B\colon\ \sin B' \to 1$. В результате получаем, что точка C, лежащая на огибающей, имеет координаты

$$\frac{e^{ik\varphi} + ke^{i\varphi}}{1+k} = \frac{1}{1+k}(\cos k\varphi + k\cos\varphi,\ \sin k\varphi + k\sin\varphi).$$

Как видно из первого решения задачи 38.8, точки с такими координатами образуют гипо- или эпициклоиду.

б) Ответ: $|k-1|$. Точки возврата соответствуют положениям, когда точки $e^{i\varphi}$ и $e^{ik\varphi}$ диаметрально противоположны, т.е. $e^{i\varphi} + e^{ik\varphi} = 0$. После сокращения на $e^{i\varphi}$ получаем уравнение $e^{i(k-1)\varphi} = -1$. Оно имеет $|k-1|$ решений.

38.10. Будем считать, что лучи параллельны оси Ox и отражаются от единичной окружности. Пусть луч попадает в точку $A = e^{i\psi}$. После отражения этот луч попадает в точку A_1, которая получается следующим образом.

Пусть A' — исходная точка луча света, т.е. точка, симметричная точке A относительно оси Oy. Тогда точка A_1 симметрична точке A' относительно диаметра AB. Несложные вычисления углов показывают, что $A_1 = e^{i(3\psi+\pi)}$. Положим $\varphi = \psi + \alpha$. Тогда $3\psi + \pi = 3\varphi - 3\alpha + \pi = 3\varphi$ для $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. В результате мы оказываемся в ситуации задачи 38.9 для $k = 3$, что соответствует эпициклоиде с двумя точками возврата.

38.11. Будем считать, что окружность единичная, а $A = (-1, 0)$. Тогда луч, попадающий в точку $e^{i\psi}$, после отражения попадает в точку $e^{i(2\psi+\pi)}$. Положим $\varphi = \psi + \alpha$. Тогда $2\psi + \pi = 2\varphi - 2\alpha + \pi = 2\varphi$ для $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. В результате мы оказываемся в ситуации задачи 38.9 для $k = 2$, что соответствует эпициклоиде с одной точкой возврата.

38.12. Окружность радиуса R параметрически можно задать формулами $x(t) = R\cos\omega t,\ y(t) = R\sin\omega t$. При этом $v(t) = (-\omega R\sin\omega t,\ \omega R\cos\omega t)$. Пусть $\omega = 1/R$. Тогда $\|v(t)\| = 1$, т.е. t — натуральный параметр. При этом $\dot v = -R^{-1}(\cos\omega t,\ \sin\omega t)$ и $k = \|\dot v\| = 1/R$.

38.13. Если s — натуральный параметр, то $\dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{d\gamma}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}$ и $\left\|\dfrac{d\gamma}{ds}\right\| = 1$. Поэтому $\left\|\dfrac{d\gamma}{dt}\right\|^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$. Следовательно, $\dfrac{d\gamma}{ds} = \dfrac{d\gamma}{dt}\left\|\dfrac{d\gamma}{dt}\right\|^{-1/2}$. Дифференцируя это равенство по t, получаем

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}\cdot\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^{-1/2} - \frac{d\gamma}{dt}\cdot\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\cdot\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^{-3/2} =$$
$$= \frac{\gamma''}{\sqrt{\gamma'^2}} - \frac{(\gamma',\gamma'')\gamma'}{(\sqrt{\gamma'^2})^3} = \frac{\gamma''\gamma'^2 - (\gamma',\gamma'')\gamma'}{(\sqrt{\gamma'^2})^3}.$$

Возведём это равенство в квадрат. Учитывая, что $\left\|\dfrac{d^2\gamma}{ds^2}\right\|^2 = k^2$ и $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \gamma'^2$, получаем

$$k^2 = \frac{\gamma''^2\gamma'^2 - (\gamma',\gamma'')^2}{(\gamma'^2)^3} = \frac{(x''^2+y''^2)(x'^2+y'^2) - (x''x'+y''y')^2}{(x'^2+y'^2)^3}.$$

Последнее выражение легко преобразуется к требуемому виду.

38.14. Рассмотрим следующую параметризацию эллипса: $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$. Тогда

$$x''y' - y''x' = -ab(\cos^2 t + \sin^2 t) = -ab,$$
$$x'^2 + y'^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t.$$

Поэтому согласно задаче 38.13

$$k^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}.$$

38.15. Можно считать, что кривая задаётся уравнением $y = f(x)$, причём $f'(0) = 0$. При этом нас интересует центр кривизны для точки $\bigl(0, f(0)\bigr)$. Нормаль к кривой в точке $\bigl(\varepsilon, f(\varepsilon)\bigr)$ задаётся уравнением $(x-\varepsilon)+f'(\varepsilon)\bigl(y-f(\varepsilon)\bigr) = 0$; нормаль в точке $\bigl(0, f(0)\bigr)$ — это координатная ось Ox. Пересечение этих нормалей — точка $\left(0, f(\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{f'(\varepsilon)}\right)$. При $\varepsilon \to 0$ получаем точку $\left(0, f(0) + \dfrac{1}{f''(0)}\right)$. Это как раз и есть центр кривизны.

38.16. Для фиксированной точки (x_0, y_0) рассмотрим на эллипсе функцию $F(t) = (x_0-a\cos t)^2+(y_0-b\sin t)^2$. Нас интересует точка (x_0, y_0), для которой $F'(t_0) = 0$ и $F''(t_0) = 0$, т.е.

$$x_0 a\sin t_0 - y_0 b\cos t_0 + (b^2 - a^2)\sin t_0\cos t_0 = 0,$$

$$x_0 a\cos t_0 + y_0 b\sin t_0 + (b^2 - a^2)(\cos^2 t_0 - \sin^2 t_0) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$x_0 = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t_0, \quad y_0 = -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t_0.$$

Теперь радиус кривизны R вычисляется по формуле

$$R^2 = (x_0 - a\cos t_0)^2 + (y_0 - b\sin t_0)^2 = \frac{(a^2\sin^2 t_0 + b^2\cos^2 t_0)^3}{a^2b^2}.$$

38.17. Выражения для фокальных точек, полученные в решении задачи 38.16, показывают, что они лежат на кривой

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

38.18. Пусть фиксированная прямая — это ось Ox, а в начальный момент фиксированная точка совпадает с началом координат O. Будем также предполагать, что окружность имеет радиус 1 и катится она в верхней полуплоскости. Пусть через некоторое время фиксированная точка сместилась в точку X; при этом катящаяся окружность S_1 касается оси Ox в точке P. Тогда длина отрезка OP равна длине дуги PX. Пусть PQ — диаметр окружности S_1 и O_1 — точка $(\pi, 0)$, т.е. середина отрезка с концами в первом и втором положении фиксированной точки на оси Ox. Тогда длина отрезка O_1P равна длине дуги QX. Поэтому если мы рассмотрим окружность S_1', симметричную S_1 относительно точки P, и рассмотрим на ней точки X' и Q', симметричные X и Q, то длина дуги $Q'X$ равна длине отрезка Q_1P. Рассмотрим прямую l, которая проходит через точку Q' параллельно исходной фиксированной прямой. Пусть O' — проекция точки O_1 на эту прямую. Тогда длина отрезка O_1P равна длине отрезка $Q'O'$. Поэтому длина дуги $Q'X$ равна длине отрезка $Q'O$, т.е. точка X' расположена на циклоиде, которая получается, когда окружность радиуса 1 катится по прямой l навстречу исходной

окружности, причём в начальный момент фиксированная точка расположена в точке O'.

Покажем, что прямая XX' одновременно является нормалью к первой циклоиде и касательной ко второй циклоиде. Точка P является мгновенным центром вращения точки X, поэтому прямая PX является нормалью к первой циклоиде. Точка Q' является мгновенным центром вращения точки X', поэтому прямая $Q'X'$ является нормалью ко второй циклоиде, а прямая PX' является касательной.

Глава 39.

Теория множеств

39.1. Конечные множества

39.1. Дано непустое конечное множество. Докажите, что количество его подмножеств, содержащих чётное число элементов, равно количеству подмножеств, содержащих нечётное число элементов.

39.2. Операции над множествами

В теории множеств приняты следующие обозначения:

$x \in X$ x — элемент множества X (x принадлежит множеству X);

$x \notin X$ x не принадлежит X;

$A \subset X$ A — *подмножество* X, т.е. каждый элемент A принадлежит X;

$A \cup B$ — *объединение* множеств A и B; оно состоит из тех элементов, которые являются элементами A или B;

$A \cap B$— *пересечение* множеств A и B; оно состоит их тех элементов, которые одновременно являются элементами A и элементами B;

В том случае, когда фиксировано некоторое множество U, используют обозначение $\overline{A}$ — *дополнение* множества A; оно состоит из тех элементов множества U, которые не являются элементами множества A.

39.2. а) Докажите, что $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

б) Докажите, что $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

39.3. Докажите, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*законы де Моргана*).

Тождества, подобные тем, которые доказываются в задачах 39.2 и 39.3, удобно доказывать с помощью так называемых *диаграмм Венна*, на которых рассматриваемые множества изображаются в виде пересекающихся кругов. В случае n множеств берутся n выпуклых фигур (кругами не всегда можно обойтись), границы которых разбивают плоскость на 2^n частей. Если все рассматриваемые множества лежат в фиксированном множестве U, то это множество U можно изобразить в виде круга, содержащего все остальные фигуры.

39.4. Решите задачи 39.2 и 39.3, нарисовав соответствующие диаграммы Венна.

39.3. Равномощные множества

Два множества X и Y называют *равномощными*, если существует отображение $f : X \to Y$, которое является *взаимно однозначным*, т.е. для любого элемента $y \in Y$ существует ровно один элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$. Другими словами, между элементами множеств X и Y установлено соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества.

Мы будем использовать следующие обозначения и терминологию:

- *отрезок* $[a, b]$ состоит их точек x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$;
- *интервал* (a, b) состоит их точек x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$;
- *полуинтервал* $[a, b)$ состоит их точек x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$; полуинтервал $(a, b]$ состоит из точек, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$.

39.5. Докажите, что отрезки $[0, 1]$ и $[0, a]$ равномощны для любого положительного числа a.

39.6. Докажите, что интервал $(0, 1)$ и луч $(1, +\infty)$ равномощны.

39.7. Докажите, что интервал $(-1, 1)$ равномощен множеству всех действительных чисел.

39.8. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей $a_1, a_2, \ldots$, где $a_i = 0$ или 1 для всех i, равномощно множеству всех подмножеств натуральных чисел.

39.9. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ равномощен полуинтервалу $[0, 1)$.

39.4. Счётные множества

Множество называют *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

39.10. Докажите, что множество целых чисел счётно.

39.11. Докажите, что множество рациональных чисел счётно.

39.12. Докажите, что любое подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно.

39.13. Докажите, что объединение счётного множества счётных множеств счётно.

39.14. Докажите, что для каждого натурального n множество всех последовательностей из n натуральных чисел счётно.

39.15. Докажите, что множество всех конечных последовательностей натуральных чисел счётно.

39.16. Докажите, что множество всех алгебраических чисел счётно.

39.17. Докажите, что множество попарно не пересекающихся отрезков на прямой конечно или счётно.

39.18. Докажите, что множество попарно не пересекающихся кругов на плоскости конечно или счётно.

39.19. Докажите, что если множество X бесконечно, а множество Y конечно или счётно, то множество $X \cup Y$ равномощно X.

39.5. Мощность континуума

Говорят, что множество имеет *мощность континуума*, если оно равномощно множеству действительных чисел.

39.20. а) Докажите, что множество точек интервала $(0, 1)$ имеет мощность континуума.

б) Докажите, что множество точек отрезка $[0, 1]$ имеет мощность континуума.

39.21. а) Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей $a_1, a_2, \ldots$, где $a_i = 0$ или 1, имеет мощность континуума.

б) Докажите, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел имеет мощность континуума.

39.22. Докажите, что множество всех точек квадрата имеет мощность континуума.

39.6. Свойства мощности

39.23. Докажите, что никакое множество X не равномощно множеству $P(X)$ всех своих подмножеств. (*Кантор*)

39.24. Докажите, что если множество имеет мощность континуума, то оно не счётно.

39.7. Парадоксы теории множеств

С самого начала развития теории множеств выяснилось, что рассмотрение множеств, элементами которых служат другие множества, может привести к противоречию: два взаимно исключающих утверждения будут убедительно доказаны.

Парадокс Рассела

Каждое множество X либо не является элементом самого себя[1], либо является. Пусть Y — множество, элементами которого являются все те множества X, которые не являются элементами самого себя. Попробуем выяснить, что верно: $Y \in Y$ или $Y \notin Y$? Если $Y \in Y$, то по определению множество Y не является элементом Y, а если $Y \notin Y$, то по определению множество Y является элементом Y.

Парадокс Кантора

Пусть M — множество всех множеств, $P(M)$ — множество всех его подмножеств. Из определения M видно, что $P(M)$ содержится в M. С другой стороны, по теореме Кантора (задача 39.23) множество

[1] Именно такими являются множества, с которыми обычно имеют дело в математике: множество натуральных чисел, множество действительных чисел и т.п.

$P(M)$ имеет строго бо́льшую мощность, чем M, поэтому оно не может содержаться в M.

Чтобы избежать парадоксов такого рода, в аксиоматической теории множеств вводится так называемая *аксиома фундирования*: не существует бесконечной последовательности множеств $X_1 \in X_2$, $X_2 \in X_3$, $X_3 \in X_4, \ldots$ В частности, никакое множество не может быть элементом самого себя. Тогда парадокс Рассела разрешается так, что описанный указанным образом объект Y не существует (не является множеством).

Решения

39.1. Фиксируем в данном множестве один элемент x. Подмножества данного множества можно разбить на пары следующим образом: берём произвольное подмножество, не содержащее x, и в качестве второго множества пары берём то же самое подмножество и добавляем к нему элемент x. В каждой паре одно множество состоит из чётного числа элементов, а другое — из нечётного.

39.2. а) Если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, поэтому $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если же $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$, поэтому $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Поэтому $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Значит, $x \in A \cup (B \cap C)$.

б) Если $x \in A \cap (B \cup C)$, то $x \in A$ и $x \in B \cup C$. Поэтому $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$.

Если $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$. Поэтому $x \in A$ или $x \in B \cup C$.

39.3. $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

39.4. Требуемые диаграммы изображены на рис. 39.1

39.5. Взаимно однозначное отображение $[0, 1] \to [0, a]$ задаётся формулой $x \mapsto ax$.

39.6. Взаимно однозначное отображение $(0, 1) \to (1, +\infty)$ задаётся формулой $x \mapsto 1/x$.

39.7. Функция $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ задаёт взаимно однозначное отображение интервала $(-1, 1)$ на множество всех действительных чисел.

39.8. Сопоставим последовательности a_1, a_2, ... множество, состоящее из тех натуральных чисел n, для которых $a_n = 1$. В результате получим взаим-

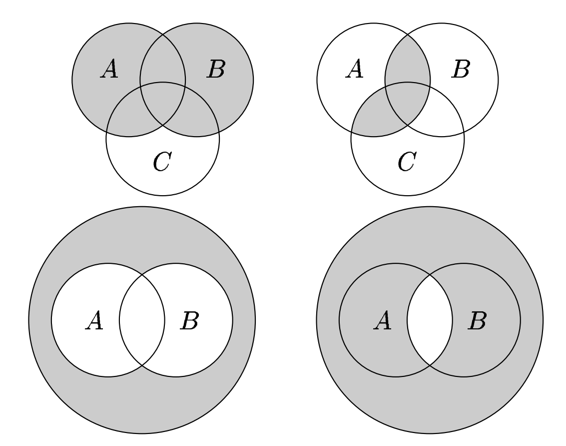


Рис. 39.1.

но однозначное соответствие между последовательностями и множествами натуральных чисел.

39.9. Выберем бесконечную последовательность попарно различных чисел $a_1, a_2, \ldots$, заключённых строго между 0 и 1. Построим отображение $f: [0,1] \to [0,1)$ следующим образом: $f(1) = a_1$, $f(a_i) = a_{i+1}$ и $f(x) = x$, если x отлично от 1 и от a_i для всех i. Ясно, что отображение f взаимно однозначно. Действительно, обратное отображение $f^{-1} : [0,1) \to [0,1]$ устроено следующим образом: $f^{-1}(a_1) = 1$, $f^{-1}(a_i) = a_{i-1}$ при $i \geqslant 2$ и $f(x) = x$, если x отлично от a_i для всех i.

39.10. В последовательности $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ каждое целое число встречается ровно один раз.

39.11. Для каждого натурального k запишем последовательность $\frac{-k+1}{1}$, $\frac{-k+2}{2}, \ldots, \frac{-1}{k-1}, \frac{0}{k}, \frac{1}{k-1}, \ldots, \frac{k-1}{1}$. Запишем такие последовательности для $k = 1, 2, 3, \ldots$ После этого будем идти по полученной последовательности и вычёркивать все те числа, которые уже встретились нам ранее. В результате получим последовательность, в которой каждое рациональное число встречается ровно один раз.

39.12. Занумеруем элементы данного счётного множества, и пусть элементы данного подмножества имеют номера $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ Множество этих номеров либо конечно (тогда данное подмножество конечно), либо бесконечно (тогда данное подмножество счётно).

39.13. Пусть k-е счётное множество состоит из элементов a_{k1}, a_{k2}, a_{k3},

... Тогда последовательность элементов a_{11}; a_{12}, a_{21}; a_{13}, a_{22}, a_{31}; a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}; ... содержит все элементы данных множеств. Нужно только вычеркнуть из неё повторяющиеся элементы.

39.14. Множество упорядоченных пар натуральных чисел можно представить как объединение счётного множества счётных множеств (первое число пары можно рассматривать как номер множества). Значит, это множество счётно (задача 39.13). Занумеруем пары натуральных чисел. Тройку натуральных чисел можно рассматривать как пару натуральных чисел и ещё одно натуральное число. Поэтому множество троек натуральных чисел является объединением счётного множества счётных множеств и т.д.

39.15. Непосредственно следует из задач 39.13 и 39.14.

39.16. Множество всех многочленов с целыми коэффициентами, имеющих данную степень n, счётно. Каждый из них имеет не более n различных корней, поэтому множество корней многочленов степени n с целыми коэффициентами счётно (многочлены вида $px^n - qx^{n-1}$ показывают, что оно бесконечно). Поэтому множество алгебраических чисел является объединением счётного множества счётных множеств.

39.17. Каждый из отрезков содержит рациональную точку, причём для непересекающихся отрезков эти точки разные.

39.18. Каждый из кругов содержит точку, обе координаты которой рациональны, причём для непересекающихся кругов эти точки разные.

39.19. Можно считать, что X и Y не пересекаются. Действительно, вместо Y можно взять множество Y', состоящее из тех элементов Y, которые не принадлежат X. Множество Y' является подмножеством Y, поэтому оно конечно или счётно.

Пусть X_1 — счётное подмножество X, а X_2 — дополнение X_1 в X. Множество $X_1 \cup Y$ равномощно X_1, поскольку объединение счётного множества с конечным или счётным счётно. Установим взаимно однозначное соответствие множеств $X_1 \cup Y$ и X_1. Вместе с естественным взаимно однозначным соответствием множеств X_2 и X_2 (каждый элемент соответствует самому себе) оно даёт требуемое взаимно однозначное соответствие множеств $X \cup Y$ и X.

39.20. а) Это легко выводится из задач 39.5 и 39.7.

б) Можно воспользоваться такими же рассуждениями, как и при решении задачи 39.9.

39.21. а) Достаточно доказать, что множество точек отрезка $[0, 1]$ равномощно множеству всех бесконечных последовательностей $a_1, a_2, \ldots$, где $a_i = 0$ или 1. Сопоставим такой последовательности число $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots$. Это представление числа из $[0, 1]$ неоднозначно. Например, двоичные дроби

$0,01111\ldots$ и $0,1000\ldots$ представляют одно и то же число. Но если мы отбросим все двоичные дроби с единицей в периоде, кроме дроби $0,1111\ldots$, то оставшиеся дроби будут находиться во взаимно однозначном соответствии с точками отрезка $[0,1]$. Выброшенные дроби образуют счётное множество, поскольку каждая из них задаётся конечной последовательностью из нулей и единиц.

Пусть X — множество оставшихся дробей, Y — множество выброшенных дробей. Тогда X имеет мощность континуума, поэтому согласно задаче 39.19 рассматриваемое множество $X \cup Y$ тоже имеет мощность континуума.

б) Следует из задачи а) и задачи 39.8.

39.22. Точку квадрата можно представить как пару точек отрезка. Согласно задаче 39.21 множество точек отрезка равномощно множеству бесконечных последовательностей $a_1, a_2, \ldots$, где $a_i = 0$ или 1. Поэтому достаточно доказать, что множество упорядоченных пар таких последовательностей равномощно множеству таких последовательностей. Сопоставим паре последовательностей $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ последовательность $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ В результате получим требуемое взаимно однозначное соответствие.

39.23. Предположим, что удалось установить взаимно однозначное соответствие $\varphi : X \to P(X)$. Пусть Y — множество тех элементов $x \in X$, для которых $x \notin \varphi(x)$. Докажем, что этому подмножеству не соответствует никакой элемент множества X. Действительно, предположим, что $Y = \varphi(y)$. Тогда

$$y \in Y \iff y \notin \varphi(y) \iff y \notin Y.$$

Первая эквивалентность вытекает из определения множества Y, а вторая — из того, что $\varphi(y) = Y$.

Замечание. *Обратите внимание, что если $X = \varnothing$, то множество $P(X) = \{\varnothing\}$ состоит из одного элемента.*

39.24. Согласно задаче 39.21 б) множество $P(X)$ всех подмножеств счётного множества X имеет мощность континуума. Согласно теореме Кантора $P(X)$ не равномощно X, т.е. множество, имеющее мощность континуума на равномощно счётному множеству.

Дополнение

1. Рациональная параметризация окружности

Чтобы найти все точки окружности $x^2 + y^2 = 1$, обе координаты которых рациональны, можно воспользоваться следующей конструкцией. Возьмём на окружности произвольную точку A с рациональными координатами и проведём через неё всевозможные прямые. Например, в качестве точки A можно взять точку $(1, 0)$ или точку $(3/5, 4/5)$. Мы проведём вычисления для точки $(1, 0)$, хотя для любой другой точки с рациональными координатами вычисления будут аналогичны.

Прямая, проходящая через точку $(1, 0)$, задаётся либо уравнением $y = t(x - 1)$, либо уравнением $x = 1$ (уравнение $x = 1$ можно получить из уравнения $y = t(x - 1)$, положив $t = \infty$; поэтому удобно считать, что t принимает также значение ∞). Чтобы найти точки пересечения прямой $y = t(x-1)$ и окружности $x^2+y^2 = 1$, нужно решить квадратное уравнение $x^2 + t^2(x - 1)^2 = 1$, т. е.

$$x^2 - \frac{2t}{t^2+1}x + \frac{t^2-1}{t^2+1} = 0.$$

Одна точка пересечения прямой и окружности, соответствующая $x = 1$, известна. Поэтому координату x второй точки пересечения можно найти с помощью теоремы Виета. В результате получим

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad y = t(x-1) = -\frac{2t}{t^2+1}.$$

Таким образом, точка пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $y = t(x - 1)$ имеет координаты

$$\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right).$$

Это означает, что точка окружности имеет рациональные координаты тогда и только тогда, когда она соответствует рациональному значению параметра t. В самом деле, если число t рационально, то числа $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ и $y = \dfrac{-2t}{t^2+1}$ рациональны. А если числа x и y рациональны, то число $t = \dfrac{y}{x-1}$ тоже рационально. Значение $t = \infty$, соответствующее точке $(1, 0)$, удобно при этом тоже считать рациональным.

С помощью рациональной параметризации окружности можно получить описание *пифагоровых троек*, т. е. таких троек натуральных чисел (a, b, c), что $a^2 + b^2 = c^2$. А именно, (a, b, c) — пифагорова тройка тогда и только тогда, когда существуют такие натуральные числа m и n, что $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ (или $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$). Доказательство этого утверждения начнём с того, что избавимся от общих делителей. Если два из трёх чисел a, b, c делятся на d, то третье число тоже делится на d. Поэтому можно считать, что a/c и b/c — несократимые дроби. Точка $(a/c, b/c)$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$ и обе координаты этой точки рациональны. Следовательно,

$$\frac{a}{c} = \pm\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \frac{b}{c} = \pm\frac{2t}{t^2+1},$$

где t — рациональное число. Пусть $t = m/n$ — несократимая дробь. Тогда

$$\frac{a}{c} = \pm\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \quad \frac{b}{c} = \pm\frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

Дробь m/n несократимая, поэтому числа m и n не могут быть оба чётными. Если одно из этих чисел чётно, а другое нечётно, то дроби $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ и $\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ несократимые. Если же оба числа m и n нечётны, т. е. $m = 2p + 1$ и $n = 2q + 1$, то, как легко проверить,

$$\frac{a}{c} = \pm\frac{2m_1n_1}{m_1^2+n_1^2}, \quad \frac{b}{c} = \pm\frac{m_1^2-n_1^2}{m_1^2+n_1^2},$$

где $m_1 = p + q + 1$ и $n_1 = p - q$. Мы получаем несократимые дроби, так как одно из чисел m_1 и n_1 чётно, а другое нечётно.

Как мы уже говорили, взяв любую другую рациональную точку окружности, можно повторить аналогичные вычисления и получить аналогичную параметризацию окружности параметром t, причём рациональным значениям параметра будут соответствовать рациональные

точки окружности. Более того, аналогичным образом можно параметризовать произвольную кривую второго порядка

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \qquad (1)$$

Для этого нужно взять произвольную точку кривой и провести через неё всевозможные прямые.

Предположим, что выполняются следующие условия:

— коэффициенты $a, b, \ldots, f$ рациональны;

— выбранная точка кривой имеет рациональные координаты;

— кривая (1) содержит бесконечно много точек.

Тогда в результате получим такую параметризацию кривой (1), что рациональным значениям параметра t соответствуют точки кривой, обе координаты которых рациональны. Напомним, что мы пользовались тем, что кривая (1) содержит хотя бы одну точку с рациональными координатами. Но такая точка есть не всегда. Самый простой пример — кривая $x^2 + y^2 = -1$.

Более интересен пример кривой $2x^2 + 5y^2 = 1$. Проверим, что на ней нет рациональных точек. Предположим, что (x, y) — рациональная точка этой кривой. Можно считать, что $x = p_1/q$ и $y = p_2/q$, причём у чисел p_1, p_2, q нет общего делителя (т. е. нет числа d, на которое делятся все эти три числа).

Числа p_1, p_2, q удовлетворяют соотношению $2p_1^2 + 5p_2^2 = q^2$. Поэтому числа $2p_1^2$ и q^2 при делении на 5 дают одинаковые остатки. Но число a^2 при делении на 5 может давать лишь остатки ± 1 и 0. Поэтому число $2p_1^2$ при делении на 5 даёт остаток ± 2 или 0, а число q^2 даёт остаток ± 1 или 0. Следовательно, оба числа $2p_1^2$ и q^2 делятся на 5, а значит, они делятся на 25. Но тогда число $5p_2^2$ делится на 25, а значит, число p_2 делится на 5. В результате получаем, что числа p_1, p_2, q делятся на 5, а это противоречит предположению.

Рациональная параметризация кривой второго порядка, отличной от окружности, применяется, например, при решении следующей задачи: «*Описать все кубические многочлены, у которых корни как самих многочленов, так и их производных, рациональны.*» Мы ограничимся случаем, когда один из корней равен 1 и старший коэффициент равен 1 (общий случай легко сводится к этому случаю). В этом случае $P(x) = x(x+a)(x-b)$, где a и b — рациональные числа, и $P'(x) = 3x^2 + 2(a-b)x - ab$. Требуется, чтобы дискриминант $D = 4\big((a-b)^2 + 3ab\big) = 4(a^2 + b^2 + ab)$ был квадратом рационального числа. Эквивалентное условие таково: $a^2 + b^2 + ab = c^2$, где c — рациональное число.

Положим $x = a/c$ и $y = b/c$. Нас интересуют точки с рациональными координатами на кривой $x^2 + y^2 + xy = 1$. Одна такая точка очевидна: $x = 1$ и $y = 0$. Проведём через неё всевозможные прямые $y = t(x-1)$. Подставим это выражение для y в уравнение кривой:

$$x^2 + t^2(x^2 - 2x + 1) + tx(x-1) - 1 = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$x^2 - \frac{t+2t^2}{1+t+t^2}x + \frac{t^2-1}{1+t+t^2} = 0.$$

У этого квадратного уравнения есть корень $x = 1$. Нас интересует второй корень $x = \dfrac{t^2-1}{1+t+t^2}$. При этом $y = t(x-1) = -\dfrac{t^2+2t}{1+t+t^2}$. Таким образом, общее решение этой задачи выглядит следующим образом. Пусть c и t — произвольные рациональные числа. Тогда $a = c\dfrac{t^2-1}{1+t+t^2}$ и $b = -c\dfrac{t^2+2t}{1+t+t^2}$. Отметим, что если мы возьмём $a = t^2 - 1$ и $b = -(t^2+2t)$, где t — целое число, то получим кубический многочлен, у которого корни как самого многочлена, так и корни его производной, — целые числа.

2. Суммы квадратов многочленов

Нетрудно доказать, что любой многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, принимающий неотрицательные значения при всех действительных x, можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами. Прежде всего заметим, что если $p(z) = 0$ и p — многочлен с действительными коэффициентами, то $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = 0$, т. е. $\bar{z}$ — тоже корень многочлена p. Поэтому корни многочлена с действительными коэффициентами разбиваются на действительные корни и пары комплексных корней. Следовательно,

$$p(x) = a\prod_{j=1}^{s}(x - z_j)(x - \bar{z}_j)\prod_{k=1}^{t}(x - \alpha_k)^{m_k},$$

где числа α_k действительные.

Предположим теперь, что $p(x) \geqslant 0$ при всех действительных x. Если x — достаточно большое положительное число, то

$$\prod_{j=1}^{s}(x - z_j)(x - \bar{z}_j)\prod_{k=1}^{t}(x - \alpha_k)^{m_k} > 0,$$

поэтому $a > 0$. Кроме того, все числа m_k чётны. В самом деле, пусть некоторые из чисел m_k нечётны. Можно считать, что нечётны лишь числа $m_1, \ldots, m_s$ и при этом $\alpha_1 < \ldots < \alpha_s$. Тогда при $\alpha_{s-1} < x < \alpha_s$ выполняется неравенство

$$\prod_{k=1}^{t} (x - \alpha_k)^{m_k} < 0,$$

т. е. $p(x) < 0$. (Если $s = 1$, то это неравенство выполняется при всех $x < \alpha_s$.)

Таким образом, действительные корни тоже разбиваются на пары. Следовательно,

$$p(x) = \Big(\sqrt{a} \prod_{j=1}^{l} (x - z_j)\Big)\Big(\sqrt{a} \prod_{j=1}^{l} (x - \bar{z}_j)\Big),$$

где некоторые из чисел z_j могут быть действительными. Пусть

$$\sqrt{a} \prod_{j=1}^{l} (x - z_j) = q(x) + ir(x),$$

где q и r — многочлены с действительными коэффициентами. Тогда

$$\sqrt{a} \prod_{j=1}^{l} (x - \bar{z}_j) = q(x) - ir(x).$$

В итоге получаем $p(x) = \big(q(x)\big)^2 + \big(r(x)\big)^2$.

Но для многочленов от нескольких переменных аналогичное утверждение уже не всегда верно, т. е. существуют *неотрицательные* многочлены (так мы будем называть многочлены с действительными коэффициентами, которые при всех действительных значениях переменных принимают неотрицательные значения), которые нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами. Первым это доказал Гильберт в 1888 г., но он не привёл явный пример такого многочлена. Первый простой пример привёл Т. Моцкин в 1967 г. А именно, он показал, что многочлен

$$F(x, y) = x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) + 1$$

неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами. Основная трудность заключалась, конечно, в том, чтобы найти этот многочлен, а само доказательство его свойств, как мы сейчас увидим, несложно.

Неотрицательность многочлена F следует из того, что

$$F(x,y) = \frac{(1-x^2y^2)^2 + x^2(1-y^2)^2 + x^2(1-x^2)^2y^2}{1+x^2}.$$

Предположим теперь, что $F(x,y) = \sum f_j(x,y)^2$, где f_j — многочлены с действительными коэффициентами. Тогда $\sum f_j(x,0)^2 = F(x,0) = 1$. Если хотя бы один из многочленов $f_j(x,0)$ от переменной x отличен от константы, то $\sum f_j(x,0)^2$ — многочлен, степень которого в два раза больше наибольшей из степеней многочленов $f_j(x,0)$. Следовательно, $f_j(x,0) = c_j$ — некоторая константа, а значит, $f_j(x,y) = c_j + yg_j(x,y)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $f_j(x,y) = c'_j + xg'_j(x,y)$. Ясно, что $c_j = c'_j$ и $f_j(x,y) = c_j + xyh_j(x,y)$, причём

$$\deg h_j = \deg f_j - 2 \leqslant \frac{1}{2}\deg F - 2 = 1;$$

здесь $\deg f$ — степень многочлена f. Таким образом,

$$x^2y^2(x^2+y^2-3) + 1 = x^2y^2\sum h_j^2 + 2xy\sum c_jh_j + \sum c_j^2,$$

т. е.

$$x^2y^2(x^2+y^2-3) - x^2y^2\sum h_j^2 = 2xy\sum c_jh_j + \sum c_j^2 - 1.$$

Все одночлены, встречающиеся в правой части этого равенства, имеют степень не больше 3, а все одночлены, встречающиеся в левой части этого равенства, имеют степень не меньше 4. Следовательно, $x^2y^2(x^2y^2-3) - x^2y^2\sum h_j^2 = 0$, а значит, $x^2+y^2-3 = \sum h_j^2$. Получено противоречие, так как $x^2+y^2-3 < 0$ при $x = y = 0$.

Мы обсудили лишь наиболее простые из известных результатов о суммах квадратов. Сейчас на эту тему известно весьма многое, но многие вопросы остаются пока без ответа. Немецкий математик Давид Гильберт высказал предположение, что любой неотрицательный многочлен от многих переменных можно представить в виде суммы квадратов не многочленов, а рациональных функций. Вопрос о том, верно это или нет, он включил под номером 17 в свой знаменитый список 23 проблем. Семнадцатая проблема Гильберта была решена в 1927 г. Э. Артином. Он доказал, что любой неотрицательный многочлен можно представить в виде суммы квадратов некоторого количества рациональных функций. В 1967 г. А. Пфистер уточнил теорему Артина; он доказал, что любой неотрицательный многочлен от n переменных можно представить в виде суммы 2^n квадратов рациональных функций. Но

до сих пор не известно, можно ли 2^n заменить на меньшее число. Лишь при $n = 2$ известно, что число $2^n = 4$ в данном случае минимально. А именно, в 1971 г. Касселс, Эллисон и Пфистер показали, что тот самый многочлен $F(x, y)$, который мы рассмотрели выше, нельзя представить в виде суммы квадратов трёх рациональных функций. Их доказательство весьма сложно; оно опирается на глубокие результаты из теории эллиптических кривых.

3. Представление чисел в виде суммы двух квадратов

В одном из своих писем Пьер Ферма в 1658 г. сообщал, что он получил “неопровержимые доказательства” того, что любое простое число вида $4k + 1$ является суммой двух квадратов, а любое число является суммой не более чем четырёх квадратов. Никаких записей этих доказательств Ферма не оставил. Прошло почти сто лет, и этими теоремами заинтересовался Леонард Эйлер. Первую из них он доказал в 1747 г., а через два года он нашёл другое изящное и сравнительно простое доказательство той же теоремы. Вторая теорема была доказана лишь в 1770 г. Лагранжем, после чего Эйлер сумел значительно упростить его доказательство.

В дальнейшем были найдены другие интересные доказательства теоремы о представлении простых чисел $p = 4k + 1$ в виде суммы двух квадратов; некоторые из них приведены в решениях задач 31.53–31.55 и 36.19 а). Но все они, как и доказательство Эйлера, были не вполне элементарны. И лишь совсем недавно[1] было получено очень изящное и вполне элементарное доказательство этой теоремы.

Центральное место в этом доказательстве занимает простое, но важное понятие инволюции. Пусть M — некоторое множество. Отображение $\sigma\colon M \to M$ называют *инволюцией*, если $\sigma(\sigma(m)) = m$ для любого элемента m множества M. Примером инволюции служит любая симметрия. Инволюция позволяет разбить точки (элементы множества M) на пары $\{m, \sigma(m)\}$ “симметричных” точек. Для элемента $\sigma(m)$ получается та же самая пара, что и для элемента m, так как $\sigma(\sigma(m)) = m$. Пара элементов не возникает лишь в том случае, когда $\sigma(m) = m$ (такие точки m называют *неподвижными*). Поэтому если на конечном множестве

[1] D. Zagier, *A one-sentence proof that every prime* $p \equiv 1 \pmod 4$ *is a sum of two squares*, Amer. Math. Monthly **97** (1990) P. 114.

M задана инволюция, то чётность количества элементов M совпадает с чётностью количества неподвижных точек инволюции (остальные элементы разбиваются на пары, поэтому их количество чётно).

Общая схема доказательства такова. Рассмотрим множество всех решений уравнения $x^2 + 4yz = p$ в натуральных числах. Достаточно доказать, что если $p = 4k + 1$, то у этого уравнения есть решение, для которого $y = z$. В самом деле, тогда $p = x^2 + (2y)^2$. Решение, для которого $y = z$, — это неподвижная точка инволюции $\sigma(x, y, z) = (x, z, y)$. Поэтому достаточно доказать, что общее количество решений нечётно. Для этого строится совсем другая инволюция τ, имеющая ровно одну неподвижную точку. Вот эта инволюция:

$$\tau(x,y,z) = \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z), & x < y-z; \quad (1) \\ (2y-x, y, x-y+z), & y-z < x < 2y; \quad (2) \\ (x-2y, x-y+z, y), & 2y < x. \quad (3) \end{cases}$$

Отметим сначала, что $x \neq 2y$ и $x \neq y - z$, так как иначе $p = x^2 + 4yz = 4(y^2 + yz)$ или $p = (y-z)^2 + 4yz = (y+z)^2$. Проверим, далее, что любое решение уравнения $x^2 + 4yz = p$ инволюция τ действительно переводит в решение. Это следует из тождеств

$$(x+2z)^2 + 4z(y-x-z) = x^2 + 4yz,$$
$$(x-2y)^2 + 4y(x-y+z) = x^2 + 4yz.$$

Пусть $\tau(x, y, z) = (x', y', z')$. Если $x < y - z$, то $x' = x + 2z > 2z = 2y'$, т. е. точка типа (1) переходит в точку типа (3). Аналогично проверяется, что точка типа (3) переходит в точку типа (1), а точка типа (2) — в точку типа (2). После этого уже легко проверить, что τ — инволюция.

Точка типа (1) не может быть неподвижной, так как $x' = x + 2z > x$; для точки типа (3) $x' = x - 2y < x$. Поэтому неподвижной может быть лишь точка типа (2), причём для неё должно выполняться соотношение $z = z' = x - y + z$, т. е. $x = y$. В таком случае $p = x^2 + 4yz = x(x + 4z)$, а значит, $x = y = 1$ (здесь мы используем простоту числа p). Если $p = 4k + 1$, то $(1, 1, k)$ — неподвижная точка (здесь мы используем то, что число p имеет вид $4k + 1$). Доказательство завершено.

Сделаем ещё некоторые замечания по поводу представления чисел в виде суммы двух квадратов. Прежде всего отметим, что простое число вида $4k+3$ нельзя представить в виде суммы двух квадратов. В самом деле, квадрат числа $2m + 1$ равен $4(m^2 + m) + 1$, поэтому остаток от

деления его на 4 равен 1. Следовательно, остаток от деления суммы двух квадратов на 4 равен 0, 1 или 2, но никак не 3.

Условие простоты числа $p = 4k + 1$ тоже существенно. Например, число 21 нельзя представить в виде суммы двух квадратов.

Отметим также, что если $m = a^2 + b^2$ и $n = c^2 + d^2$, то $mn = (ac + +bd)^2 + (ad - bc)^2$ — тоже сумма двух квадратов. Поэтому произведение простых чисел вида $4k + 1$ можно представить в виде суммы двух квадратов. Если же в какое-то натуральное число простой множитель вида $4k + 3$ входит в нечётной степени, то это число нельзя представить в виде суммы двух квадратов. Это следует, например, из того, что если $a^2 + b^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$, то оба числа a и b делятся на p. (Доказательство этого утверждения опирается на малую теорему Ферма.)

4. Построение правильного 17-угольника

В Древней Греции геометры использовали для построений разные инструменты, но основными инструментами были циркуль и линейка. А в самом знаменитом древнегреческом учебнике геометрии, “Началах” Евклида, никакие другие инструменты вообще не встречаются. Поэтому под геометрическими построениями обычно подразумевают построения циркулем и линейкой. Циркуль позволяет построить окружность данного радиуса с центром в данной точке, а линейка позволяет построить прямую, проходящую через две данные точки.

Построению правильных многоугольников в “Началах” Евклида уделено большое внимание. Построение правильного треугольника описано в Предложении 1 Книги I, а почти вся Книга IV посвящена построению других правильных многоугольников: квадрата, пятиугольника, шестиугольника, пятнадцатиугольника. Но ничего существенно нового геометры не могли добавить очень долго, вплоть до 1796 г., когда 19-летний Гаусс показал, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный 17-угольник. Впоследствии он доказал, что если число $n = 2^{2^k} + 1$ простое, то с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник. Гаусс утверждал также, что он умеет доказывать, что правильный n-угольник можно построить лишь в том случае, когда $n = 2^m p_1 \ldots p_s$, где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые числа вида $2^{2^k} + 1$. Но ни в одной из его работ нет доказательства этого утверждения.

Построение правильного 17-угольника в большей степени относится не к геометрии, а к алгебре. Формула Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

показывает, что корни уравнения $x^n - 1 = 0$ имеют вид $\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$. На комплексной плоскости эти точки являются вершинами правильного n-угольника. Таким образом, построение правильного n-угольника тесно связано с решением уравнения $x^n - 1 = 0$. Это уравнение имеет очевидный корень $x = 1$. Чтобы избавиться от него, поделим многочлен $x^n - 1$ на $x - 1$. В результате получим многочлен $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$. Именно его мы будем рассматривать в дальнейшем.

Будем говорить, что комплексное число $a+ib$ можно построить, если можно построить отрезки длиной a и b, т. е. можно построить точку $a+ib$ на комплексной плоскости. Если задан отрезок единичной длины, то по данным отрезкам a и b можно построить отрезки $a \pm b$, ab, a/b, $\sqrt{a}$. Несложно проверить, что

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right)^{1/2} + i\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)^{1/2}\right].$$

Поэтому если отрезки a и b можно построить, то число $\sqrt{a+ib}$ тоже можно построить. В итоге получаем, что если числа u и v можно построить, то корни уравнения $x^2 + ux + v = 0$ тоже можно построить.

Разберём для начала с этой точки зрения построение правильных n-угольников при $n = 3$ и $n = 5$. При $n = 3$ получаем уравнение $x^2+x+1 = 0$. Это уравнение квадратное, поэтому его корни можно построить.

При $n = 5$ получаем уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Положим $u = x + x^{-1}$. Легко проверить, что $u^2 + u - 1 = 0$. Корни u_1 и u_2 этого уравнения можно построить. С их помощью можно построить корни уравнений $x^2 - u_1x + 1 = 0$ и $x^2 - u_2x + 1 = 0$. Эти корни являются корнями исходного уравнения.

Теперь можно непосредственно заняться построением правильного 17-угольника. Для этого, как мы убедились, достаточно доказать, что корни уравнения $x^{16} + x^{15} + \ldots + x + 1 = 0$ можно получить, последовательно решая квадратные уравнения. Достаточно даже получить один корень $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{17} + i\sin\dfrac{2\pi}{17}$; остальные корни имеют вид $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{16}$. Доказательство Гаусса основано на специальной нумерации этих корней. Он нумерует корни таким образом, чтобы при фиксированном l

переход от ω_k (корня с номером k) к ω_{k+l} происходил по одному и тому же правилу, а именно, чтобы при таком переходе число ω_k возводилось в некоторую фиксированную степень. Такую нумерацию можно получить, положив $\omega_k = \varepsilon^{g^k}$, где числа $1, g, g^2, g^3, \ldots, g^{15}$ дают разные остатки при делении на 17. В самом деле, в таком случае

$$\omega_{k+l} = \varepsilon^{g^{k+l}} = \varepsilon^{g^k g^l} = (\omega_k)^{g^l}.$$

В качестве g можно взять, например, число 3. При этом

$$\omega_0 = \varepsilon,\ \omega_1 = \varepsilon^3,\ \omega_2 = \varepsilon^9,\ \omega_3 = \varepsilon^{10},$$

$$\omega_4 = \varepsilon^{13},\ \omega_5 = \varepsilon^5,\ \omega_6 = \varepsilon^{15},\ \omega_7 = \varepsilon^{11},$$

$$\omega_8 = \varepsilon^{16},\ \omega_9 = \varepsilon^{14},\ \omega_{10} = \varepsilon^8,\ \omega_{11} = \varepsilon^7,$$

$$\omega_{12} = \varepsilon^4,\ \omega_{13} = \varepsilon^{12},\ \omega_{14} = \varepsilon^2,\ \omega_{15} = \varepsilon^6.$$

Рассмотрим сначала квадратное уравнение с корнями

$$x_1 = \sum_{k=0}^{7} \omega_{2k}, \quad x_2 = \sum_{k=0}^{7} \omega_{2k+1}.$$

По теореме Виета $\sum \omega_i = -1$, поэтому $x_1 + x_2 = -1$. Легко проверить, что

$$x_1 = (\varepsilon + \varepsilon^{16}) + (\varepsilon^8 + \varepsilon^9) + (\varepsilon^2 + \varepsilon^{15}) + (\varepsilon^4 + \varepsilon^{13}) = \\ = 2(\cos\alpha + \cos 8\alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha),$$

$$x_2 = 2(\cos 3\alpha + \cos 7\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha),$$

где $\alpha = 2\pi/17$. Воспользовавшись формулой

$$2\cos p\alpha \cos q\alpha = \cos(p+q)\alpha + \cos(p-q)\alpha,$$

получим

$$x_1 x_2 = 8(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos 8\alpha) = 4(x_1 + x_2) = -4.$$

Таким образом, x_1 и x_2 удовлетворяют квадратному уравнению $x^2 + x - 4 = 0$ с целыми коэффициентами. Следовательно, x_1 и x_2 можно построить.

Рассмотрим теперь квадратные уравнения с корнями

$$y_1 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k} = 2(\cos\alpha + \cos 4\alpha),$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k+2} = 2(\cos 8\alpha + \cos 2\alpha).$$

Легко проверить, что $y_1 + y_2 = x_1$ и

$$y_1 y_2 = 2(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos 8\alpha) = x_1 + x_2 = -1.$$

Таким образом, y_1 и y_2 — корни квадратного уравнения $y^2 - x_1 y + 1 = 0$. Аналогично доказывается, что

$$y_3 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k+1} = 2(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha),$$

$$y_4 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k+3} = 2(\cos 7\alpha + \cos 6\alpha)$$

— корни квадратного уравнения $y^2 - x_2 y + 1 = 0$. Следовательно, y_1, y_2, y_3 и y_4 можно построить.

Рассмотрим, наконец, квадратное уравнение с корнями

$$z_1 = \omega_0 + \omega_8 = 2\cos\alpha, \quad z_2 = \omega_4 + \omega_{12} = 2\cos 4\alpha.$$

Ясно, что $z_1 + z_2 = y_1$ и $z_1 z_2 = 2(\cos 5\alpha + \cos 3\alpha) = y_3$. Таким образом, z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения $z^2 - y_1 z + y_3 = 0$. Поэтому число $z_1 = 2\cos\alpha$ можно построить, а значит, можно построить и число $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Но тогда можно построить и правильный 17-угольник.

5. Построения циркулем и линейкой

Здесь мы докажем, что с помощью циркуля и линейки нельзя выполнить некоторые построения, например, нельзя построить отрезок $\sqrt[3]{2}a$, если задан отрезок длины a, и нельзя разделить произвольный угол на три равные части. Первая из этих задач называется *удвоением куба*, потому что она эквивалентна задаче о построении ребра куба в 2 раза большего объёма, чем куб с данным ребром. Вторая задача называется *трисекцией угла*. Кроме того, мы докажем, что с помощью циркуля и линейки нельзя построить треугольник по длинам его биссектрис.

Сначала нужно точно сформулировать, что такое *построение циркулем и линейкой*. В задаче на построение циркулем и линейкой обычно бывает задан некоторый набор точек. Окружность и прямую можно задать двумя точками, поэтому включать в набор исходных данных окружности и прямые нет необходимости. В некоторых задачах набор исходных данных может быть пустым множеством; например, в задаче о построении правильного треугольника или пятиугольника исходного

набора данных нет. Задача на построение заключается в том, чтобы добавить к исходному набору точек некоторые другие точки так, чтобы при этом в новом наборе содержались некоторые требуемые точки. К исходным данным разрешается добавлять следующие точки, прямые и окружности:

1) прямую, проходящую через две данные точки;

2) окружность с данным центром, проходящую через данную точку;

3) точку пересечения двух данных прямых, двух данных окружностей или данной прямой и данной окружности;

4) произвольную точку.

Добавление произвольной точки требует пояснений. Подразумевается, что конечный результат должен не зависеть от выбора этой точки. Точнее говоря, если вместо выбранной произвольной точки мы возьмём любую другую достаточно близкую к ней точку, то при этом конечный результат не должен измениться. Отметим, что операция выбора произвольной точки на данной прямой l или данной окружности S не даёт ничего нового. Действительно, вместо этого можно выбрать две произвольные точки A и B и построить точку пересечения прямой AB с прямой l или с окружностью S.

Выясним, по каким алгебраическим правилам получаются координаты добавляемых точек из координат исходных точек. Введём на плоскости прямоугольную систему координат Oxy. Каждая точка плоскости имеет две координаты. Рассмотрим набор всех численных значений координат исходных точек, не различая координаты x и y.

Теорема 1. *Предположим, что к набору точек с координатами t_1, ..., t_n в процессе построений циркулем и линейкой добавилась ровно одна точка с координатами s_1 и s_2. Тогда либо число s_i $(i = 1, 2)$ рационально, либо оно получается из чисел t_1, ..., t_n применением операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.*

Доказательство. Разберём все возможные варианты добавления одной точки.

а) Добавление произвольной точки. Для любой точки найдётся сколь угодно близкая к ней точка, обе координаты которой рациональны. Поэтому в качестве произвольной точки всегда можно выбрать точку с рациональными координатами.

б) Добавление точки пересечения двух прямых. Прямая, проходящая через точки с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2), задаётся уравнением

$$\frac{x - a_1}{y - b_1} = \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1},$$

т.е. $(b_2 - b_1)x + (a_1 - a_2)y = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Коэффициенты этого уравнения получаются из координат исходных точек применением операций умножения и вычитания.

Точка пересечения прямых, заданных уравнениями

$$p_1 x + q_1 y = r_1, \quad p_2 x + q_2 y = r_2,$$

имеет координаты

$$\left(\frac{r_1 q_2 - r_2 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}, \frac{p_1 r_2 - p_2 r_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \right).$$

Эти числа получаются из коэффициентов уравнений применением операций вычитания, умножения и деления. Следовательно, координаты точки пересечения двух прямых, проходящих через две пары данных точек, можно получить из координат этих четырёх данных точек, применяя операции вычитания, умножения и деления.

Операция извлечения квадратного корня пока не использовалась. Она нужна лишь для нахождения координат точек пересечения прямой и окружности или двух окружностей.

в) Добавление точки пересечения прямой и окружности. Окружность с центром (a_1, b_1), проходящая через точку (a_2, b_2), имеет уравнение

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2,$$

т.е. $x^2 - 2a_1 x + y^2 - 2b_1 y = c_1$, где $c_1 = a_2^2 - 2a_1 a_2 + b_2^2 - 2b_1 b_2$.

Для нахождения координат точек пересечения прямой $px + qy = r$ и окружности $x^2 - 2ax + y^2 - 2by = c$ нужно решить систему уравнений

$$px + qy = r, \quad x^2 - 2ax + y^2 - 2by = c.$$

Одно из чисел p и q отлично от нуля. Будем для определённости считать, что $q \neq 0$. Тогда из первого уравнения можно получить выражение для y через x:

$$y = \frac{r - px}{q}. \tag{1}$$

Подставив это выражение в уравнение окружности, получим квадратное уравнение

$$(p^2 + q^2)x^2 + 2(bpq - aq^2 - pr) + (r^2 - 2bqr - c^2 q) = 0.$$

Корни x_1 и x_2 этого уравнения выражаются через его коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения и извлечения квадратного корня. Соответствующие выражения для y_1 и y_2 можно получить по формуле (1).

г) Добавление точки пересечения двух окружностей. Для нахождения координат точки пересечения двух окружностей нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2a_1x + y^2 - 2b_1y &= c_1, \\ x^2 - 2a_2x + y^2 - 2b_2y &= c_2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, можно перейти к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y &= c_1 - c_2, \\ x^2 - 2a_2x + y^2 - 2b_2y &= c_2. \end{cases}$$

Система уравнений такого вида была решена при разборе случая в). □

Удвоение куба

Отрезок a можно выбрать в качестве отрезка $(1, 0)$ на оси Ox. Таким образом, в задаче удвоения куба требуется построить точку с координатами $(\sqrt[3]{2}, 0)$. Предположим, что эту точку можно построить с помощью циркуля и линейки. Тогда согласно теореме 1 число $\sqrt[3]{2}$ можно получить из рациональных чисел, используя операции сложения, вычитания, деления, умножения и извлечения квадратного корня, т.е., как мы будем для краткости говорить, это число можно выразить *в квадратных радикалах*. Для доказательства неразрешимости задачи удвоения куба с помощью циркуля и линейки нужно доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ не выражается в квадратных радикалах. Напомним, что число $\sqrt[3]{2}$ иррационально.

Теорема 2. *Предположим, что один из корней уравнения $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, где A, B, C — рациональные числа, выражается в квадратных радикалах. Тогда это уравнение имеет рациональный корень.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что любое число, полученное из чисел $u_1, \ldots, u_n$ применением операций сложения, вычитания, умножения и деления, можно представить в виде

$$P(u_1, \ldots, u_n)/Q(u_1, \ldots, u_n),$$

где P и Q — многочлены с рациональными коэффициентами, т.е. выражения, полученные без использования операции деления. В самом деле,

$$\frac{P_1}{Q_1} \pm \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 \pm P_2Q_1}{Q_1Q_2},$$

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2}{P_2Q_1}.$$

Для любого числа α, выражающегося в квадратных радикалах, можно определить его *ранг* как наибольшее число расположенных один внутри другого квадратных радикалов в выражении для числа α. Это определение нужно сформулировать более аккуратно. Например, $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2 + \sqrt{2}$, т.е. $\sqrt{3 + 2 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$. Тем самым одно выражение числа $1 + \sqrt{2}$ имеет ранг 1, а другое выражение того же числа имеет ранг 2. Поэтому нужно сначала определить ранг выражения, а в качестве ранга самого числа взять наименьший из рангов всех его выражений.

Для числа α ранга n можно определить его *порядок* следующим образом. Рассмотрим для числа α все его выражения ранга n. В каждое такое выражение входит несколько радикалов вида $\sqrt{R}$, где ранг выражения R равен $n - 1$; пусть k — количество таких радикалов. Наименьшее из всех таких чисел k будем называть порядком числа α.

Кубическое уравнение $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ имеет три корня x_1, x_2, x_3 (не обязательно различных), для которых выполняется соотношение

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + Ax^2 + Bx + C.$$

В частности, $x_1 + x_2 + x_3 = -A$.

Предположим, что один из корней этого кубического уравнения выражается в квадратных радикалах. Остальные корни могут выражаться в квадратных радикалах, а могут и не выражаться. Возьмём все корни, которые выражаются в квадратных радикалах, и выберем среди них все корни с наименьшим рангом. Затем среди этих корней выберем корни с наименьшим порядком. Если такой корень один, то выберем его, а если их несколько, то выберем любой из них. Пусть при этом выбран корень x_1 с рангом n и порядком k. Требуется доказать, что $n = 0$, т.е. число x_1 рационально. Предположим, что $n \geqslant 1$. Рассмотрим для числа x_1 какое-нибудь выражение ранга n и порядка k. Пусть $\sqrt{R}$ — одно из выражений ранга n, входящих в это выражение. Тогда x_1 можно представить в виде

$$x_1 = \frac{a + b\sqrt{R}}{c + d\sqrt{R}}, \tag{2}$$

где выражения a, b, c и d содержат не более $k-1$ радикалов ранга n и не содержат радикалов большего ранга. Докажем, что $c - d\sqrt{R} \neq 0$. Если $d = 0$, то $c \neq 0$. Если же $d \neq 0$, то из равенства $c - d\sqrt{R} = 0$ следовало бы, что $\sqrt{R} = c/d$. Подставляя это значение числа $\sqrt{R}$ в формулу (2), можно получить для x_1 выражение ранга не более n, содержащего не более $k-1$ радикалов ранга n. Это противоречит тому, что ранг числа x_1 равен n, а порядок равен k. Следовательно, $c - d\sqrt{R} \neq 0$, а значит,

$$x_1 = \frac{(a + b\sqrt{R})(c - d\sqrt{R})}{c^2 - d^2R} = p + q\sqrt{R}.$$

Подставив значение $x_1 = p + q\sqrt{R}$ в кубическое уравнение, получим

$$0 = (p + q\sqrt{R})^3 + A(p + q\sqrt{R})^2 + B(p + q\sqrt{R}) + C = M + N\sqrt{R},$$

где выражения M и N содержат не более $k-1$ радикалов ранга n и не содержат радикалов большего ранга. Если $N \neq 0$, то $\sqrt{R} = -M/N$, а выше было показано, что такого быть не может. Следовательно, $M = N = 0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$(p - q\sqrt{R})^3 + A(p - q\sqrt{R})^2 + B(p - q\sqrt{R}) + C = M - N\sqrt{R},$$

т.е. $x_2 = p - q\sqrt{R}$ — другой корень кубического уравнения. А так как $x_1 + x_2 + x_3 = -A$, то $x_3 = -A - x_1 - x_2 = -A - 2p$. Наибольший ранг радикалов, входящих в это выражение числа x_3, не превосходит n, причём радикалов ранга n не более $k-1$. Это противоречит выбору корня x_1 как корня наименьшего ранга n и при этом наименьшего порядка k. □

С помощью теоремы 2 легко доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ нельзя выразить в радикалах. Действительно, рассмотрим кубическое уравнение $x^3 - 2 = 0$. У него есть лишь один вещественный корень, а именно, $\sqrt[3]{2}$. Число $\sqrt[3]{2}$ не рационально, поэтому уравнение $x^3 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней. Следовательно, у этого уравнения нет корней, выражающихся в радикалах.

Трисекция угла

Чтобы доказать, что не существует общего способа построений, позволяющего разделить на три равные части любой угол, достаточно доказать, что с помощью циркуля и линейки нельзя разделить на три равные части угол $30°$.

Введём систему координат Oxy, выбрав в качестве начала координат вершину данного угла AOB и направив ось Ox по стороне OA.

Можно считать, что точки A и B удалены от точки O на расстояние 1. Тогда в задаче трисекции угла требуется по точке с координатами $(\cos 3\varphi, \sin 3\varphi)$ построить точку с координатами $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. В случае, когда $\varphi = 10^\circ$, исходная точка имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Обе её координаты выражаются в квадратных радикалах. Поэтому достаточно доказать, что число $\sin 10^\circ$ не выражается в квадратных радикалах.

Так как $\sin 3\varphi = \sin(\varphi + 2\varphi) = \sin\varphi\cos 2\varphi + \cos\varphi\sin 2\varphi = \sin\varphi(1 - 2\sin^2\varphi) + 2(1 - \sin^2\varphi)\sin\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, то число $x = \sin 10^\circ$ удовлетворяет кубическому уравнению $3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$, т.е.

$$8x^3 - 6x + 1 = 0. \qquad (3)$$

Согласно теореме 2 достаточно доказать, что у этого уравнения нет рациональных корней. Положим $2x = p/q$, где p и q — целые числа, не имеющие общих делителей. Тогда $p^3 - 3pq^2 + q^3 = 0$, т.е. $q^3 = p(3q^2 - p^2)$. Следовательно, число q делится на p, а значит, $p = \pm 1$. Поэтому $\pm 1 \mp 3q^2 + q^3 = 0$, т.е. $q^2(q \pm 3) = \pm 1$. Число 1 делится на q, поэтому $q = \pm 1$. В итоге получаем, что $x = \pm 1/2$. Легко проверить, что значения $\pm 1/2$ не являются корнями уравнения (3). Получено противоречие, поэтому уравнение (3) не имеет рациональных корней, а значит, число $\sin 10^\circ$ не выражается в квадратных радикалах.

Построение треугольника по биссектрисам

Если заданы длины медиан треугольника или длины его высот, то треугольник можно построить циркулем и линейкой. Но если заданы длины биссектрис треугольника, то нет общего способа, позволяющего построить сам треугольник циркулем и линейкой. Чтобы это доказать, достаточно доказать, что треугольник, длины биссектрис которого равны 3, 1 и 1, нельзя построить циркулем и линейкой.

Нам потребуются два геометрических факта, доказательства которых можно найти в книге В.В.Прасолов «Задачи по планиметрии», издание 4-е, МЦНМО, 2001. Прежде всего заметим, что треугольник, у которого две биссектрисы равны, равнобедренный (задача 5.50 из указанной книги), поэтому в рассматриваемом треугольнике $\beta = \gamma$, т.е. $\alpha = \pi - 2\beta$. Далее, согласно задаче 12.35,г) из указанной книги

$$l_a = 4p\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)/(\sin\beta + \sin\gamma),$$
$$l_b = 4p\sin(\alpha/2)\sin(\gamma/2)/(\sin\alpha + \sin\gamma).$$

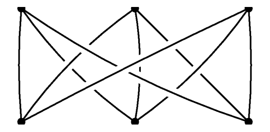


Рис. 1.

Поэтому

$$3=\frac{l_a}{l_b}=\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin2\beta+\sin\beta}{4\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{3\beta}{2}}{2\cos\beta}.$$

Если рассматриваемый треугольник можно было бы построить циркулем и линейкой, то число $x=\sin(\beta/2)$ выражалось бы в квадратных радикалах. Ясно, что $\sin(3\beta/2)=3x-4x^3$ и $\cos\beta=1-2x^2$. Поэтому для x мы получаем уравнение $4x^3-12x^2-3x+6=0$. После замены $y=2x-2$ перейдём к уравнению $y^3-15y-10=0$. Согласно теореме 2 достаточно проверить, что это уравнение не имеет рациональных корней. Предположим, что число p/q, где p и q — взаимно простые целые числа, является корнем этого уравнения. Тогда $p^3=5q^2(3p+2q)$, поэтому $p=5r$, где r — целое число. В таком случае $25r^3=q^2(15r+2q)$. Следовательно, число q тоже делится на 5, чего не может быть.

6. Хроматический многочлен графа

Рассмотрим в пространстве систему из нескольких точек и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек. При этом нас будут интересовать лишь то, какие именно пары точек соединены отрезками. Более того, эти отрезки можно считать не прямолинейными, а криволинейными. Такую систему точек называют *графом*; сами точки называют *вершинами* графа, а отрезки — *рёбрами* графа.

Граф называют *планарным*, если его можно расположить на плоскости так, чтобы его рёбра попарно не пересекались. Например, граф, изображённый на рис. 1, не планарный. Это следует из решения известной задачи о трёх домах и трёх колодцах: “Можно ли каждый из трёх домов соединить дорожкой с каждым из трёх колодцев так, чтобы эти дорожки не пересекались?”

В 1890 г. было доказано, что вершины любого планарного графа можно раскрасить в 5 цветов так, что концы любого ребра будут раз-

ноцветными. После этого долго была популярна задача четырёх красок: “Любой ли планарный граф можно раскрасить в 4 цвета?” (Под раскраской графа здесь и далее подразумевается такая раскраска вершин графа, что концы любого ребра разноцветные.) Лишь в 1977 г. было доказано, что любой планарный граф можно раскрасить в 4 цвета. Это доказательство опиралось на перебор огромного количества различных вариантов, выполненный с помощью компьютера.

С раскрасками графов связано одно интересное явление, которое мы сейчас обсудим. Пусть G — некоторый граф, а $f(G,x)$ — количество раскрасок этого графа в x цветов. Удивительным образом оказывается, что $f(G,x)$ — многочлен степени n, где n — число вершин графа. Прежде чем доказывать это утверждение, разберём два простых примера.

Наиболее прост тот случай, когда у графа G нет вообще никаких рёбер, а есть только n вершин. В этом случае каждую вершину можно окрасить любым цветом, независимо от остальных вершин. Поэтому $f(G,x) = x^n$.

Другой крайний случай — граф G с n вершинами, любые две из которых соединены ребром. В этом случае все вершины должны быть разноцветными, поэтому $f(G,x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

В обоих случаях $f(G,x)$ — многочлен степени n. Как мы сейчас убедимся, из этого уже следует, что $f(G,x)$ — многочлен степени n для любого графа G с n вершинами.

Рассмотрим граф G_n^+ с n вершинами, в котором две вершины A и B соединены ребром. Сопоставим ему граф G_n^-, в котором все вершины и рёбра те же самые, за исключением того, что в нём нет ребра, соединяющего вершины A и B. Сопоставим графу G_n^+ также граф G_{n-1}, в котором все вершины и рёбра такие же, как у графов G_n^+ и G_n^-, за исключением того, что в нём вершины A и B отождествлены друг с другом (при этом могут возникнуть двойные рёбра, но мы их заменяем на обычные рёбра). Примеры графов G_n^-, G_n^+ и G_{n-1} приведены на рис. 2. При этом двойное ребро, соединяющее вершины $A = B$ и D заменено на обычное (однократное) ребро.

Любая раскраска графа G_n^- с одноцветными вершинами A и B соответствует определённой раскраске графа G_{n-1}, а любая раскраска того же графа с разноцветными вершинами A и B — раскраске графа G_n^+. Поэтому

$$f(G_n^-, x) = f(G_n^+, x) + f(G_{n-1}, x). \qquad (1)$$

С помощью формулы (1) несложно доказать, что если G_n — граф с

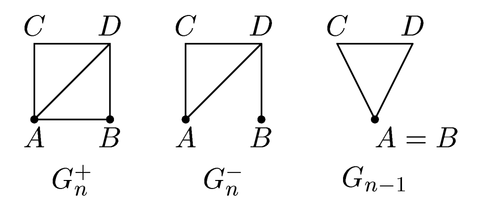


Рис. 2.

n вершинами, то $f(G_n, x)$ — многочлен степени n. Применим для этого индукцию по n. При $n = 1$ граф состоит из одной точки, поэтому $f(G_1, x) = x$. Предположим, что для любого графа G_{n-1} с $n-1$ вершиной функция $f(G_{n-1}, x)$ представляет собой многочлен степени n. Возьмём произвольный граф G_n^- с n вершинами. Применив несколько раз формулу (1), можно перейти от графа G_n^- к графу с n вершинами, любые две из которых соединены ребром. Хроматический многочлен полученного графа равен $x(x-1)\ldots(x-n+1)$, поэтому

$$f(G_n^-, x) = x(x-1)\ldots(x-n+1) + f_1 + \ldots + f_k,$$

где $f_1, \ldots, f_k$ — хроматические многочлены графов с $n-1$ вершиной, т. е. многочлены степени $n-1$.

При доказательстве мы воспользовались тем, что хроматический многочлен графа, все вершины которого соединены рёбрами, равен $x(x-1)\ldots(x-n+1)$. Но можно воспользоваться и тем, что хроматический многочлен графа, у которого вообще нет рёбер, равен x^n. Для этого формулу (1) нужно записать в виде

$$f(G_n^+, x) = f(G_n^-, x) - f(G_{n-1}, x). \tag{2}$$

Применив такую формулу несколько раз, можно перейти от графа G_n^+ к графу с n вершинами, у которого вообще нет рёбер. Поэтому

$$f(G_n^+, x) = x^n - g_1 - \ldots - g_l, \tag{3}$$

где $g_1, \ldots, g_l$ — хроматические многочлены графов с $n-1$ вершиной.

Второй способ доказательства имеет некоторые преимущества. Например, записав хроматический многочлен графа в виде (3), мы без труда докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Хроматический многочлен графа с n вершинами имеет вид*

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3} + \ldots, \quad \textit{где } a_i \geqslant 0.$$

Эту теорему сформулировал и доказал в 1932 г. американский математик Хасслер Уитни.

7. Трансцендентность чисел e и π

Теорема 1. *Число e трансцендентно.*

Доказательство. Предположим, что число e алгебраическое. Тогда выполняется равенство

$$a_m e^m + \ldots + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

где a_0, a_1, $\ldots$, a_m — целые числа.

Согласно задаче 29.14 а) для любого многочлена $f(x)$ степени d имеет место равенство

$$\int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0) - e^{-x}F(x),$$

где $F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(d)}(x)$. В частности, для каждого целого неотрицательного числа k имеет место равенство

$$\int_0^k f(t)e^{-t}dt = F(0) - e^{-k}F(k),$$

т.е.

$$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt. \tag{2}$$

Пусть $f(t) = \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\big((x-1)\ldots(x-m)\big)^n$, где n — некоторое натуральное число (выбрав n подходящим образом, мы вскоре придём к противоречию). Запишем равенство (2) для $k = 0, 1, \ldots, m$, умножим каждое из таких равенств на соответствующее a_k и сложим их. Из равенства (1) следует, что $\sum_{k=0}^m a_k e^k F(0) = 0$, поэтому в результате мы получим

$$-\sum_{k=0}^m a_k F(k) = \sum_{k=0}^m a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt. \tag{3}$$

Покажем, что n можно выбрать так, что в левой части равенства (3) стоит целое ненулевое число, а в правой части — число, абсолютная величина которого меньше 1.

Легко видеть, что $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-2)}(0) = 0$, $f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n$ и $f^{(l)}(k) = 0$ при $0 \leqslant l \leqslant n-1$ и $1 \leqslant k \leqslant m$. Согласно задаче 28.19 коэффициенты производной порядка l многочлена $x^{n-1}\big((x-1)\ldots(x-m)\big)^n$ делятся на $l!$. Поэтому все производные $f^{(l)}(x)$ при $l \geqslant n$ имеют целые коэффициенты, делящиеся на n. Значит,

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(0) = (-1)^{mn}(m!)^n + nA,$$

$$F(k) = \sum_{l=n}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(k) = nB_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Здесь A и B_k — целые числа.

Пусть n — простое число, которое одновременно больше m и $|a_0|$. Тогда в левой части равенства (3) слагаемое $-a_0F(0)$ не делится на n, а слагаемые $-a_kF(k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, делятся на n. Значит, число $-\sum_{k=0}^{m} a_kF(k)$ целое и не равное нулю. В частности, его абсолютная величина не меньше 1.

Докажем теперь, что если n достаточно велико, то абсолютная величина правой части равенства (3) меньше 1. Если $0 \leqslant x \leqslant m$, то $|x-k| \leqslant m$, поэтому $|f(x)| \leqslant \dfrac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!}$. Следовательно,

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt\right| < \frac{m^{(m+1)n}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{m} |a_k| e^k \int_0^k e^{-t}dt.$$

Ясно, что $\int_0^k e^{-t}dt = 1 - e^{-k} < 1$, поэтому $\sum_{k=0}^{m} |a_k|e^k \int_0^k e^{-t}dt < e^m \sum_{k=0}^{m} |a_k| = c_0$. Таким образом,

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt\right| < c_0 \frac{c_1^n}{(n-1)!},$$

где $c_1 = m^{m+1}$. Согласно задаче 25.19 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_1^n}{(n-1)!} = 0$. Выбрав n так, что $c_0 \dfrac{c_1^n}{(n-1)!} < 1$, получим противоречие. □

Теорема 2. *Число π трансцендентно.*

Доказательство. Предположим, что число π алгебраическое. Тогда число πi тоже алгебраическое, поскольку число i алгебраическое (оно

является корнем многочлена x^2+1), а произведение двух алгебраических чисел является алгебраическим числом (задача 32.39). Таким образом, число πi является корнем многочлена

$$p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m = 0, \tag{4}$$

где $p_0, \ldots, p_m$ — целые числа, причём $p_0 > 0$. Будем предполагать, что среди всех многочленов с целыми коэффициентами, имеющих корень πi, мы выбрали уравнение наименьшей степени.

Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — корни уравнения (4); одним из этих корней является πi. Согласно задаче 30.29 $e^{\pi i} = -1$, поэтому

$$(e^{\beta_1}+1)(e^{\beta_2}+1)\ldots(e^{\beta_m}+1) = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем равенство вида

$$1 + \sum e^{\beta_k} + \sum e^{\beta_k+\beta_l} + \ldots + \sum e^{\beta_1+\ldots+\beta_m} = 0. \tag{5}$$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — те из показателей β_k, $\beta_k+\beta_l$, $\ldots$, $\beta_1+\ldots+\beta_m$, которые отличны от нуля, $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_N$ — остальные показатели (все они равны нулю). Отметим, что $N > n$, поскольку уравнение (4) имеет корень $-\pi i$ (задача 23.18). Равенство (5) можно переписать в виде

$$K + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \ldots + e^{\alpha_n} = 0, \tag{6}$$

где $K \geqslant 2$ — некоторое натуральное число.

Числа $p_0\beta_1, \ldots, p_0\beta_m$ являются целыми алгебраическими числами (задача 32.36), поэтому числа $p_0\alpha_1, \ldots, p_0\alpha_n$ тоже являются целыми алгебраическими числами (задача 32.39).

Если $F(z_1,\ldots,z_n)$ — симметрический многочлен с целыми коэффициентами, то $F(p_0\alpha_1,\ldots,p_0\alpha_n)$ — целое число. Действительно, $F(z_1,\ldots,z_n)$ является многочленом с целыми коэффициентами от элементарных симметрических функций $\sigma_k(z_1,\ldots,z_n)$. Но $\sigma_k(p_0\alpha_1,\ldots,p_0\alpha_n) = \sigma_k(p_0\alpha_1,\ldots,p_0\alpha_N)$, поскольку эти выражения различаются лишь слагаемыми, равными нулю. Остаётся заметить, что $\sigma_k(p_0\alpha_1,\ldots,p_0\alpha_N)$ можно представить в виде многочлена с целыми коэффициентами от элементарных симметрических функций от $p_0\beta_1, \ldots, p_0\beta_m$.

Лемма. *Пусть* $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ *и* $F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x)$. *Тогда*

$$P \cdot e^x = e^{|x|}Q(x) + F(x),$$

где $P = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot k!$ *и* $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x) x^{k+1}$, *где* $|q_k(x)| < 1$.

Доказательство. Согласно задаче 29.47

$$k!e^x = k! + k!x + \frac{k!}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k!}{(k-1)!}x^{k-1} + x^k + x^{k+1}q_k(x)e^{|x|},$$

где $|q_k(x)| < 1$.

Полагая $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ и складывая соответствующие равенства, домноженные на c_k, получаем требуемое. □

Положим в равенстве из леммы последовательно $x = 0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, умножим первое из этих равенств на K и сложим все эти равенства. Воспользовавшись равенством (6), получим

$$KF(0) + F(\alpha_1) + \ldots + F(\alpha_n) + e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + \ldots + e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n) = 0. \quad (7)$$

Докажем, что существует многочлен $f(x)$, для которого это равенство не может выполняться в том случае, когда $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — алгебраические числа.

Пусть

$$f(x) = \frac{p_0^{nt+t-1}x^{t-1}(x-\alpha_1)^t(x-\alpha_2)^t\ldots(x-\alpha_n)^t}{(t-1)!}, \quad (8)$$

где t — простое число, которое мы выберем чуть позже. Многочлен $f(x)$ можно представить в следующих видах:

$$f(x) = \frac{A_{t-1}x^{t-1} + A_t x^t + \ldots}{(t-1)!},$$

$$f(x) = \frac{B_t p_0^t(x-\alpha_1)^t + B_{t+1}p_0^{t+1}(x-\alpha_1)^{t+1} + \ldots}{(t-1)!},$$

$$f(x) = \frac{C_t p_0^t(x-\alpha_2)^t + C_{t+1}p_0^{t+1}(x-\alpha_2)^{t+1} + \ldots}{(t-1)!},$$

$$\ldots\ldots$$

Первое из этих равенств получается, если в левой части равенства (8) раскрыть скобки. Ясно, что

$$A_{t-1} = (-1)^n p_0^{t-1}p_0^{t-1}(p_0\alpha_1)^t\ldots(p_0\alpha_n)^t \quad (9)$$

— целое число. Аналогично доказывается, что A_t, A_{t+1}, …— целые числа.

Второе равенство получается, если записать (8) в виде

$$f(x) = \frac{p_0^{nt+t-1}[(x-\alpha_1)+\alpha_1]^{t-1}(x-\alpha_1)^t[(x-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)]^t\ldots}{(t-1)!},$$

При этом выражения B_t, B_{t+1}, ... являются многочленами с целыми коэффициентами от $p_0\alpha_1$, $p_0\alpha_2$, ..., $p_0\alpha_n$. Остальные представления многочлена $f(x)$ получаются аналогично. Каждая из сумм $B_t + C_t + \ldots$, $B_{t+1} + C_{t+1} + \ldots$, ... является целым числом, поскольку она является симметрическим многочленом с целыми коэффициентами от $p_0\alpha_1$, ..., $p_0\alpha_n$.

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} F(0) &= A_t + tA_t + t(t+1)A_{t+1} + \ldots, \\ F(\alpha_1) &= tB_t p_0^t + t(t+1)B_{t+1}p_0^{t+1} + \ldots, \\ F(\alpha_2) &= tC_t p_0^t + t(t+1)C_{t+1}p_0^{t+1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Поэтому сумма $F(\alpha_1) + \ldots + F(\alpha_n)$ является целым числом, делящимся на t.

Выберем простое число t так, чтобы оно было больше каждого из чисел K, p_0 и $|(p_0\alpha_1)\ldots(p_0\alpha_n)|$. Тогда

$$KF(0) = KA_{t-1} + KtA_t + Kt(t+1)A_{t+1} + \ldots$$

является целым числом, не делящимся на t. Действительно, выражение (9) показывает, что A_{t-1} не делится на t.

Обратимся теперь к равенству (7). Мы уже выяснили, что $KF(0) + F(\alpha_1) + \ldots + F(\alpha_n)$ — целое число, не делящееся на t. Чтобы прийти к противоречию, достаточно показать, что число

$$L = e^{|\alpha_1|}Q(\alpha_1) + \ldots + e^{|\alpha_n|}Q(\alpha_n)$$

по модулю меньше 1 при достаточно большом t.

Для рассматриваемого многочлена $f(x)$ имеем:

$$Q(x) = \frac{A_{t-1}q_{t-1}x^t + A_t q_t x^{t+1} + \ldots}{(t-1)!},$$

где $|q_k| < 1$. Остаётся заметить, что $\lim_{s\to\infty} \dfrac{x^s}{s!} = 0$. □

8. Разрешимость уравнений в радикалах

Разрешимость уравнений в радикалах можно понимать в разных смыслах. Норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802–1829) занимался вопросом о существовании общей формулы для всех уравнений

данной степени, которая выражает их корни как функции от коэффициентов. Именно такой вид имеет, например, формула Кардано для уравнений третьей степени. Абель доказал, что если степень уравнения не меньше 5, то такой общей формулы (содержащей только радикалы и арифметические операции) нет. Но при этом некоторые конкретные уравнения (с рациональными коэффициентами) могут иметь корни, выражающиеся в радикалах. Например, таковыми являются уравнения $x^n = 0$ и $x^n = 1$. Критерий разрешимости в радикалах конкретных уравнений получил французский математик Эварист Галуа (1811–1832).

Мы сначала приведём доказательство теоремы Абеля о неразрешимости общего уравнения степени 5 и выше, а затем приведём восходящие к Кронекеру рассуждения, позволяющие про некоторые конкретные уравнения доказать, что они неразрешимы в радикалах. С одной стороны, эти рассуждения не такие общие, как теория Галуа. С другой стороны, они дают дают весьма простой с точки зрения вычислений признак неразрешимости в радикалах, в отличие от общего критерия Галуа. (Вычисление группы Галуа данного уравнение — дело нелёгкое.)

Теорема Абеля

В 1798–1813 гг. появилось несколько работ итальянского математика Паоло Руффини (1765–1822), в которых он доказывал теорему о неразрешимости в радикалах уравнений пятой и более высоких степеней. К сожалению, в этом доказательстве был существенный пробел. Руффини без основания предполагал, что радикалы рационально выражаются через корни исходного уравнения (см. теорему 4 на с. 530).

Первое полное доказательство теоремы о неразрешимости общего уравнения пятой степени получил Абель. Это доказательство он изложил в мемуаре «Доказательство невозможности алгебраического решения общих уравнений пятой степени», опубликованном в 1825 г.

Будем говорить, что уравнение

$$F(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \tag{1}$$

является ***общим уравнением*** n-й степени, если его коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ рассматриваются как независимые переменные над некоторым полем L. В дальнейшем будем считать, что $L = \mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

Присоединив коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ к полю $\mathbb{Q}$, получим поле $\Delta = \mathbb{Q}(c_1, \ldots, c_n)$.

Присоединив к полю Δ корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ уравнения (1), получим поле, которое обозначим $\Delta(F)$.

Будем говорить, что уравнение (1) *разрешимо в радикалах*, если поле $\Delta(F)$ содержится в расширении R поля Δ, полученном путём присоединения к Δ некоторых радикалов $\rho_1 = \sqrt[s_1]{a_1}$, $\rho_2 = \sqrt[s_2]{a_2}, \ldots, \rho_m = \sqrt[s_1]{a_m}$, где $a_1 \in \Delta$, $a_2 \in \Delta(\rho_1)$, $a_3 \in \Delta(\rho_1, \rho_2), \ldots, a_m \in \Delta(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$.

Пусть, например, $F(x) = x^2 + c_1x + c_2$. Тогда $\Delta = \mathbb{Q}(c_1, c_2)$ и $\Delta(F) = \Delta\left(\sqrt{a_1}\right)$, где $a_1 = c_1^2 - 4c_2 \in \Delta$.

Отметим, что показатели $s_1, \ldots, s_m$ радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_m$ можно считать простыми числами. В самом деле, если $s_k = uv$, то присоединение радикала $\rho_k = \sqrt[s_k]{a_k}$ можно заменить последовательным присоединением радикалов $\rho = \sqrt[u]{a_k}$ и $\rho_1 = \sqrt[v]{\rho}$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь присоединение радикалов с простыми показателями.

Предположим, что уравнение (1) разрешимо в радикалах. Присоединим к полю Δ первообразные корни из единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, степени которых равны степеням радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_m$ соответственно. Полученное поле обозначим K. Так как $\Delta \subset K$, то $\Delta(F) \subset \Delta(\rho_1, \ldots, \rho_m) \subset K(\rho_1, \ldots, \rho_m)$

Для доказательства теоремы Абеля нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, k — некоторое подполе поля комплексных чисел. Многочлен $x^p - a$ приводим над полем k тогда и только тогда, когда $a = b^p$ для некоторого $b \in k$.*

Доказательство. Предположим, что $x^p - a = f(x)\,g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены над полем k. Пусть ε — примитивный корень p-ой степени из единицы и $\beta = \sqrt[p]{a}$. Тогда

$$f(x) = x^r + c_1x^{r-1} + \ldots + c_r = (x - \varepsilon^{n_1}\beta)\ldots(x - \varepsilon^{n_r}\beta).$$

Поэтому $\pm\varepsilon^l\beta^r = c^r \in k$, где $l = n_1 + \ldots + n_r$. А так как $(\varepsilon^l)^p = 1$, то $(\pm\beta^r)^p = (c_r)^p$, т. е. $a^r = (\pm c_r)^p$. Число p простое и $1 \leqslant r = \deg f < p$, поэтому $rs + pt = 1$ для некоторых чисел s и t. Следовательно, $a = a^{rs}a^{pt} = (\pm c_r^s a^t)^p = b^p$, где $b = \pm c_r^s a^t \in k$.

Ясно так же, что если $a = b^p$, то многочлен $x^p - a$ приводим, так как он делится на $x - b$. $\square$

Теорема 2. *Пусть s — простое число и $a_i \in k = K(\rho_1, \ldots, \rho_{i-1})$. Если $\rho_i = \sqrt[s]{a_i} \notin k$, то $\rho_i^l \in k$ тогда и только тогда, когда l делится на s.*

Доказательство. Если $l = ns$, то $\rho_i^l = a_i^n \in k$, так как $a_i \in k$.

Предположим теперь, что $\rho_i^l = a \in k$, причём $l = sq+r$, где $0 < r < s$. Тогда $a = \rho_i^l = (a_i)^q \rho_i^r$, а значит, $\rho_i^r = b$, где $b = a\,(a_i)^{-q}$. Над полем k многочлены $x^s - a_i$ и $x^r - b$ имеют общий корень ρ_i, поэтому они имеют общий делитель, степень которого не превосходит $r < s$. В частности, многочлен $x^s - a_i$ приводим над полем k. Из теоремы 1 следует, что $a_i = b^s$, где $b \in k$. Ясно, что $b = \varepsilon\rho_i$, где ε — корень степени s из единицы. А так как $\varepsilon \in K \subset k$, то $\rho_i \in k$. Получено противоречие. □

Можно считать, что $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — минимальная последовательность радикалов с простыми степенями, требуемая для вычисления корня α уравнения (1), т. е. любая такая последовательность содержит по крайней мере m таких радикалов. При этом условии справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Корень α уравнения (1) можно представить в виде*

$$\alpha = u_0 + \rho + u_2\rho^2 + \ldots + u_{s-1}\rho^{s-1}$$

где s — степень радикала ρ_m, $\rho = \sqrt[s]{a}$, где a и все u_l — какие-то элементы поля $k = K(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$.

Доказательство. Так как $\alpha \in K(\rho_1, \ldots, \rho_m) = k(\rho_m)$ и $\rho_m^s \in k$, то

$$\alpha = b_0 + b_1\rho_m + b_2\rho_m^2 + \ldots + b_{s-1}\rho_m^{s-1}, \tag{2}$$

где $b_i \in k$. Трудность заключается лишь в том, чтобы добиться равенства $b_1 = 1$. По условию $\alpha \notin k$, поэтому хотя бы одно из чисел $b_1, \ldots, b_{s-1}$ отлично от нуля. Пусть $b_l \neq 0$, где $1 \leqslant l \leqslant s$. Положим $\rho = b_l\rho_m^l$. Так как число s простое, то $ul + vs = 1$ для некоторых целых чисел u и v. При этом $\rho^u = b_l^u\rho_m^{ul} = b_l^u\rho_m^{1-vs} = b_l^u a^{-v}\rho_m$, т. е. $\rho_m = c\rho^u$, где $c = b_l^{-u}a^v \in k$. Так как $\rho_m \notin k$, то $\rho \in k$. Ясно так же, что $\rho^s b_l^s \rho_m^{ls} = b_l^s a^l \in k$.

Заменим в выражении (2) ρ_m на $c\rho^u$, вспомнив при этом, что $b_l\rho_m^l = \rho$. В результате получим

$$\alpha = b_0 + b_1 c\rho^u + b_2 c^2\rho^{2u} + \ldots + \rho + \ldots + b_{s-1}\rho^{(s-1)u} \tag{3}$$

Из теоремы 2 следует, что $\rho^t \in k$ тогда и только тогда, когда t делится на s. А так как числа u и s взаимно простые, то элементы

$1, \rho^u, \rho^{2u}, \ldots, \rho^{(s-1)u}$ линейно независимы над полем k, причём набор этих элементов совпадает с набором $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{s-1}$ (в другом порядке). Таким образом, (3) даёт требуемое выражение для α:

$$\alpha = b_0 + \rho + b_2'\rho^2 + \ldots + b_{s-1}'\rho^{s-1}.$$

□

Теорема 4. *Минимальную последовательность радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_m$ для вычисления корня α многочлена* (1) *можно выбрать так, что $\rho_1, \ldots, \rho_m$ представляют собой многочлены над K от корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ многочлена* (1).

Доказательство. Будем исходить из произвольной минимальной последовательности $\rho_1, \ldots, \rho_m$. Напомним, что через K мы обозначили поле, полученное в результате присоединения к полю Δ первообразных корней $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, степени которых равны степеням радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_m$. Согласно теореме 3 радикал ρ_m можно заменить радикалом ρ той же самой степени s так, что

$$\alpha = u_0 + \rho + u_2\rho^2 + \ldots + u_{s-1}\rho^{s-1},$$

где $u_l \in k = K(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$ и $\rho^s = a \in k$. Покажем, что для любого корня ξ многочлена $x^s - a$ величина

$$\alpha(\xi) = u_0 + \xi + u_2\xi^2 + \ldots + u_{s-1}\xi^{s-1}$$

является корнем многочлена (1). Подставим в многочлен $F(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$ вместо x величину $\alpha(\xi)$. Учитывая, что $\xi^s = a \in k$, в результате получим выражение вида

$$b_0 + b_1\xi + \ldots + b_{s-1}\xi^{s-1},$$

где $b_l \in k$. Многочлены $x^s - a$ и $b_0 + b_1x + \ldots + b_{s-1}x^{s-1}$ имеют общий корень ρ, поэтому они имеют общий делитель над k. Но согласно теореме 1 многочлен $x^s - a$ неприводим над k, поэтому $b_0 = b_1 = \ldots = b_{s-1} = 0$. Это означает, что если ξ — корень многочлена $x^s - a$, то $\alpha(\xi)$ — корень многочлена (1). Пусть ε — примитивный корень степени s из единицы. Тогда $\xi = \varepsilon^r\rho$, поэтому величины

$$\alpha_{r+1} = u_0 + \varepsilon^r\rho + u_2\varepsilon^{2r}\rho^2 + \ldots + u_{s-1}\varepsilon^{(s-1)r}\rho^{s-1}$$

при $r = 0, 1, \ldots, s-1$ будут корнями многочлена (1). Например, для $s = 3$ получим

$$\alpha_1 = u_0 + \rho + u_2\rho^2, \quad \alpha_2 = u_0 + s\rho + u_2\varepsilon^2\rho^2, \quad \alpha_3 = u_0 + \varepsilon^2\rho + u_2\varepsilon\rho^2.$$

А так как $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, то

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3u_0, \quad \alpha_1+\varepsilon^{-1}\alpha_2+\varepsilon^{-2}\alpha_3=3\rho, \quad \alpha_1+\varepsilon^{-2}\alpha_2+\varepsilon^{-1}\alpha_3=3u_2\rho^2.$$

Таким образом, $\rho = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \varepsilon\alpha_3)$. Для $s > 3$ формулы получаются более громоздкие, но рассуждения те же самые. Доказательство теоремы для последнего радикала ρ_m завершено. Перейдём к радикалу ρ_{m-1}.

Выше было показано (для $s = 3$), что величины $u_0, \rho, u_2\rho^2, \ldots, u_{s-1}\rho^{s-1}$ полиномиально выражаются через корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ многочлена (1). Кроме того, они лежат в поле $K(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$, поэтому каждую из указанных величин можно представить в виде

$$\nu_0 + \nu_1\rho_{m-1} + \nu_2\rho_{m-1}^2 + \ldots + \nu_{l-1}\rho_{m-1}^{l-1},$$

где $\nu_l \in K(\rho_1, \ldots, \rho_{m-2})$. Последовательность радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_m$ минимальна, поэтому равенства $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_{l-1} = 0$ не могут выполняться сразу для всех величин, так как иначе радикал ρ_{m-1} можно было бы исключить. Поэтому существует соотношение вида

$$\nu_0 + \nu_1\rho_{m-1} + \nu_2\rho_{m-1}^2 + \ldots + \nu_{l-1}\rho_{m-1}^{l-1} = r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

где $\nu_l \in K(\rho_1, \ldots, \rho_{m-2})$, причём не все элементы $\nu_1, \ldots, \nu_{l-1}$ равны нулю, а $r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — некоторый многочлен над полем K. Рассмотрим многочлен

$$G(x) = \prod (x - r(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})),$$

где произведение берётся по всем подстановкам $\sigma \in S_n$. Коэффициенты многочлена G являются симметрическими многочленами от корней многочлена (1), поэтому они полиномиально выражаются через коэффициенты многочлена (1). Таким образом, G — многочлен над K, причём он имеет корень

$$\beta = \nu_0 + \nu_1\rho_{m-1} + \nu_2\rho_{m-1}^2 + \ldots + \nu_{l-1}\rho_{m-1}^{l-1}$$

Ясно так же, что корень β выражается в радикалах (с помощью последовательности радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_{m-1}$). Согласно теореме 3, заменив радикал ρ_{m-1} радикалом ρ' той же самой степени, можно добиться равенства $\nu_1 = 1$. К радикалу ρ' теперь можно применить те же самые рассуждения, которые мы применили к радикалу ρ. Затем переходим к радикалу ρ_{m-2} и т. д. до радикала ρ_1. □

Теперь можно приступить непосредственно к доказательству теоремы Абеля.

Теорема 5 (Абель). *При $n \geqslant 5$ корень общего многочлена степени n нельзя выразить в радикалах.*

Доказательство. Предположим, что некоторый корень α_1 общего многочлена степени n

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n$$

можно выразить в радикалах. Тогда согласно теоремам 1–4 для α_1 существует выражение в радикалах следующего специального вида. Корень α_1 получается последовательным присоединением радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_m$ простых степеней, а эти радикалы, в свою очередь, являются многочленами от корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ исходного многочлена. Точнее говоря, пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ — примитивные корни из единицы, степени которых равны степеням радикалов $\rho_1, \ldots, \rho_m$ соответственно, $\Delta = \mathbb{Q}(c_1, \ldots, c_n)$ и

$$K = \Delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, c_1, \ldots, c_n).$$

Тогда α_1 полиномиально выражается через $\rho_1, \ldots, \rho_m$ над полем K, т. е.

$$\alpha_1 = r(\rho_1, \ldots, \rho_m, c_1, \ldots, c_n),$$

где r — многочлен над $\mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$. В свою очередь, радикалы $\rho_1, \ldots, \rho_m$ полиномиально выражаются над полем K через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, т. е.

$$\rho_1 = r_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, c_1, \ldots, c_n),$$

где r_1 — многочлен над $\mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$. Так как мы имеем дело с общим многочленом степени n, то можно считать, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — независимые переменные, а $c_1, \ldots, c_n$ представляют собой (с точностью до знака) элементарные симметрические многочлены от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Покажем, что при $n \geqslant 5$ предположение о разрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения степени n приводит к противоречию. Рассмотрим для этого перестановку

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

которая циклически переставляет первые 5 элементов, а остальные элементы оставляет неподвижными. Докажем, что при действии T на корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ первый радикал ρ_1 не изменяется. Так как

$$\rho_1 = r_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, c_1, \ldots, c_n) = \sqrt[p]{a_1},$$

где a_1 — многочлен от $c_1, \ldots, c_n$ над полем $\mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, то равенство $\rho_1^p = a_1$ можно рассматривать как соотношение вида

$$\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, c_1, \ldots, c_n) = 0,$$

где φ — многочлен над полем $\mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$. Покажем, что соотношение такого вида сохраняется при любой перестановке корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пусть $\beta_1 = \alpha_{i_1}$, ..., $\beta_n = \alpha_{i_n}$, где $i_1, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\varphi(\beta_1, \ldots, \beta_n, d_1, \ldots, d_n) = 0,$$

где $d_i = c_i(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. А так как функции c_i симметрические, то $d_i = c_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_i$. Поэтому

$$\varphi(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}, c_1, \ldots, c_n) = 0.$$

Итак, соотношение $\rho_1^p = a_1$ сохраняется при действии перестановки T на корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, т. е. $T(\rho_1^p) = T(a_1)$. Ясно, что $T(\rho_1^p) = T(\rho_1)^p$. А так как a_1 зависит лишь от симметрических функций корней, то $T(a_1) = a_1$. Следовательно, $T(\rho_1) = \varepsilon_1^\lambda \rho_1$ и $T^m(\rho_1) = \varepsilon_1^{m\lambda}\rho_1$. (Здесь T^m обозначает перестановку T, применённую m раз, т.е. если $T(i_1) = i_2$, $T(i_2) = i_3$, ..., $T(i_m) = i_{m+1}$, то $T^m(i_1) = i_{m+1}$.) Но $T^5 = I$ — тождественная перестановка, поэтому $\varepsilon_1^{5\lambda}\rho_1 = T^5(\rho_1) = \rho_1$, т. е. $\varepsilon_1^{5\lambda} = 1$.

Обратимся теперь к перестановкам

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

и

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $U^3 = V^3 = I$, поэтому $U(\rho_1) = \varepsilon_1^\mu \rho_1$ и $V(\rho_1) = \varepsilon_1^\nu \rho_1$, причём $\varepsilon_1^{3\mu} = \varepsilon_1^{3\nu} = 1$. Кроме того, $VU = T$, поэтому

$$T(\rho_1) = VU(\rho_1) = \varepsilon_1^{\mu+\nu}\rho_1$$

Следовательно, $\varepsilon_1^\lambda = \varepsilon_1^{\mu+\nu}$, а значит, $\varepsilon_1^\lambda = \varepsilon_1^{6\lambda}\varepsilon_1^{-5\lambda} = \varepsilon_1^{6(\mu+\nu)} = 1$, так как $\varepsilon_1^{5\lambda} = \varepsilon_1^{6\mu} = \varepsilon_1^{6\nu} = 1$. В итоге получаем $T(\rho_1) = \rho_1$.

Переходя последовательно к радикалам $\rho_2, \ldots, \rho_m$, аналогично получим $T(\rho_i) = \rho_i$ при $i = 2, \ldots, m$.

Так как $\rho_i = r_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, c_1, \ldots, c_n)$, то равенство

$$\alpha_1 = r(\rho_1, \ldots, \rho_m, c_1, \ldots, c_n)$$

можно рассматривать как соотношение между $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, c_1, \ldots, c_n$ над полем $\mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$. Это соотношение сохраняется под действием подстановки T, т. е.

$$T(\alpha_1) = r(T(\rho_1), \ldots, T(c_n)) = r(\rho_1, \ldots, c_n),$$

так как $T(c_i) = c_i$ и $T(\rho_i) = \rho_i$. Таким образом, $T(\alpha_1) = \alpha_1$. С другой стороны, согласно определению T получаем $T(\alpha_1) = \alpha_2$, а значит, $\alpha_1 = \alpha_2$. Равенство $\alpha_1 = \alpha_2$ противоречит независимости корней общего уравнения. □

Теорема Кронекера

Пусть $f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами. Будем говорить, что уравнение $f(x) = 0$ ***разрешимо в радикалах***, если каждый его корень содержится в поле, полученном путём присоединения к полю рациональных чисел некоторых радикалов $\rho_1 = \sqrt[s_1]{a_1}$, $\rho_2 = \sqrt[s_2]{a_2}, \ldots$, $\rho_m = \sqrt[s_1]{a_m}$, где $a_1 \in \mathbb{Q}$, $a_2 \in \mathbb{Q}(\rho_1)$, $a_3 \in \mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2)$, $\ldots$, $a_m \in \mathbb{Q}(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$.

Теорема 6 (Кронекер). *Если уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — неприводимый многочлен нечётной простой степени p, разрешимо в радикалах, то либо это уравнение имеет ровно один вещественный корень, либо все его корни вещественны.*

Чтобы доказать эту теорему, выясним сначала, когда неприводимый над полем k (содержащимся в поле комплексных чисел) многочлен $f(x)$ нечётной простой степени p становится приводимым после присоединения к полю k корня α неприводимого многочлена $g(x)$ некоторой степени q. Приводимость в данном случае означает, что $f(x) = \psi(x, \alpha)\varphi(x, \alpha)$, где ψ и φ — многочлены с коэффициентами из основного поля k. Мы будем предполагать, что старшие коэффициенты многочленов f, ψ и φ равны 1.

Для каждого рационального числа r многочлен $u(y) = f(r) - \psi(r, y)\varphi(r, y)$ имеет коэффициенты из поля k. Кроме того, $u(\alpha) = 0$. Таким образом, многочлен u имеет общий корень с неприводимым многочленом g, поэтому $u(\alpha_i) = 0$ для любого корня α_i многочлена g. Многочлен $f(x) - \psi(x, \alpha_i)\varphi(x, \alpha_i)$ нулевой для любого рационального числа x, поэтому он нулевой для любого x. Таким образом, $f(x) = \psi(x, \alpha_i)\varphi(x, \alpha_i)$ для всех q корней многочлена g.

Мы получили q равенств. Перемножив их, приходим к равенству $\big(f(x)\big)^q = \Psi(x)\Phi(x)$, где $\Psi(x) = \psi(x,\alpha_1)\dots\psi(x,\alpha_q)$ и $\Phi(x) = \varphi(x,\alpha_1)\dots\varphi(x,\alpha_q)$. Коэффициенты многочленов Ψ и Φ являются симметрическими функциями с коэффициентами из поля k от корней $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ многочлена g, поэтому они лежат в k. Возьмём любой корень x_1 многочлена Ψ. Он является корнем многочлена f, поскольку $\big(f(x_1)\big)^q = \Psi(x_1)\Phi(x_1)$. Поэтому многочлен Ψ и неприводимый многочлен f имеют общий корень, а значит, Ψ делится на f. Поделим Ψ на f и повторим те же самые рассуждения. В результате получим $\Psi = f^\mu$. Аналогично $\Phi = f^\nu$; при этом $\mu + \nu = q$. Пусть степени многочленов ψ и φ равны m и n. Тогда $mq = \mu p$ и $nq = \nu p$. По предположению m и n строго меньше p, поэтому q делится на p.

В частности, если $f(x)$ — неприводимый многочлен нечётной простой степени p, то после присоединения примитивного корня ε степени p из единицы он остаётся неприводимым. Действительно, примитивный корень степени p из единицы является корнем многочлена $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x^2 + x + 1$ степени $q = p - 1$, причём q не делится на p. Мы будем предполагать, что основное поле k содержит примитивный корень степени p из единицы. Кроме того, присоединяя корень, мы всегда будем присоединять и комплексно сопряжённый с ним корень, т.е. будем предполагать, что основное поле k вместе с каждым числом содержит и комплексно сопряжённое число. Это можно сделать, поскольку комплексно сопряжённый корень является корнем того же самого многочлена, а рассматриваемый многочлен $f(x)$ становится приводимым после присоединения некоторого корня неприводимого многочлена $g(x)$ тогда и только тогда, когда он становится приводимым после присоединения любого корня многочлена $g(x)$.

Предположим, что неприводимый многочлен $f(x)$ простой степени p становится приводимым после присоединения радикала $\lambda = \sqrt[q]{a}$. Напомним, что число q можно считать простым (см. с. 528). Напомним также теорему 1 на с. 528, согласно которой многочлен $x^q - a$ неприводим над k. Поэтому число q должно делиться на p, а значит, $q = p$.

Уравнение $x^p = a$ имеет p решений $\lambda_0 = \lambda$, $\lambda_1 = \lambda\varepsilon$, $\dots$, $\lambda_{p-1} = \lambda\varepsilon^{p-1}$. Пусть $f(x) = \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)$, где ψ и φ — многочлены положительной степени с коэффициентами из основного поля k. Тогда $f(x)$ делится на $\psi(x,\lambda_i)$ для $i = 0, 1, \dots, p-1$. Можно считать, что многочлен $\psi(x,\lambda)$ неприводим. Тогда все многочлены $\psi(x,\lambda_i)$ тоже неприводимы. Докажем, что все они различны. Действительно, если $\psi(x,\lambda\varepsilon^m) = \psi(x,\lambda\varepsilon^n)$, то, положив $\lambda' = \lambda\varepsilon^m$, получим $\psi(x,\lambda') = \psi(x,\lambda\varepsilon')$, где

$\varepsilon' = \varepsilon^{n-m}$. Покажем, что $\psi(x, y) = \psi(x, y\varepsilon')$ для любого y. Коэффициент при x^r многочлена $\psi(x, y) - \psi(x, y\varepsilon')$ представляет собой многочлен $h(y)$ над полем k степени меньше p. Число λ', корень неприводимого над k многочлена $x^p - a$, не может быть корнем неприводимого над k (ненулевого) многочлена степени меньше p. Поэтому из равенства $h(\lambda') = 0$ следует, что h — нулевой многочлен. Таким образом, $\psi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda\varepsilon') = \psi(x, \lambda\varepsilon'^2) = \ldots = \psi(x, \lambda\varepsilon'^{n-1})$. Поэтому

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\psi(x, \lambda) + \psi(x, \lambda\varepsilon') + \ldots + \psi(x, \lambda\varepsilon'^{n-1})}{n}.$$

Коэффициенты этого многочлена являются симметрическими функциями от $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$, корней многочлена $x^p - a$, поэтому они принадлежат k. Полученное противоречие показывает, что все p многочленов $\psi(x, \lambda_i)$ различны, а значит,

$$f(x) = \psi(x, \lambda)\psi(x, \lambda\varepsilon)\ldots\psi(x, \lambda\varepsilon^{p-1})$$

— разложение на линейные множители, т.е. $\psi(x, \lambda) = x - \omega_0$, $\psi(x, \lambda\varepsilon) = x - \omega_1, \ldots, \psi(x, \lambda\varepsilon^{p-1}) = x - \omega_{n-1}$.

Пусть $\psi(x, \lambda) = x - (c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{p-1}\lambda^{p-1})$, где числа $c_0, \ldots, c_{p-1}$ лежат в поле k. Тогда $\omega_j = c_0 + c_1\lambda_j + \ldots + c_{p-1}\lambda_j^{p-1}$.

Уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере один вещественный корень ω_j, поскольку его степень нечётна. Возможны два случая.

Случай 1. *Число a вещественное.*

В качестве λ можно выбрать любой корень многочлена $x^p - a$, поэтому можно считать, что λ вещественно. Запишем вещественный корень ω_j в виде $\omega_j = \sum c_s\lambda_j^s = \sum c_s\varepsilon^{js}\lambda^s = \sum d_s\lambda^s$; числа $d_s = c_s\varepsilon^{js}$ лежат в основном поле k, поскольку k по предположению содержит ε. Далее, $\bar{\omega}_j = \omega_j$, поэтому $(\bar{d}_0 - d_0) + (\bar{d}_1 - d_1)\lambda + \ldots + (\bar{d}_{p-1} - d_{p-1})\lambda^{p-1} = 0$. Вместе с каждым корнем мы присоединяли комплексно сопряжённый ему корень, поэтому все числа $\bar{d}_s - d_s$ лежат в поле k. Но число λ не является корнем многочлена над k степени меньше p, поэтому числа d_s вещественные. Следовательно, числа $\omega_r = \sum c_s\lambda^s\varepsilon^{rs} = \sum d_s\lambda^s\varepsilon^{(r-j)s}$ и $\omega_t = \sum d_s\lambda^s\varepsilon^{(t-j)s}$ будут комплексно сопряжёнными, если $r - j + t - j \equiv 0 \pmod{p}$, т.е. $t \equiv 2j - r \pmod{p}$. В результате мы получаем один вещественный корень и $\frac{p-1}{2}$ комплексно сопряжённых корней многочлена $f(x)$.

Случай 2. *Число a не вещественное.*

Вместе с числом $\lambda = \sqrt[p]{a}$ присоединим к полю k число $\bar{\lambda} = \sqrt[p]{-a}$. В результате будет также присоединено вещественное число $\lambda\bar{\lambda} = \Lambda$. Если бы присоединение к полю k числа Λ делало многочлен $f(x)$ приводимым, то мы оказались бы в ситуации случая 1. Поэтому будем предполагать, что многочлен $f(x)$ остаётся неприводимым после присоединения Λ к полю k.

В качестве λ мы можем взять любой корень многочлена $x^p - a$, поэтому можно считать, что вещественный корень — это $\omega_0 = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{p-1}\lambda^{p-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_0 = \bar{\omega}_0 &= \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{\lambda} + \ldots + \bar{c}_{p-1}\bar{\lambda}^{p-1}\\ &= \bar{c}_0 + \bar{c}_1\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) + \ldots + \bar{c}_{p-1}\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{p-1}\lambda^{p-1} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) + \ldots + \bar{c}_{p-1}\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^{p-1}. \qquad (4)$$

Здесь числа $c_0, \ldots, c_{p-1}, \bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_{p-1}$ и Λ лежат в поле $K(\Lambda)$. По предположению многочлен $x^p - a$ неприводим над этим полем, поэтому в соотношении (4) можно заменить λ на любой другой корень λ_j многочлена $x^p - a$. Действительно, это соотношение легко приводится к полиномиальному виду, а если некоторый многочлен $G(x)$ имеет общий корень с неприводимым многочленом $x^p - a$, то $G(x)$ делится на $x^p - a$, а потому $G(\lambda_i) = 0$. Ясно, что

$$\frac{\Lambda}{\lambda_j} = \frac{\Lambda}{\lambda\varepsilon^j} = \frac{\bar{\lambda}}{\varepsilon^j} = \bar{\lambda}\bar{\varepsilon}^j = \bar{\lambda}_j.$$

Поэтому соотношение (4) для λ_j записывается в виде

$$c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{p-1}\lambda^{p-1} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{\lambda} + \ldots + \bar{c}_{p-1}\bar{\lambda}^{p-1}.$$

Это означает, что $\omega_j = \bar{\omega}_j$, т.е. все корни многочлена $f(x)$ вещественные. Доказательство теоремы Кронекера завершено.

Имея в распоряжении теорему Кронекера, несложно доказать, что уравнение $x^5 - 4x + 2 = 0$ неразрешимо в радикалах. Действительно, неприводимость многочлена $f(x) = x^5 - 4x + 2$ следует из признака Эйзенштейна (задача 32.13). Количество вещественных корней этого многочлена не меньше трёх, поскольку

$$f(-2) < 0, \quad f(0) > 0, \quad f(1) < 0, \quad f(2) > 0.$$

С другой стороны, количество вещественных корней не может быть больше трёх, потому что иначе у производной $f'(x) = 5x^4 - 4$ было

бы больше двух вещественных корней. Таким образом, неприводимый многочлен x^5-4x+2 имеет ровно два не вещественных корня. Поэтому его разрешимость в радикалах противоречила бы теореме Кронекера.

Замечание. *Из доказательства теоремы Кронекера видно, что неприводимое уравнение нечётной простой степени разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда хотя бы один его корень выражается в радикалах. Действительно, на с.535 делается предположение, что многочлен $f(x)$ становится приводимым после присоединения радикала, и из этого уже выводится, что тогда он разлагается на линейные множители.*

9. Диофантовы уравнения для многочленов

Многочлены обладают многими из свойств, которыми обладают натуральные числа. Например, для многочлена определено разложение на множители, для пары многочленов определён наибольший общий делитель и т. д. В связи с этим для многочленов можно поставить задачи, аналогичные известным задачам и проблемам теории чисел. Как правило, для многочленов задача решается существенно проще. Например, знаменитая гипотеза Ферма о том, что при $n \geqslant 3$ уравнение $x^n+y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах, была доказана лишь совсем недавно. А её аналог (неразрешимость уравнения $f^n+g^n=h^n$ для многочленов), как мы сейчас увидим, доказывается сравнительно просто.

Описание всех троек натуральных чисел α, β, γ, для которых уравнение $f^\alpha+g^\beta=h^\gamma$ для многочленов f, g, h имеет нетривиальное решение, было получено в конце прошлого века. Мы приведём более современную версию этой классификации.

При доказательстве неразрешимости многих диофантовых уравнений для многочленов весьма эффективным оказывается следующее утверждение.

Теорема 1 (Мейсон). *Пусть $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — попарно взаимно простые многочлены, связанные соотношением $a+b+c=0$. Тогда степень каждого из этих многочленов не превосходит $n_0(abc)-1$, где $n_0(abc)$ — количество различных корней многочлена abc.*

Доказательство. Положим $f = a/c$ и $g = b/c$. Тогда f и g — рациональные функции, связанные соотношением $f + g + 1 = 0$. Продифференцировав это равенство, получим $f' = -g'$. Поэтому

$$\frac{b}{a} = \frac{g}{f} = -\frac{f'/f}{g'/g}.$$

Рациональные функции f и g имеют специальный вид $\prod(x-\rho_i)^{r_i}$, где r_i — целые числа. Для функции $R(x) = \prod(x-\rho_i)^{r_i}$ выполняется равенство

$$\frac{R'}{R} = \sum \frac{r_i}{x-\rho_i}.$$

Пусть

$$a(x) = \prod(x-\alpha_i)^{a_i},\ b(x) = \prod(x-\beta_j)^{b_j},\ c(x) = \prod(x-\gamma_k)^{c_k}.$$

Тогда

$$f'/f = \sum \frac{a_i}{x-\alpha_i} - \sum \frac{c_k}{x-\gamma_k},$$

$$g'/g = \sum \frac{b_j}{x-\beta_j} - \sum \frac{c_k}{x-\gamma_k}.$$

Поэтому после умножения на многочлен

$$N_0 = \prod(x-\alpha_i)(x-\beta_j)(x-\gamma_k)$$

степени $n_0(abc)$ рациональные функции f'/f и g'/g становятся многочленами степени не выше $n_0(abc)-1$. Таким образом, из взаимной простоты многочленов $a(x)$ и $b(x)$ и из равенства

$$\frac{b}{a} = -\frac{N_0 f/f'}{N_0 g/g'}$$

следует, что степень каждого из многочленов $a(x)$ и $b(x)$ не превосходит $n_0(abc)-1$. Для многочлена $c(x)$ доказательство аналогично. □

Из теоремы 1 можно извлечь интересные следствия, которые мы сформулируем как теоремы 2–4. Степень многочлена f будем обозначать $\deg f$.

Теорема 2 (Дэвенпорт). *Пусть f и g — взаимно простые многочлены ненулевой степени. Тогда*

$$\deg(f^3 - g^2) \geqslant \frac{1}{2}\deg f + 1.$$

Доказательство. Если $\deg f^3 \neq \deg g^2$, то

$$\deg(f^3 - g^2) \geqslant \deg f^3 = 3\deg f \geqslant \frac{1}{2}\deg f + 1.$$

Поэтому можно считать, что $\deg f^3 = \deg g^2 = 6k$.

Рассмотрим многочлены $F = f^3$, $G = g^2$ и $H = F - G = f^3 - g^2$. Ясно, что $\deg H \leqslant 6k$. Согласно теореме 1

$$\max(\deg F, \deg G, \deg H) \leqslant n_0(FGH) - 1 \leqslant \\ \leqslant \deg f + \deg g + \deg H - 1,$$

т. е. $6k \leqslant 2k + 3k + \deg H - 1$. Таким образом, $\deg H \geqslant k + 1 = \frac{1}{2}\deg f + 1$. □

Теорема 3. *Пусть f, g и h — взаимно простые многочлены, причём хотя бы один из них — не константа. Тогда равенство*

$$f^n + g^n = h^n$$

не может выполняться при $n \geqslant 3$.

Доказательство. Согласно теореме 1 степень каждого из многочленов f^n, g^n и h^n не превосходит $\deg f + \deg g + \deg h - 1$, т. е.

$$n\deg f,\ n\deg g,\ n\deg h \leqslant \deg f + \deg g + \deg h - 1.$$

Сложив эти три неравенства, получим

$$n(\deg f + \deg g + \deg) \leqslant 3(\deg f + \deg g + \deg h - 1) < 3(\deg f + \deg g + \deg h).$$

Следовательно, $n < 3$. □

Диофантово уравнение $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$ для многочленов f, g, h имеет очевидное решение, если одно из чисел α, β, γ равно 1. Поэтому будем считать, что $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 2$.

Теорема 4. *Пусть α, β, γ — натуральные числа, причём $2 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда уравнение*

$$f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$$

имеет взаимно простые решения лишь для следующих наборов (α, β, γ): $(2, 2, \gamma)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$.

Доказательство. Пусть a, b и c — степени многочленов f, g и h. Тогда согласно теореме 1

$$\alpha a \leqslant a + b + c - 1, \tag{1}$$

$$\beta b \leqslant a + b + c - 1, \tag{2}$$

$$\gamma c \leqslant a + b + c - 1. \tag{3}$$

Следовательно,

$$\alpha(a + b + c) \leqslant \alpha a + \beta b + \gamma c \leqslant 3(a + b + c) - 3,$$

а значит, $\alpha < 3$. По условию $\alpha \geqslant 2$, поэтому $\alpha = 2$. При $\alpha = 2$ неравенство (1) принимает вид

$$a \leqslant b + c - 1. \tag{4}$$

Сложив неравенства (4), (2) и (3), получим

$$\beta b + \gamma c \leqslant 3(b + c) + a - 3.$$

Учитывая, что $\beta \leqslant \gamma$, и ещё раз применяя неравенство (4), получаем

$$\beta(b + c) \leqslant 4(b + c) - 4,$$

а значит, $\beta < 4$, т. е. $\beta = 2$ или 3.

Остаётся доказать, что если $\beta = 3$, то $\gamma \leqslant 5$. При $\beta = 3$ неравенство (2) принимает вид

$$2b \leqslant a + c - 1. \tag{5}$$

Сложив неравенства (4) и (5), получим

$$b \leqslant 2c - 2.$$

В таком случае из неравенства (4) следует, что

$$a \leqslant 3c - 3.$$

Из двух последних неравенств и неравенства (3) следует, что

$$\gamma c \leqslant 6c - 6,$$

поэтому $\gamma \leqslant 5$. □

Многочлены, удовлетворяющие соотношению $f^\alpha + g^\beta = h^\gamma$, тесно связаны с правильными многогранниками. Подробно эта связь описана в книге Ф. Клейна “Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени” (М.: Наука, 1989); там же указан способ построения этих многочленов. Мы приведём лишь конечный результат.

Случай $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = n$ связан с вырожденным правильным многогранником — плоским n-угольником. Требуемое соотношение имеет вид
$$\left(\frac{x^n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^n-1}{2}\right)^2 = x^n.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$ связан с правильным тетраэдром. Соотношение имеет вид
$$12i\sqrt{3}(x^5-x)^2 + (x^4 - 2i\sqrt{3}x^2+1)^3 = (x^4+2i\sqrt{3}x^2+1)^3.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$ связан с кубом и правильным октаэдром. Соотношение имеет вид
$$(x^{12} - 33x^8 - 33x^4 + 1)^2 + 108(x^5 - x)^4 = (x^8 + 14x^4 + 1)^3.$$

Случай $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$ связан с додекаэдром и икосаэдром. Соотношение имеет вид $T^2 + h^3 = 1728f^5$, где
$$\begin{aligned} T &= x^{30} + 1 + 522(x^{25} - x^5) - 10005(x^{20} + x^{10}),\\ H &= -(x^{20}+1) + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10},\\ f &= x(x^{10} + 11x^5 - 1). \end{aligned}$$

Теорема 3 показывает, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, где x, y, z — натуральные числа, имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение точно такое же уравнение для многочленов. Естественно возникает вопрос, не будет ли уравнение $x^\alpha + y^\beta = z^\gamma$ иметь полиномиальные решения в том и только том случае, когда оно имеет натуральные решения.

Первый пример обнадёживает — уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ имеет как полиномиальные, так и натуральные решения. А именно, бесконечную серию решений этого уравнения в натуральных числах можно построить следующим образом. Положим $x = n(n-1)/2$, $y = n$ и $z^2 = n(n+1)/2$. Требуется подобрать число n так, чтобы число z было целым. Равенство $2z^2 = n(n+1)$ можно записать в виде
$$(2n+1)^2 - 2(2z)^2 = 1.$$
Это — знаменитое уравнение Ферма–Пелля, которое имеет бесконечно много решений. Например, при $n = 8$ получаем $x = 28$, $y = 8$, $z = 6$. Помимо этой бесконечной серии решений есть и другие решения.

Но уравнение $x^2 + y^4 = z^6$ опровергает наши надежды. У этого уравнения нет полиномиальных решений, но есть натуральные решения. Одно из его решений имеет вид $x = 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7 \cdot 29^8$, $y = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 29^4$, $z = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 29^3$.

10. Теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии

Теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии имеет интересную историю. Боде высказал следующую гипотезу:

Утверждение 1. *А Если натуральные числа разбиты каким-то образом на два класса, то для любого натурального числа l в одном из этих классов найдётся арифметическая прогрессия длины l* (т. е. данному классу принадлежат числа $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(l-1)d$ при некоторых a и d).

Эта гипотеза быстро стала известной. Её пытались доказать многие математики. Но доказать эту гипотезу оказалось нелегко. Первые существенные результаты получили известные математики Э. Артин и О. Шрайер.

Сначала Шрайер показал, что гипотеза Боде эквивалентна следующему утверждению:

Утверждение 2. *Б Для любого натурального числа l существует такое натуральное число $N(l)$, что если числа $1, 2, \ldots, N(l)$ разбиты на два класса, то один из этих классов содержит арифметическую прогрессию длины l.*

Затем Артин показал, что утверждение (Б) эквивалентно следующему утверждению:

Утверждение 3. *В Для любых натуральных l и k существует такое натуральное число $N(l,k)$, что если числа $1, 2, \ldots, N(l,k)$ разбиты на k классов, то один из этих классов содержит арифметическую прогрессию длины l.*

Утверждение (А) очевидным образом следует из (В). Но, как оказалось, доказывать удобнее всего именно утверждение (В), используя двойную индукцию по k и по l. Такое довольно сложное доказательство как раз и придумал Ван дер Варден в 1927 г.

Разбиение множества на k классов можно наглядно представить как раскраску в k цветов. В таком случае утверждение (В) формулируется следующим образом:

Утверждение 4. *B' Для любых натуральных l и k существует такое натуральное число $N(l,k)$, что если числа $1, 2, \ldots, N(l,k)$ раскрашены в k цветов, то найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины l.*

Впоследствии появились как новые доказательства теоремы Ван дер Вардена, так и её обобщения. Мы обсудим одно существенное обобщение этой теоремы, доказательство которого сравнительно несложно. Это доказательство принадлежит П. Андерсону.[1]

Рассмотрим в n-мерном пространстве[2] множество точек, координаты которых — целые неотрицательные числа. Будем называть это множество *решёткой*, а точки этого множества будем называть *точками решётки.*

Теорема 1. *Пусть S — конечное множество точек решётки. Тогда для любой раскраски точек решётки в k цветов существует такое натуральное число a и такой вектор v с целыми неотрицательными координатами, что множество $aS+v$ (т. е. образ S при гомотетии с коэффициентом a и сдвиге на вектор v) одноцветное. При этом для числа a и для координат вектора v можно указать оценки, зависящие только от множества S и числа k.*

Замечание. *Теорема Ван дер Вардена получается при $n = 1$ и $S = \{1, 2, \ldots, l\}$.*

При доказательстве теоремы удобно рассматривать куб со стороной N, состоящий из всех точек решётки с координатами от 0 до $N-1$. Этот куб мы обозначим K_N; он состоит из N^n точек решётки, где n — размерность пространства. Утверждение теоремы для множества S можно сформулировать так:

Утверждение 5. *A_S Существует такое натуральное число N, зависящее от количества цветов k, что при любой раскраске точек куба K_N в k цветов этот куб содержит одноцветное множество вида $aS+v$.*

---

[1] P. G. Anderson, *A generalization of Baudet's conjecture (Van der Waerden's theorem)*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976) 359–361.

[2] Если читатель плохо знаком с понятием многомерного пространства или же совсем не знаком с этим понятием, то он может считать, что $n = 2$ или 3; теорема Ван дер Вардена имеет дело с $n = 1$.

План доказательства теоремы следующий. Если S состоит из одной точки, то утверждение A_S очевидно. Поэтому достаточно доказать, что если w — точка решётки, не входящая в S, то из утверждения (A_S) следует утверждение $(A_{S\cup w})$, где $S \cup w$ — множество, полученное из S добавлением точки w. Для доказательства этого нам потребуется следующее вспомогательное утверждение для каждого натурального числа p:

Утверждение 6. $C_{S,w,p}$ *Существует такое натуральное число N_p, что для любой раскраски куба K_{N_p} в k цветов найдутся натуральные числа $a_1, \ldots, a_p$ и вектор v с неотрицательными целыми координатами, для которых каждое из множеств*

$$\begin{aligned}
&T_0 = (a_1 + \ldots + a_p)w + v,\\
&T_1 = a_1 S + (a_2 + \ldots + a_p)w + v,\\
&T_2 = (a_1 + a_2)S + (a_3 + \ldots + a_p)w + v,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&T_p = (a_1 + \ldots + a_p)S + v
\end{aligned}$$

одноцветное.

Дальнейшее доказательство состоит из двух шагов.

Шаг 1. *Если утверждение (A_S) верно, то при всех натуральных p верно утверждение $(C_{S,w,p})$.*

Докажем сначала утверждение $(C_{S,w,p})$ при $p = 1$. В этом случае нужно доказать, что в некотором кубе K_{N_1} существуют одноцветные множества $a_1 w + v$ и $a_1 S + v$. Из свойства (A_S) следует, что в кубе K_N существует одноцветное множество $aS + v$. Поэтому можно положить $a_1 = a$ и расширить куб K_N до куба K_{N_1} так, чтобы для любой точки v куба K_N точка $aw + v$ лежала в кубе K_{N_1}.

Теперь нужно доказать, что если верны утверждения (A_S) и $(C_{S,w,p})$, то верно и утверждение $(C_{S,w,p+1})$. Это доказательство использует одну важную идею, на которую опиралось и первоначальное доказательство Ван дер Вардена. Пусть задана раскраска решётки в k цветов. Сопоставим точке v куб $v + K_N$. Этот куб состоит из N^n точек, поэтому всего возможно k^{N^n} различных раскрасок точек такого куба в k цветов. Сопоставим этим k^{N^n} раскраскам новые цвета в количестве k^{N^n} и окрасим такими цветами каждую точку v в соответствии с раскраской куба $v + K_N$. Теперь цветов будет гораздо больше,

но новая раскраска обладает следующим свойством: новый цвет точек u и v одинаков тогда и только тогда, когда старый цвет точек $u + x$ и $v + x$ одинаков для всех точек x куба K_N, т. е. кубы $u + K_N$ и $v + K_N$ одинаково раскрашены в старой раскраске. Будем называть новую раскраску *индуцированной*; она зависит от исходной раскраски и от размера куба K_N.

Пусть верны утверждения (A_S) и $(C_{S,w,p})$. Тогда существует такое натуральное число N_p, что для любой раскраски куба K_{N_p} в k цветов найдутся натуральные числа $a_1, \ldots, a_p$ и вектор v, для которых каждое из множеств $T_0, T_1, \ldots, T_p$ одноцветное. Рассмотрим индуцированную раскраску в $k' = k^{N_p^n}$ цветов, соответствующую кубу K_{N_p}. Доказанное выше утверждение $(C_{S,w,1})$ можно применить к этой раскраске. В результате получим, что существует куб $K_{N'}$, содержащий одноцветные (в индуцированной раскраске) множества $a'w + v'$ и $a'S + v'$. Одноцветность в индуцированной раскраске множества $a'S + v'$ означает, что в исходной раскраске кубы $K_{N_p} + a's + v'$ одинаково раскрашены для всех точек s множества S. Каждый из этих одинаково раскрашенных кубов содержит одноцветные множества

$$T_q + a's + v', \quad q = 0, 1, \ldots, p,$$

причём цвет этих множеств не зависит от s. Таким образом, получаем одноцветные множества

$$T'_{q+1} = a'S + T_q + v'.$$

Добавив к ним одноцветное множество $T'_0 = a'w + T_0 + v'$, получим требуемый набор одноцветных множеств

$$\begin{aligned} &T'_0 = (a' + a_1 + \ldots + a_p)w + v'', \\ &T'_1 = a'S + (a_1 + a_2 + \ldots + a_p)w + v'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &T'_{p+1} = (a' + a_1 + \ldots + a_p)S + v'', \end{aligned}$$

где $v'' = v + v'$.

Шаг 2. *Если утверждение $(C_{S,w,p})$ верно при всех натуральных p, то верно утверждение $(A_{S\cup w})$.*

Мы воспользуемся лишь тем, что утверждение $(C_{S,w,p})$ верно при $p = k$, где k — количество цветов. В таком случае получаем одноцветные множества $T_0, T_1, \ldots, T_k$. Этих множеств больше, чем цветов,

поэтому у двух из них цвета одинаковые. Пусть, например, цвета множеств T_r и T_q, где $r < q$, одинаковые. Напомним, что

$$T_r = (a_1 + \ldots + a_{r-1})S + (a_r + \ldots + a_{q-1})w + \\ + (a_q + \ldots + a_p)w + v,$$

$$T_q = (a_1 + \ldots + a_{r-1})S + (a_r + \ldots + a_{q-1})S + \\ + (a_q + \ldots + a_p)w + v.$$

Положим $a' = a_r + \ldots + a_{q-1}$ и $v' = (a_1 + \ldots + a_{r-1})s + (a_q + \ldots + a_p)w + v$, где s — некоторая точка множества S. Тогда $a'(S \cup w) + v'$ — одноцветное множество требуемого вида.

11. Происхождение математических терминов

Алгебра — в русском языке с 1717 г. Происходит из немецкого Algebra, которое, в свою очередь, арабского происхождения. Арабский математик Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми (787 — ок. 850), уроженец Хивы, написал книгу под названием «Хисаб ал-джабр ва-л-мукабала» («Исчисление восполнения и противопоставления»). Значительная часть этой книги была посвящена решению уравнений. Для решения уравнений ал-Хорезми применял две основные операции: *ал-джабр* (восполнение) и *ал-мукабала* (противопоставление). Операция ал-джабр заключалась в избавлении от членов со знаком «минус»в одной части уравнения посредством добавления к обеим частям уравнения одного и того же члена. Операция ал-мукабала заключалась в сокращении равных членов в обеих частях уравнения. Словом *ал-джабр* вскоре стали называть все арабские трактаты на эту тему. Затем это слово распространилось на всю теорию уравнений. В таком виде оно пришло в Европу в XIV в. В течение долгого времени алгебра как раз и была теорией уравнений.

Алгоритм — латинизированный вариант имени арабского математика ал-Хорезми (787 — ок. 850). В средневековой Европе *алгоритмом* назывались десятичная система счисления и способы вычисления в ней, поскольку именно благодаря латинскому переводу трактата ал-Хорезми «Книга о сложении и вычитании на основе индийского исчисления» в Европе познакомились с десятичной системой счисления. Десятичную систему счисления ал-Хорезми заимствовал у индийских математиков, что и видно из названия его трактата.

Анализ — из латинского analysis, которое происходит из греческого слова, означающего «разложение, растворение».

Арифметика — от греческого arithmós (число). В греческом языке так называли только натуральные числа и положительные рациональные числа. Важнейший древнегреческий трактат о свойствах натуральных и рациональных чисел назывался «Арифметика и книга о многоугольных числах». Его автором был Диофант.

Иррациональные числа — от латинского irrationalis (неразумный). Первоначально в греческом языке использовался термин arretos, который одновременно означал «иррациональный, не выразимый в числах»и «священный, тайный». Вероятно, это сыграло роль в возникновении легенды, согласно которой математик Гиппас из пифагорейской школы погиб в море из-за того, что нечестиво разгласил непосвящённым учение об иррациональных величинах, которое зародилось в пифагорейской школе и хранилось в строгой тайне. Затем появился термин asymmetros, а после него — alogos, калькой которого и является латинское irrationalis.

Катет — от греческого káthetos (перпендикуляр).

Квадрат — от латинского quadrātum (четырёхугольник).

Куб — от латинского cubus, которое происходит из греческого языка. первоначально означало «игральная кость».

Линия — от латинского слова linea, которое означает «льняная» (имеется в виду льняная нить).

Математика — от греческого mathēmatikē, которое, в свою очередь, происходит от слова mathēma (наука). На происхождение этого термина большое влияние оказала философская школа пифагорейцев. Пифагорейцы делились на «математиков» и «акусматиков». Акусматики не обучались наукам; им давали лишь устные наставления — «акусмы» (от akustikós — слуховой). Математики же обучались наукам и занимались доказательствами.

Пирамида — от греческого слова pyramís, которым греки называли египетские пирамиды. В свою очередь, греческое слово происходит от древнеегипетского слова «пурама», которым называли пирамиды сами египтяне.

Призма — от греческого слова prísma, которое означает «опиленная» (имелось в виду опиленное бревно).

Пропорция — от латинского proportio; так Цицерон перевёл греческий термин Платона analogia (аналогия).

Радиус — от латинского radius (радиус, луч).

Расстояние — калька французского distance.

Ромб — от латинского rombus, которое происходит из греческого языка и означает «бубён». Раньше бубны имели не круглую форму, а форму квадрата или ромба.

Сфера — от греческого слова spháira, которое означает «мяч».

Точка — от *тыкать, ткнуть*. Аналогично латинское punctum (точка) происходит от pungō (колю). От этих латинских слов происходят русские слова «пункт», «пункция», «пунктуация». В греческом языке первоначально использовался термин sēméion (знак, признак), которому соответствует латинское signum. (Именно такой термин употреблял Евклид.) Позднее, со времён Аристотеля, получил распространение термин stígma (укол), которому как раз и соответствует латинское punctum

Трапеция — от латинского слова trapezium, которое происходит из греческого языка и означает «столик». От этого же корня происходит слово «трапеза», которое по-гречески означает «стол».

Фигура — в русском языке с 1701 г. Происходит из латинского figūra от fingō (образовывать, давать форму). В греческом языке использовался термин schēma (наружный вид, образ, форма). От этого греческого слова происходит русское «схема».

Цилиндр — от латинского слова cylindrus, которое происходит из греческого языка и означает «валик», «каток».

Указатель имён

Предметный указатель

П

Ц

Ч

Ш

Э